PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 20 (34), 1976, pp. 99—109

CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES PSEUDO-BOOLÉENNES GÉNÉRALISÉES

Coriolan Ghilezan

(Reçu le 15 Janvier 1976)

Dans les travaux [1], [2], [7] est définie la dérivée partielle de la fonction booléenne $f: B^n \to B$ par rapport à la variable x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ comme une fonction booléenne $\frac{\partial f}{\partial x_i}: B^{n-1} \to B$, tandis que dans le travail [7] A. Thayse a défini la différentielle totale (pour plus de détails voir [4] de S. Rudeanu).

La dérivée partielle de la fonction booléenne par rapport à la variable x_i est aussi une fonction booléenne (que ne dépend pas de x_i), où

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \oplus f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

tandis que $x \oplus y = x' \cdot y \cup x \cdot y'$ dans l'algèbre de Boole $(B, \cup, \cdot, ', 0, 1)$.

Dans le travail [3] nous avons défini les dérivées partielles des fonctions pseudo-booléennees généralisées $f: L^n \to P$, par rapport à la variable $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, commes des fonctions pseudo-booléennes généralisées

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}: L^n \to P, \ \ \alpha \in L \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

définies comme

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(X) \overset{\text{def}}{=} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(X), \ \ \alpha \in L \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

où $X = (x_1, \ldots, x_n)$.
(L — ensemble fini, l'anneau commutatif unitaire $(P, +, \cdot, 1)$, $L^n = Lx\,Lx \cdots xL$).

Dans le travail [5] M. Stojaković décrit certains opérateurs linéaires $f \to f'$ (ainsi que des opérateurs inverses) lesquels représentent la solution de l'équation fonctionnelle

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' + f' \cdot g'.$$

Dans le travail [3] nous avons défini les différentielles totales de la fonction pseudo-booléenne généralisée $f: L^n \to P$, comme

$$df \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(X)\, dx_i, \quad \alpha \in L$$

et avons démontré quelques propriétés des dérivées partielles et des différentielles (pour plus de détail voir [3].

Ce travail est consacré à la détermination des opérateurs inverses des dérivées partielles $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}: L^n \to P, \quad \alpha \in L \ (1 \leqslant i \leqslant n)$.

Notre devoir consiste à déterminer la fonction pseudo-booléenne généralisée f, quand la fonction $g: L^n \to P$ est connue, aunsi que $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = g(X)$, pour l'élément fixé α de l'ensemble L.

Considérons certaines, ainsi-dites, équations fonctionnelles pseudo-boléennes; ainsi nous disons

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = g_1(X), \ g_1(X)\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + g_2(X)\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j} = g_3(X), \ g_1(X)\frac{\partial^2 f_{\alpha\alpha}}{\partial x_i^2} +$$

$$+ g_2(X)\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = g_3(x),$$

$g_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$ sont des fonctions données, tandis que f est une fonction inconnue.

Généralement, la relation

$$R\left(g_1, \ldots, g_k, f, \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_{\alpha n}}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 f_{\alpha 1 \alpha 1}}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 f_{\alpha n \alpha n}}{\partial x_n^2}, \ldots, \frac{\partial^m f_{\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_m}}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}\right) =$$

$$= 0, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m} \in L),$$

nous l'appelons équations fonctionnelle pseudo-booléenne généralisée (ou bien équation partielle), où contribuent certaines fonctions connues $g, \ldots, g_k$, la fonction inconnue f et certaines dérivées partielles de celle-ci, ainsi que les signes $+, \cdot, 0$ et similaires.

Lemme 1. *Chaque équation fonctionnelle pseudo-booléenne généralisée R peut se transformer à la forme R_1, où*

$$R_1\left(g_1, \ldots, g_k, f, \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_{\alpha n}}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 f_{\alpha 1 \alpha 2}}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 f_{\alpha n-1\, \alpha n}}{\partial x_{n-1} \partial x_n},\right.$$

$$\left.\frac{\partial^3 f_{\alpha 1 \alpha 2 \alpha 3}}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^3 f_{\alpha n-2\, \alpha n-1\, \alpha n}}{\partial x_{n-2} \partial x_{n-1} \partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^n f_{\alpha 1 \ldots \alpha n}}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}\right) = 0, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L).$$

La démonstration de ce Lemme résulte directement des propriétés suivantes des dérivées partielles

(i) $$\frac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 f_{\beta\alpha}}{\partial x_j \partial x_i},\quad i\neq j$$

(ii) $$\frac{\partial^m f_{\alpha 1\ldots\alpha m}}{\partial x_i^m}=(-1)^{m+1}\frac{\partial f_{\alpha m}}{\partial x_i},\quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

(iii) $$\frac{\partial^m f_{\alpha 1\ldots\alpha k_1\ldots\alpha k_2\ldots\alpha k_p}}{\partial x_{i_1}^{k_1}\partial x_{i_2}^{k_2}\cdots\partial x_{i_p}^{k_p}}=(-1)^{m+p}\frac{\partial^p f_{\alpha k_1\ldots\alpha k_p}}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_p}},$$

$$m=k_1+\cdots+k_p,\quad (1\leqslant i_p\leqslant n).$$

Pour la démonstration de (i), (ii) et (iii) voir [3].

En continuant l'exposition nous allons résoudre quelques équations fonctionelles pseudo-booléennes généralisées spéciales.

L e m m a 2. *L'équation fonctionnelle dont la fonction pseudobooléenne généralisée f est inconnue:*

(1) $$f(x_1,\ldots,x_{i-1},\quad \alpha_i,\quad x_{i+1},\ldots,x_n)-f(X)=g(X)$$

ou

(1′) $$\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial x_i}=g(X),$$

où α_i appartient à l'ensemble L, a une solution si et seulement si $g(x_1,\ldots,x_{i-1},\alpha_i,x_{i+1},\ldots,x_n)=0$ et si cette condition est accomplie, toutes les fonctions f sont déterminées par cette formule

(2) $$f(X)=c(x_1,\ldots,x_{i-1},\quad x_{i+1},\ldots,x_n)-g(X)$$

ou bien, dans une autre notation,

(2′) $$\int_{\alpha i} g(X)\,dx_i=c(x_i,\ldots,x_{i-1},\quad x_{i+1},\ldots,x_n)-g(X),$$

où c est une fonction arbitraire dépandant des variables $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$.

Introduisons la notation: $(\tilde{x}_i)=(x_1,\ldots,x_{i-1},\quad x_{i+1},\ldots,x_n)$,

$$(\stackrel{\approx}{\alpha_i})=(x_1,\ldots,x_{i-1},\quad \alpha_i,\quad x_{i+1},\ldots,x_n).$$

D é m o n s t r a t i o n. On substituant α_i à x_i dans l'équation (1) on obtient $f(\stackrel{\approx}{\alpha_i})-f(\stackrel{\approx}{\alpha_i})=g(\stackrel{\approx}{\alpha_i})$. La condition $g(\stackrel{\approx}{\alpha_i})=0$ est donc indispensable.

Supposons que cette condition est accomplie et déterminons tous les fonction f.

Vérifions d'abord que les fonctions f déterminées par l'équation (2) satisfassent l'équation initiale (1). Vraiment

$$f(\stackrel{\approx}{\alpha_i})-f(X)=c(\tilde{x}_i)-g(\stackrel{\approx}{\alpha_i})-(c(x_i)-g(X))=g(X).$$

Il reste à démontrer que chaque résolution f a la forme (2). Soit f une résolution. Cherchons la correspondante $c\,(\tilde{x}_i)$. De l'équation (1) on conclue

$$f(X)=f(\stackrel{\approx}{\alpha_i})-g(X).$$

Étant que $f\,(\stackrel{\approx}{\alpha_i})$ n'est qu'une fonction des $x_1, \ldots, x_{i-1}, \quad x_{i+1}, \ldots, x_n$, alors f est vraiment la différence d'une fonction qui dépend des $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ et de la fonction initiale donnée g.

Propriété 1. Si $f: L^n \to P$ et $\varphi: L^n \to P$ sont des fonctions pseudo-booléennes généralisées et $f(\stackrel{\approx}{\alpha_i})=\varphi(\stackrel{\approx}{\alpha_i})=0$, pour certaines valeurs α_i de L, alors:

(3.i) $$\int_{\alpha i} 0\, dx_i=c\,(\tilde{x}_i),$$

où $c\,(\tilde{x}_i)$ est une fonction arbitraire des variables $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

(3.ii) $$\int_{\alpha i} k f(X)\, dx_i=k \int_{\alpha i} f(X)\, dx_i, \quad k \in P$$

(3.iii) $$\int_{\alpha i} (f+\varphi)\ (X)\, dx_i= \int_{\alpha i} f(X)\, dx_i+ \int_{\alpha i} \varphi\,(X)\, dx_i.$$

Propriété 2. Pour la fonction pseudo-booléenne généralisée arbitraire f

(3.IV) $$\int_{\alpha i} \frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial x_i}\, dx_i=c\,(x_i)+f(X),$$

où $c\,(\tilde{x}_i)$ est une fonction arbitraire des variables $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

Démonstration. Les propriétés (3.i), (3.ii) et (3.iii) résultent directement du Lemme 2, si l'on substitue g par l'ordre avec 0, kf et $f+\varphi$.

Pour la fonction arbitraire f, $\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial x_i}(\stackrel{\approx}{\alpha_i})=0$, continue

$$\int_{\alpha i} \frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial x_i}\, dx_i=c_1(\tilde{x}_i)-\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial x_i}=c\,(\tilde{x}_i)+f(X).$$

Lemme 3. *L'équation fonctionnelle*

(4) $$\frac{\partial^n f_{\alpha 1 \ldots \alpha n}}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}=P\,(X)$$

a une résolution si et seulement si

(4.i) $$P\,(\stackrel{\approx}{\alpha_i})=0, \quad i=1, \ldots, n;$$

si les conditions (4.i) *sont accomplies, tous les fonctions f déterminées par la formule*

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)+(-1)^n P(X), \tag{5}$$

où

$$c_i(x_i)=(-1)^{i-1}\frac{\partial^{n-1}\varphi_{i\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}\ldots\alpha_n}}{\partial x_1\cdots\partial x_{i-1}\,\partial x_{i+1}\cdots\partial x_n},\quad i=1,\ldots,n, \tag{5.i}$$

tandis que φ_i, $i=1,\ldots,n$, des fonctions arbitraires des variables $x_1,\ldots,x_{i-1}$, $x_{i+1},\ldots,x_n$, $i=1,2,\ldots,n$.

Démonstration. Soit la fonction f déterminée par l'équation (5), alors celle-ci satisfait l'équation initiale (4). Vraiment la première dérivée partielle est

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial x_1}=-\sum_{i=2}^{n} c_i(\tilde{x}_i)+(-1)^{n+1}P(X),$$

car $c_i(\approx\alpha_1)=0$, $i=2,\ldots,n$, en vertu de la définition des dérivées partielles, tandis que $P(\approx\alpha_1)=0$ en vertu de la condition (4.i). Ensuite, le seconde dérivée partielle est

$$\frac{\partial^2 f_{\alpha 1\alpha 2}}{\partial x_1\,\partial x_2}=\sum_{i=3}^{n} c_i(\tilde{x}_i)+(-1)^{n+2}P(X),$$

car $c_i(\approx\alpha_2)=0$, $i=3,\ldots,n$ en vertu de la définition des dérivées partielles, tandis que $P(\approx\alpha_2)=0$ en vertu de la condition (4.i). Continuons le procédé et au pas d'ordre n nous obtenons (4).

Démonstration que la fonction f a la forme (5). En vertu du Lemme 2 de (4) résulte que

$$\frac{\partial^{n-1} f_{\alpha 2\ldots\alpha n}}{\partial x_2\cdots\partial x_n}=c_1(\tilde{x}_1)-P(X), \tag{4.1}$$

$P(\approx\alpha_1)=0$ en vertu de (4.i), où $c_1(\tilde{x}_1)$ de (5.i), pour $i=1$, φ_1 est une fonction arbitraire des $x_2,\ldots,x_n$.

Appliquons de nouveau le Lemme 2 sur (4.i), nous obtenons

$$\frac{\partial^{n-2} f_{\alpha 3\ldots\alpha n}}{\partial x_3\cdots\partial x_n}=c_2(\tilde{x}_2)-c_1(\tilde{x}_1)+(-1)^2P(X), \tag{4.2}$$

$c_1(\approx\alpha_2)=0$ en vertu de la définition des dérivées partielles, tandis que en vertu de (4.i) $P(\approx\alpha_2)=0$, où $c_2(\tilde{x}_2)$ de (5.i), pour $i=2$, φ_2 est une fonction arbitraire des $x_1, x_3,\ldots,x_n$.

Ensuite, sur (4.2) de nouveau par l'application du Lemme 2, etc. dans le pas n nous parvenons à f ayant la forme (5). Ainsi nous avons démontré le Lemme 3.

L e m m e 4. *Le système des équations fonctionnelles pseudo-booléennes généralisées*

$$\text{(6)}\quad \begin{aligned} &\text{(i)} && \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial x} = P(x, y, z) \\ &\text{(ii)} && \frac{\partial f_{\alpha 2}}{\partial y} = Q(x, y, z) \\ &\text{(iii)} && \frac{\partial f_{\alpha 3}}{\partial z} = R(x, y, z), \end{aligned}$$

a la résolution si et seulement si

$$\text{(7)}\quad \begin{aligned} &\text{(i)} && P(\alpha_1, y, z) = Q(x, \alpha_2, z) = R(x, y, \alpha_3) = 0 \\ &\text{(ii)} && \frac{\partial P_{\alpha 2}}{\partial y} = \frac{\partial Q_{\alpha 1}}{\partial x} \; et \; \frac{\partial P_{\alpha 3}}{\partial z} = \frac{\partial R_{\alpha 1}}{\partial x} \; et \; \frac{\partial Q_{\alpha 3}}{\partial z} = \frac{\partial R_{\alpha 2}}{\partial y}; \end{aligned}$$

quand les conditions (7) (*i*) *et* (*ii*) *sont accomplies, toutes les fonctions f sont déterminées par n'importe quelle des formules suivantes* (*celles-ci sont équivalentes entre elles*)*:*

$$\text{(8.1)}\quad f(x, y, z) = c - P(x, \alpha_2, \alpha_3) - Q(x, y, \alpha_3) - R(x, y, z)$$

$$\text{(8.2)}\quad f(x, y, z) = c - P(x, \alpha_2, \alpha_3) - R(x, \alpha_2\ z) - Q(x, y, z)$$

$$\text{(8.3)}\quad f(x, y, z) = c - Q(\alpha_1, y, \alpha_3) - P(x, y, \alpha_3) - R(x, y, z)$$

$$\text{(8.4)}\quad f(x, y, z) = c - Q(\alpha_1, y, \alpha_3) - R(\alpha_1, y, z) - P(x, y, z)$$

$$\text{(8.5)}\quad f(x, y, z) = c - R(\alpha_1, \alpha_2, z) - P(x, \alpha_2, z) - Q(x, y, z)$$

$$\text{(8.6)}\quad f(x, y, z) = c - R(\alpha_1, \alpha_2, z) - Q(\alpha_1, y, z) - P(x, y, z),$$

où c est une constante arbitraire de l'ensemble P.

D é m o n s t r a t i o n. Les conditions sous (7) (i) résultent directement des conditions du Lemme 2. Soit f une résolution; en vertu de $\dfrac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f_{\beta\alpha}}{\partial x_j \partial x_i}$, $i \neq j$, appliqué sur (6) résultent les conditions (7) (ii).

Démonstration que la fonction a la forme (8.1). En vertu du Lemme 2, de (6) (i) résulte

$$\text{(9.1)}\quad f(x, y, z) = c(x, z) - P(x. y, z)$$

où c est une fonction arbitraire des variables y, z.

Ensuite, il est nécessaire à déterminer $c(y, z)$. Trouvons la dérivée partielle de la fonction (9.1), par rapport à y, c'est-à-dire

$$\text{(10)}\quad \frac{\partial f_{\alpha 2}}{\partial y} = c(\alpha_2, z) - P(x, \alpha_2, z) - c(y, z) + P(x, y, z),\ \frac{\partial f_{\alpha 2}}{\partial y} = Q(x, y, z).$$

De (10) déterminons $c(y, z)$ et substituons en (9.1), alors (9.1) a la forme

$$(9.2) \qquad f(x, y, z) = c(\alpha_2, z) - P(x, \alpha_2, z) - Q(x, y, z).$$

Ensuite, il est nécessaire de déterminer $c(\alpha_2, z)$. On trouve la dérivée partielle da la fonction (9.2), par rapport à z, c'est-à-dire

$$(11) \qquad \frac{\partial f_{\alpha 3}}{\partial z} = c(\alpha_2, \alpha_3) - P(x, \alpha_2, \alpha_3) - Q(x, y, \alpha_3) - c(\alpha_2 z) + P(x, \alpha_2, z) +$$
$$+ Q(x, y, z), \frac{\partial f_{\alpha 3}}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Déterminons $c(\alpha_2, z)$ de (11) et substituons en (9.2), alors (9.2) a la forme

$$f(x, y, z) = c(\alpha_2, \alpha_3) - P(x, \alpha_2, \alpha_3) - Q(x, y, \alpha_3) - R(x, y, z),$$

où $c(\alpha_2, \alpha_3) = c$ est une constante arbitraire.

Si nous permutons en (6) les équations (i), (ii), (iii) et de la même sorte déterminons f pour chaque permutation, nous obtenons que f est déterminé les formules (8.1), (8.2), (8.3), (8.4), (8.5) et (8.6).

Dans la démonstration que les formules (8.1) et (8.2); (8.2) et (8.3); (8.3) et (8.4); (8.4) et (8.5); (8.5) et (8.6) sont équivalentes, on utilise par ordre les conditions

$$\frac{\partial Q_{\alpha 3}}{\partial z} = \frac{\partial P_{\alpha 2}}{\partial y}; \quad \frac{\partial P_{\alpha 3}}{\partial z} = \frac{\partial R_{\alpha 1}}{\partial x}; \quad \frac{\partial P_{\alpha 2}}{\partial y} = \frac{\partial Q_{\alpha 1}}{\partial x}; \quad \frac{\partial R_{\alpha 2}}{\partial y} = \frac{\partial Q_{\alpha 3}}{\partial z}; \quad \frac{\partial R_{\alpha 1}}{\partial x} = \frac{\partial P_{\alpha 3}}{\partial z}.$$

Soit f sous la forme (8.1). Déterminons la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x;, en vertu de (7) (i) ont obtient

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial x} = P(x, \alpha_2, \alpha_3) - \frac{\partial Q_{\alpha 1}}{\partial x}(x, y, \alpha_3) - \frac{\partial R_{\alpha 1}}{\partial x}(x, y, z) = P(x, y, z)$$

ensuite, en vertu de (7) (ii)

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial x} = P(x, \alpha_2, \alpha_3) - \frac{\partial P_{\alpha 2}}{\partial y}(x, y, \alpha_3) - \frac{\partial P_{\alpha 3}}{\partial z}(x, y, z) = P(x, y, z)$$

Déterminons la dérivée partielle de la fonction ayant la forme (8.1) par rapport à la variable y et nous obtenons

$$\frac{\partial f_{\alpha 2}}{\partial y} = -\frac{\partial Q_{\alpha 2}}{\partial y}(x, y, \alpha_3) - \frac{\partial R_{\alpha 2}}{\partial y}(x, y, z)$$

car

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(c - P(x, \alpha_2, \alpha_3)\right)_{\alpha_2} = 0;$$

ensuite, en vertu de (7) (ii) et (7.i) on obtient

$$\frac{\partial f_{\alpha 2}}{\partial y} = -\frac{\partial Q_{\alpha 2}}{\partial y}(x, y, \alpha_3) - \frac{\partial Q_{\alpha 3}}{\partial z}(x, y, z) = Q(x, y, z).$$

Ainsi le Lemme 3 est démontré.

Théorème. *Les systèmes d'équations fonctionnelles pseudo-booléennes généralisées*

(12) $$\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial x_i} = P_i(X), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ont une résolution si et seulement si

(13.i) $$P_i(\overset{\approx}{\alpha_i}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

(13.ij) $$\frac{\partial P_{j\alpha i}}{\partial x_i} = \frac{\partial P_{i\alpha j}}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n; \quad i \neq j.$$

Si les conditions (13.i) et (13.ij) sont accomplies, toutes les fonctions f sont déterminées par n'importe quelle des formules suivantes (et celles-ci sont équivalentes entre elles)

(14. $i_1 i_2 \cdots i_n$) $$f(X) = c - \sum_{k=1}^{n} P_{i_k}(\overset{\approx}{\alpha_{i_{k+1}}}, \overset{\approx}{\alpha_{i_{k+2}}}, \ldots, \overset{\approx}{\alpha_{i_n}}) - P_{i_n}(X),$$

où $i_1 i_2 \cdots i_n$ sont permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et c est la constante arbitraire de P.

Démonstration. Les conditions sous (13.i) résultent directement du Lemme 2, car

$$\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial x_i}(\overset{\approx}{\alpha_i}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Les conditions sous (13.ij) résultent de la propriété

$$\frac{\partial^2 f_{\alpha i \alpha j}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_{\alpha j \alpha i}}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Démonstration que f a la forme (14, $i_1 i_2 \cdots i_n$).

Obtenons une permutation du système des équations fonctionnelles (12), c'est-à-dire

$$\frac{\partial f_{\alpha i_k}}{\partial x_{i_k}} = P_{i_k}(X), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Directement de $\dfrac{\partial f_{\alpha_{i_1}}}{\partial x_{i_1}} = P_{i_1}(X)$, en vertu du Lemme 2, résulte que

(i.1) $$f(X) = c(\tilde{x}_{i_1}) - P_{i_1}(X),$$

où $c(\tilde{x}_{i_1})$ est une fonction arbitraire des variables $x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$.
Ensuite, on trouve la dérivée partielle de la fonction (i.1), par rapport à la variable x_{i_2}, c'est-à-dire

(i'.1) $$\frac{\partial f_{\alpha_{i_2}}}{\partial x_{i_2}} = c(\overset{\approx}{\alpha_{i_2}}) - P_{i_1}(\overset{\approx}{\alpha_{i_2}}) - c(\tilde{x}_{i_1}) + P_{i_1}(X), \frac{\partial f_{\alpha_{i_2}}}{\partial x_{i_2}} = P_{i_2}(X).$$

Déterminons $c(\tilde{x}_{i_1})$ de (i'.1) et substituons en (i.1), alors la fonction f a la forme

$$f(X)=c(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2})-P_{i_1}(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2})-P_{i_2}(X). \tag{i.2}$$

Ensuite, on trouve la dérivée partielle de la fonction (i.2), par rapport à la variable x_{i_3}, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f_{\alpha_{i_3}}}{\partial x_{i_3}}=c(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2},\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_3})-P_{i_1}(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2},\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_3})-P_{i_2}(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_3})-c(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2})+P_{i_1}(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2})+ \tag{i'.2}$$
$$+P_{i_2}(X),\ \frac{\partial f_{\alpha_{i_3}}}{\partial x_{i_3}}=P_{i_3}(X).$$

Déterminons $c(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2})$ de (i'.2) et substituons en (i 2), alors la fonction f a la forme

$$f(X)=c(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2},\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_3})-P_{i_1}(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2},\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_3})-P_{i_2}(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_3})-P_{i_3}(X). \tag{i 3}$$

Ensuite de la même manière on trouve la dérivée partielle de la fonction (i.3), par rapport à la variable x_{i_n} et on obtient (i'.3). Déterminons $c(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2},\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_3})$ de (i'.3) et substituons en (i.3), alors la fonction f a la forme (i.4) et ainsi plus loin dans le pas $n-1$ nous obtenons

$$f(X)=c(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2},\ \ldots,\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_{n-1}})-\sum_{k=1}^{n-2}P_{i_k}(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_{k+1}},\ \ldots,\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_{n-1}})-P_{i_{n-1}}(X). \tag{i.n-1}$$

Ensuite, on trouve la dérivée partielle de la fonction (i.n—1), par rapport à la variable x_{i_n}, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f_{\alpha_{i_n}}}{\partial x_{i_n}}=c(\alpha_{i_2},\ \ldots,\ \alpha_{i_n})-\sum_{k=1}^{n-1}P_{i_k}(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_{k+1}},\ \ldots,\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_{n-1}},\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_n})-c(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2},\ \ldots,\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_{n-1}})+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-2}P_{i_k}(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_{k+1}},\ \ldots,\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_{n-1}})+P_{i_{n-1}}(X) \tag{i'.n-1}$$
$$\frac{\partial f_{\alpha_{i_n}}}{\partial x_{i_n}}=P_{i_n}(X).$$

Déterminons $c(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_2},\ \ldots,\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_{n-1}})$ de (i'.n-1) et substituons en (i.n-1), alors la fonction f a la forme

$$f(X)=c-\sum_{k=1}^{n-1}P_{i_k}(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_{k+1}},\ \ldots,\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_n})-P_{i_n}(X),$$

où c est une constante arbitraire de P.

Soit f sous la forme (14. $i_1\cdots i_n$). Déterminons la dérivée partielle de la fonction f, par rapport à la variable x_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f_{\alpha_j}}{\partial x_j}=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial P_{i_{k\alpha j}}}{\partial x_j}(\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_{k+1}},\ \ldots,\ \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{i_n})-\frac{\partial P_{i_{n\alpha j}}}{\partial x_j}(X)$$

tandis que en vertu de (13.ij)

$$\frac{\partial f_{\alpha_j}}{\partial x_j} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial P_{j\alpha_k}}{\partial x_{i_k}} (\overset{\approx}{\alpha}_{i_{k+1}}, \ldots, \overset{\approx}{\alpha}_{i_n}) - \frac{\partial P_{j\alpha_{i_n}}}{\partial x_{i_n}} (X) = P_j(X) \quad j = 1, 2, \ldots, n).$$

La fonction (14. $i_1 \cdots i_n$) peut être écrite pour chaque permutation $i_1 \cdots i_n$, c'est-à-dire la fonction f peut être écrite en $n!$ forme (et celles-ci sont équivalentes entre elles).

Ainsi on a démontré le Théorème.

Directement du Théorème résulte la suivante conséquence.

Conséquence 1. Le système d'équations fonctionnelles pseudo-booléennes généralisées

$$(15) \qquad \frac{\partial^{m+1} f_{\beta_1 \ldots \beta_m \alpha_i}}{\partial y_1 \ldots \partial y_m \partial x_i} = P_i(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots, y_m), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

a une résolution si et seulement si

$$(15.\text{i}) \qquad P_i(\overset{\approx}{\alpha}_i, Y) = 0, \quad i = 1, \ldots, n \ (\text{où } (X, Y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m))$$

$$(15.\text{ij}) \qquad \frac{\partial P_{j\alpha_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial P_{i\alpha_j}}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n; \quad i \neq j$$

si les conditions (15.i) et (15.ij) sont accomplies, alors le système (15) se réduit à l'équation fonctionnelle

$$(16.\ i_1 \ldots i_n) \qquad \frac{\partial^n f_{\beta_1 \ldots \beta_m}}{\partial y_1 \ldots \partial y_m} = C(Y) - \sum_{k=1}^{n-1} P_{i_k}(\overset{\approx}{\alpha}_{i_{k+1}}, \ldots, \overset{\approx}{\alpha}_{i_n}, Y) - P_{i_n}(X, Y)$$

où $i_1 \ldots i_n$ est une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $c(Y)$ une fonction arbitraire des $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Directement du Lemme 3 résulte la conséquence suivante.

Conséquence 2. L'équation fonctionnelle (16. $i_1 \ldots i_n$) ayant une fonction inconnue f, a une résolution si et seulement si

$$(17.\text{i}) \qquad \varphi(X, \overset{\approx}{\beta}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m)$$

($\varphi(X, Y)$ est la partie droite de l'équation fonctionnelle (16. $i_1 \ldots i_n$)).

Si les conditions (15.i), (15.ij) et (17.i) sont accomplies, alors toutes les fonctions f sont déterminées par n'importe quelle des formules (et celles-ci sont équivalentes entre elles),

$$f(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} c_i(\tilde{y}_i) + (-1)^n \left[c(Y) - \sum_{k=1}^{n-1} P_{i_k}(\overset{\approx}{\alpha}_{i_{k+1}}, \ldots, \overset{\approx}{\alpha}_{i_n}, Y) - P_{i_n}(X, Y) \right]$$

où $i_1 i_2 \ldots i_n$ est une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots n\}$, tandis que

$$c_i(\tilde{y}_i) = (-1)^{i-1} \frac{\partial^{n-1} \varphi_{i\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n}}{\partial y_1 \ldots \partial y_{i-1} \partial y_{i+1} \ldots \partial y_n}, \ \varphi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

des fonctions arbitraires des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$

Dans le travail suivant, dans Publ. Inst. Math. nous résolverons encore d'autres espèces d'equations fonctionnelles pseudo-booléennes généralisées.

Nous remercions le professeur S. Prešić pour son apport à la réussite de cette contribution.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Akers Jr., S. B., *On a theory of Boolean functions*, SIAM J. 7, 487—498, 1959.

[2] G. Bioul et M. Davio, *Taylor expansions of Boolean functions and of their derivatives*, Phillips Res. Rep. 27, 1—6, 1972.

[3] C. Ghilezan, *Les dérivées partielles des fonctions pseudobooléennes généralisées*, Amsterdam, Discrete Mathematics, 1976. (sous presse).

[4] S. Rudeanu, *Boolean functions and equations*, North-Holland, 1974.

[5] M. Stojaković, *Sur l'algèbre distantielle*, Mat vesnik, 2 (17) Sv. 3, 1965.

[6] A. Thayse, *Boolean differential calculus*, Phillips Res. Rep. 26, 229—246, 1971.

[7] A Thayse et M. Davio, *Boolean differential calculus and its application to switching theory*, IEEE Transactions on Computers, V. C—22, №. IV 409—420, 1973.