PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 20 (34), 1976, pp. 85–89

EINE GEODÄTISCHE LINIE AUF DER KEGELFLÄCHE

Stanimir Fempl

(Dargestellt am 9. Januar 1976)

Wie bekannt, unter sämtlichen Verbindungslinien zwischen zwei Punkten einer Fläche, sind die geodätischen Linien die kürzesten [1]. Dieselben haben die Eigenschaft, dass ihre Hauptnormalen Flächennormalen sind [2].

Ist $z=f(x, y)$ die Gleichung der Fläche, geodätische Linien sind mit [3]

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ 1 & y' & p+qy \\ 0 & y'' & r+2sy'+ty'^2+qy'' \end{vmatrix} = 0$$

gegeben, wo $p=\partial z/\partial x$, $q=\partial z/\partial y$, r, s, t die zweiten partiellen Ableitungen von z sind, welche Gleichung man auch in der Form

$$(1) \qquad (1+p^2+q^2)\, y'' = pty'^3 + (2ps-qt)\, y'^2 + (pr-2qs)\, y' - qr$$

darstellen kann. Die endliche Form dieser Gleichung und die Gleichung der Fläche stellen die Gleichungen der geodätischen Linien dar.

Die geodätischen Linien bilden ein doppelt unendliches System; durch jeden Flächenpunkt gehen beliebig viele Linien, während durch zwei Flächenpunkte im allgemeinen Fall nur eine hindurchgeht, und dasselbe gilt wenn man von einem Punkte in gegebener Richtungt ausgeht [3].

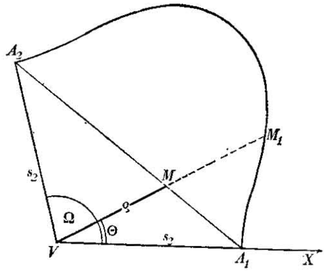
Die Gleichung (1) ist eine nichtlineäre Gleichung II Ordnung, und nur in seltenen Fällen ist es möglich diese Gleichung vollständig zu integrieren (Mitrinović zeigte [4] dass die Bestimmung der geodätischen Linien auf der Fläche $z=\alpha x+\varphi(y)$, $\alpha=\text{const.}$ auf Quadraturen zurückführbar ist).

In dieser Arbeit gebe ich ein partikuläres Integral, welches die geodätische Linie an einem schiefen Kreiskegel

$$h^2(x^2+y^2)+(x_0{}^2-r^2)\, z^2-2hx_0xz+2hr^2z-h^2r^2=0$$

darstellt (Halbmesser der in der XOY-Ebene befindlichen Basis ist r. Mittelpunkt im Koordinatenanfang, $(x_0,$, 0, $h)$ sind Koordinaten der Kegelspitze). Diese Kegelfläche ist abwickelbar und es ist bekannt dass sich die geodätischen Linien bei Ausbreitung der Fläche auf die Ebene als Geraden darstellen [1].

Hier werde ich für den Ausgangspunkt den Endpunkt A_1 der kleinsten Mantellinie s_2 wählen, und für die Fortschreitungsrichtung diejenige, die bei Abwickelung des Mantels zu dem symmetrischen Punkt A_2 führt (leicht erhält man noch einige Verallgemeinerungen, die hier nicht interpretiert sind).



Im Polarkoordinatensystem lautet die Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte (R_1, θ_1), (R_2, θ_2):

$$(2) \qquad R = \frac{R_1 R_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{R_2 \sin(\theta_2 - \theta) - R_1 \sin(\theta_1 - \theta)}.$$

Nimmt man jetzt in der Ebene des ausgebreiteten Kegelmantels die Gerade VA_1 als Polarachse und die Kegelspitze V als Pol, so wird $R_1 = s_2$, $\theta_1 = 0$, während für den Punkt A_2, $R_2 = s_2$, $\theta_2 = \Omega$ gilt, wo Ω den Öffnungswinkel des abgewickelten Kegelmantels darstellt.

In einer meiner früheren Arbeit [5] untersuchte ich ein elliptisches Integral III Gattung

$$(3) \qquad Л(n, k, \varphi) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}}{1+n\sin^2\omega}\, d\omega.$$

Für die Funktion Л fand ich das Additionstheorem in der Form:

Wenn für drei Amplituden φ, ψ, σ die Gleichung

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}$$

besteht, so gilt

$$Л(n, k, \varphi) + Л(n, k, \psi) = Л(n, k, \sigma) + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma\sqrt{n(n+1)(n+k^2)}}{n+1-n\cos\varphi\cos\psi\cos\sigma}.$$

Ich zeigte dass die Funktion $Л(n, k, \varphi)$ eine konkrete geometriche Bedeutung hat, nämlich dass sie ein Winkel θ in der Öffnung des in die Ebene ausgebreiteten Mantels darstellt. Es ist also

$$\theta(\rho) = Л(n, k, \varphi),$$

wenn

$$(4) \qquad n = \frac{(s_1 - s_2)^2}{4 s_1 s_2}, \quad k = \sin\frac{\beta - \gamma}{2}, \quad \cos\varphi = \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} \cdot \frac{s_1 s_2 - \rho^2}{s_1 s_2 + \rho^2}$$

ist, wo s_1 die grösste Mantellinie des Kegels darstellt, ρ eine beliebige Mantellinie die dem Winkel θ entspricht, und β und γ sind den Mantellinien s_1 und s_2 im charakteristischen Dreieck des Kegels die gegenüberliegenden Winkel. Leicht ersieht man, dass für $\rho = \rho_2 = s_2$, auf Grund der dritten Gleichung (4), dass $\varphi = 2\pi$ ist, und dass nach (3)

$$\Omega = Л(n, k, 2\pi) = 2\,Л(n, k, \pi), \quad Л(n, k, \pi) = 2\,Л(n, k, \pi/2) = 2\,Л_0.$$

Die Gleichung (2) erscheint jetzt in der Form

$$R=\frac{s_2 \cos 2\,Л_0}{\cos(2\,Л_0-\theta)}=\frac{s_2\cos 2\,Л_0}{\cos[Л\,(n,k,\pi)-Л\,(n,k,\varphi)]}. \tag{5}$$

Die Funktion Л ist eine ungerade Funktion. Deshalb ist

$$Л\,(n,k,\varphi)-Л\,(n,k,\psi)=Л\,(n,k,\sigma)-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma\sqrt{n(n+1)(n+k^2)}}{n+1-n\cos\varphi\cos\psi\cos\sigma}$$

unter Bedingung

$$\cos\sigma=\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}.$$

Wenn man hier $\varphi=\pi$, $\psi=\varphi$ substituiert, so folgt

$$Л\,(n,k,\pi)-Л\,(n,k,\varphi)=Л\,(n,k,\sigma)$$

unter Bedingung $\cos\sigma=-\cos\varphi$, was auf Grund (4) ergibt

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}=\sqrt{\frac{s_2}{s_1}}\sqrt{\frac{s_1{}^2-\rho^2}{\rho^2-s_2{}^2}}. \tag{6}$$

Deshalb erhält man für die Gleichung der ausgebreiteten geodätischen Linie

$$R=\frac{s_2\cos 2\,Л_0}{Л\,(n,k,\sigma)} \tag{7}$$

unter Bedingung (6).

Wenn jetzt (x, y, z) Koordinaten des Endpunktes M einer geodätischen Linie sind, so ist $R^2=(x-x_0)^2+y^2+(z-h)^2$. Deshalb erhält man anstatt (7)

$$(x-x_0)^2+y^2+(z-h)^2=\frac{s_2{}^2\cos^2 2\,Л_0}{\cos^2 Л\,(u,k,\sigma}, \quad \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}=\sqrt{\frac{s_2}{s_1}\cdot\frac{s_1{}^2-\rho^2}{\rho^2-s_2{}^2}}.$$

Es sei noch bemerkt dass sich

$$\frac{1}{4}\,\Omega=Л_0=\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}}{1+n\sin^2\omega}\,d\omega$$

mittels der Kegelelemente ausdrücken lässt. Ich habe nämlich gezeigt [5] dass

$$\Omega=4\,Л_0=4\,[KE(k',\psi)+EF(k',\psi)-KF(k',\psi)]$$

ist, wo K und E vollständige elliptische Normalintegrale I und II Gattung (Legendretypus) darstellen, $F(k', \psi)$ und $E(k', \psi)$ elliptische Normalintegrale I und II Gattung mit komplementären Modul k' $(k^2+k'^2=1)$, und Amplitude $\psi=\arcsin[2r/(s_1+s_2)]$. Für die Funktion $\pi Л_0/2$ bestehen Tafel [6] womit eine bequeme Ausrechnung der Funktion $\cos 2Л_0$ möglich ist. Weiterhin ist es möglich auch die beliebigen Mantellinien ρ des Kegels mittels (x, y, z) auszudrücken.

Denn dem in der Grundebene des Kegels befindlichen und der Grösse R entsprechenden Endpunkt M_1 der Mantellinie ρ des Kegels erhält man aus der Gleichung der Geraden VM

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y}{y}=\frac{Z-h}{z-h}$$

für $Z=0$, und es wird

$$X=\frac{hx-x_0 z}{h-z},\quad Y=\frac{hy}{h-z},\quad Z=0.$$

Die Länge $\rho=VM_1$ ist mit

$$\rho^2=\left(\frac{hx-x_0 z}{h-z}-x_0\right)^2+\frac{h^2y^2}{(h-z)^2}+h^2$$

gegeben während man wegen $s_1^2-h^2=(x_0+r)^2$, $s_2^2-h^2=(x_0-r)^2$,

$$\frac{s_1^2-\rho^2}{\rho^2-s_2^2}=\frac{h^2r(2x_0+r)-h^2(x^2+y^2)+(r+x_0)^2z^2+2h^2x_0x-2h(r+x_0)^2z}{h^2(x^2+y^2)-(x_0-r)^2z^2-2h^2x_0x+2h(x_0-r)^2z+h^2r(2x_0-r)}$$

erhält. Da aus der Kegelgleichung

$$h^2(x^2+y^2)+2hr^2z-h^2r^2=(r^2-x_0^2)z^2+2hx_0xz$$

folgt, so ist

$$\frac{s_1^2-\rho^2}{\rho^2-s_2^2}=\frac{(h-z)[h(x+r)-(x_0+r)z]}{(h-z)[h(r-x)-(r-x_0)z]},$$

weshalb

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}=\sqrt{\frac{s_2}{s_1}}\cdot\sqrt{\frac{h(r+x)-(r+x_0)z}{h(r-x)-(r-x_0)z}}$$

wird. Es ist noch $(x_0-r)/h=-\operatorname{ctg}\beta$, $(x_0+r)/h=\operatorname{ctg}\gamma$, also

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}=\sqrt{\frac{s_2}{s_1}}\sqrt{\frac{r+x-z\operatorname{ctg}\gamma}{r-x-z\operatorname{ctg}\beta}}.$$

Die Gleichungen der gesuchten geodätischen Linie lauten also

$$(8)\qquad\left\{\begin{aligned}&h^2(x^2+y^2)+(x_0^2-r^2)z^2-2hx_0xz+2hr^2z-h^2r^2=0,\\&(x-x_0)^2+y^2+(h-z)^2=\frac{s_2^2\cos^2 2\,\mathrm{Л}_0}{\cos^2\mathrm{Л}(n,k,\sigma)},\\&\left(\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}=\sqrt{\frac{s_2}{s_1}}\sqrt{\frac{r+x-z\operatorname{ctg}\gamma}{r-x-z\operatorname{ctg}\beta}}\right).\end{aligned}\right.$$

LITERATUR

[1] Scheffers G., *Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie*, Berlin und Leipzig. (1922).

[2] Шуликовский В. И., *Классическая дифференциялная геометрия*, (Ф. М.) Москва 1963.

[3] Kašanin R., *Viša Matematika* II/1, Beograd, (1949).

[4] Mitrinović D., *Zbornik matematičkih problema* II. Beograd, (1960).

[5] Fempl S., *O jednom tipu eliptičkog integrala III vrste i o njegovim primenama*, Zbornik radova SAN, knj. 7 (1959) Beograd. Str. 107—120.

[6] Byrd P. F. and Friedman M. D., *Handbook of elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, (1971). Berlin, Heidelberg. New York.