Bemerkungen zur Integration der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + Y^2 = g(x)^2.$$

Von

H. LEMKE.

Es gibt eine Anzahl von Problemen der Geometrie und Mechanik, deren Lösung mit der Integration der genannten Differentialgleichung zusammenhängt. Aus diesem Grunde sind besonders in den letzten Jahren eine Reihe von Untersuchungen erschienen, die sich mit dem Integrationsproblem beschäftigen, welche sich also die Aufgabe stellen, Werte der Funktion $g(x)$ anzugeben, für die das allgemeine Integral der Differentialgleichung ermittelt werden kann[1]).

---

[1]) Die Literatur ist zum grössten Teil in der Abhandlung von D. Mitrinovitch: *Nouveaux cas d'intégrabilité d'une équation différentielle du premier ordre* (Bulletin de l'Académie des Sciences, Belgrade, Section A, Nr 1) zusammengestellt. Ferner seien erwähnt:

T. Peyovitch: *Nouveaux cas d'intégrabilité d'une équation importante du premier ordre* („Glas" de l'Academie royale Serbe, t. CIX; 1923).

D. Mitrinovitch: *Remarque sur une équation différentielle du premier ordre* (Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. III, 1934).

D. Mitrinovitch: *Sur l'équation différentielle des lignes asymptotiques* (ebendaselbst).

D. Mitrinovitch: *Nouvelles formes intégrables d'une équation différentielle importante du premier ordre.* (Bulletin de l'Académie des Sciences, Belgrade, Section A, Nr 2).

Die nachstehenden Bemerkungen verfolgen denselben Zweck.

Es sei dabei auf den Zusammenhang hingewiesen, der mit der oft untersuchten Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} + a_1 . y^3 + 3a_2 . y^2 + 3a_3 . y + a_4 = 0$$

besteht, auf den übrigens schon M. Petrovitch[1]) und W. Heymann[2]) aufmerksam gemacht haben.

1. Transformation der Differentialgleichung.

Man setze $Y = g . \sin u$, $Y' = g' . \sin u + g . \cos u . u'$; dann ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{g'}{g} . \operatorname{tang} u.$$

Führt man die neue Variable $y = \operatorname{tang} u$ ein, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2) \left(1 - \frac{g'}{g} . y\right)$$

oder auch

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy}{dx} + a_1 . y^3 + 3a_2 . y^2 + 3a_3 . y + a_4 = 0,$$

wo $a_1 = \frac{g'}{g}$, $a_2 = -\frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{g'}{g}$, $a_4 = -1$ ist.

Wenn $g = c_1 . e^{cx}$ ist, lässt sich die Differentialgleichung integrieren.

Zwischen Y und y besteht die Beziehung:

---

1) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CXXII, Nr. 22; 1896.

2) Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1898.

$$Y = \pm \frac{g \cdot y}{\sqrt{1+y^2}}. \tag{2}$$

Die Differentialgleichung (1) geht durch die Substitution

$$y = y_1 \cdot \varphi(x) + \psi(x), \quad \frac{dx_1}{dx} = f(x)$$

in die Gleichung

$$\frac{dy_1}{dx_1} + b_1 \cdot y_1^3 + 3b_2 \cdot y_1^2 + 3b_3 \cdot y_1 + b_4 = 0 \tag{1a}$$

über, wo

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a_1 \cdot \varphi^2}{f}, \\
b_2 &= \frac{\varphi}{f} \cdot (a_1 \cdot \psi + a_2), \\
b_3 &= \frac{1}{f} \cdot \left(a_1 \cdot \psi^2 + 2a_2 \cdot \psi + a_3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\varphi'}{\varphi}\right), \\
b_4 &= \frac{1}{f \cdot \varphi} \cdot (a_1 \cdot \psi^3 + 3a_2 \cdot \psi^2 + 3a_3 \cdot \psi + a_4 + \psi')
\end{aligned} \tag{3}$$

ist[1]).

Der Ausdruck

$$s_3 = a_2 \cdot a_1' - a_1 \cdot a_2' + a_1^2 \cdot a_4 - 3a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + 2a_2^3 \tag{4}$$

ist für die angegebene Substitution eine Invariante vom Gewichte 3. Setzt man nämlich

$$\sigma_3 = b_2 \cdot b_1' - b_1 \cdot b_2' + b_1^2 \cdot b_4 - 3b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + 2b_2^3, \tag{4a}$$

[1]) R. Liouville: Acta mathematica, Band 27.

so wird

$$\sigma_3 = \left(\frac{\varphi}{f}\right)^3 \cdot s_3.$$

2. Integration der Differentialgleichung für $s_3 = 0$.

Wenn die Invariante s_3 verschwindet, lässt sich die Differentialgleichung durch Quadraturen integrieren. Man wählt $\varphi = -\frac{a_2}{a_1}$, dann ist $b_2 = 0$ und $b_4 = \frac{s_3}{f \cdot \varphi \cdot a_1^2} = 0$.

Man kann über die Funktion $\varphi(x)$ so verfügen, dass auch $b_3 = 0$ wird. Man findet nämlich zunächst:

$$b_3 = \frac{1}{f \cdot a_1} \cdot \left(\frac{a_1}{3} \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} + a_1 \cdot a_3 - a_2^2\right),$$

so dass φ aus der Gleichung

$$\frac{d \log \varphi}{dx} = \frac{3 \cdot (a_2^2 - a_1 \cdot a_3)}{a_1}$$

zu bestimmen ist. Eine Änderung der unabhängigen Variabeln x ist nicht erforderlich; also $f = 1$. Die Differentialgleichung für y_1 heisst dann $y_1' + b_1 \cdot y_1^3 = 0$.

Wie muss die Funktion $g(x)$ beschaffen sein, damit $s_3 = 0$ wird? Unter Berücksichtigung der oben angegebenen Werte für a_1, a_2, a_3, a_4 findet man

$$(5) \qquad s_3 = -\left\{\frac{1}{3} \cdot \frac{d^2 \log g}{dx^2} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{d \log g}{dx}\right)^2 + \frac{2}{27}\right\}.$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung $s_3 = 0$ ist

$$(6) \qquad g^2 = c^2 \cdot \cos \frac{2}{3} (x - x_0) \text{ *)};$$

*) Die Lösung ist bekannt; vergl. Rivereau: L'Intermédiaire des Mathématiciens, t. XI, p. 232; 1904.

c und x_0 sind Konstanten. Ist die Funktion g^2 durch Gleichung (6) definiert, so berechnet man nach einander

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\cos\frac{2}{3}(x-x_0)\,.\,\sin^3\frac{2}{3}(x-x_0)}}\,,$$

$$b_1 = -\frac{4}{3\,.\,\sin^2\frac{4}{3}(x-x_0)}\,,$$

(7) $$y = \frac{1}{\sin\frac{2}{3}(x-x_0)}\,.\left\{\frac{\sqrt{\sin\frac{4}{3}\gamma}}{\sqrt{\sin\frac{4}{3}(x-x_0+\gamma)}} - \cos\frac{2}{3}(x-x_0)\right\}\,,$$

wo γ die Integrationskonstante ist. In dem besonderen Falle $\gamma=0$ wird

(8) $$y = -\operatorname{cotg}\frac{2}{3}(x-x_0),\quad Y = \pm c\,.\left[\cos\frac{2}{3}(x-x_0)\right]^{\frac{3}{2}}.$$

3. Untersuchung der Differentialgleichung (1), wenn die Invariante s_3 von Null verschieden ist.

Man benutzt wieder die Substitution $y = y_1\,.\,\varphi(x) + \psi(x)$, $\frac{dx_1}{dx} = f(x)$ und bestimmt die drei Funktionen φ, ψ, f so, dass eine Differentialgleichung von der Form:

(9) $$\frac{dy_1}{dx_1} = y_1^3 + S\,.\,y_1 + 1$$

ensteht, wo S eine Funktion von x und damit auch von x_1 ist. In der neuen Gleichung (9) fehlt also auf der rechten Seite das

Glied mit dem Faktor y_1^2. Die Ergebnisse der etwas umständlichen Rechnung sind:

$$\psi = -\frac{a_2}{a_1}, \quad \varphi = \frac{s_3^{\frac{1}{3}}}{a_1}, \quad \frac{dx_1}{dx} = -\frac{s_3^{\frac{2}{3}}}{a_1}.$$

Hierin ist s_3 die mehrfach genannte Invariante; sie lässt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (5) in der Form:

$$s_3 = -\left\{\frac{1}{3}a_1' + \frac{2}{3} \cdot a_1^2 + \frac{2}{27}\right\}$$

schreiben. Für die Funktion S erhält man den Ausdruck:

$$(10) \qquad S = s_3^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{a_1}{3} \cdot \frac{s_3'}{s_3} - a_1' + a_1^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Die Ableitungen auf der rechten Seite von S sind nach x zu nehmen; ferner ist dann noch die Variabele x durch x_1 zu ersetzen.

Im allgemeinen ist es nicht möglich, die Differentialgleichung (9) zu integrieren; eine Ausnahme bildet der Fall, wo die Funktion S sich auf eine Konstante reduziert. Es wäre dann nur nötig, die Funktion $a_1 = \frac{d \log g}{dx}$ aus der Gleichung $S=k$ zu berechnen. Aber auch diese Bestimmung stösst auf Schwierigkeiten, wie im folgenden an dem besonders einfachen Beispiel $S=0$ gezeigt werden soll.

Aus der Gleichung $S=0$ folgt zunächst:

$$a_1 \cdot \frac{s_3'}{s_3} - 3a_1' + 3a_1^2 - 1 = 0.$$

Wenn man für s_3 seinen Wert einsetzt, ergibt sich eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung für a_1:

$$(11) \qquad a_1 \,.\, a_1'' - 3a_1'^2 + \left(a_1^2 - \frac{5}{3}\right) . \, a_1' + \\ + 6 \,.\left(a_1^2 - \frac{1}{3}\right) . \left(a_1^2 + \frac{1}{9}\right) = 0.$$

Man nehme a_1 als unabhängige und x als abhängige Variabele, setze also:

$$\frac{da_1}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{da_1}}, \quad \frac{d^2a_1}{dx^2} = -\frac{1}{\left(\frac{dx}{da_1}\right)^3} . \frac{d^2x}{da_1^2}.$$

Es ist dann

$$a_1 . \frac{d^2x}{da_1^2} + 3 . \frac{dx}{da_1} - \left(a_1^2 - \frac{5}{3}\right) . \left(\frac{dx}{da_1}\right)^2 - \\ - 6 . \left(a_1^2 - \frac{1}{3}\right) . \left(a_1^2 + \frac{1}{9}\right) . \left(\frac{dx}{da_1}\right)^3 = 0.$$

Für $\xi = \dfrac{dx}{da_1}$ findet man eine Differentialgleichung *erster* Ordnung von bemerkenswerter Gestalt:

$$(12) \qquad a_1 . \frac{d\xi}{da_1} + 3\xi - \left(a_1^2 - \frac{5}{3}\right) . \xi^2 - \\ - 6 . \left(a_1^2 - \frac{1}{3}\right)\left(a_1^2 + \frac{1}{9}\right) . \xi^3 = 0,$$

die zu demselben Typus gehört wie die Differentialgleichung (1)

Hat man ξ als Funktion von a_1 bestimmt, so ist auch x *als Funktion von* a_1, a_1 *als* Funktion von x und schliesslich g als Funktion von x bekannt. Leider lässt sich das allgemeine Integral von (12) nicht angeben. Es ist vermutlich eine transzendente Funktion.

Die Differentialgleichung (12) besitzt das partikuläre Integral:

$$\xi = -\frac{9}{2 \, . \, (9a_1^2 + 1)} \, .$$

Wenn man daraus die Funktion g berechnet, erhält man $g^2 = c^2 . \cos \frac{2}{3} (x - x_0)$, also nichts Neues.

4. Imaginäre und komplexe Lösungen der Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung (1) wird durch die imaginäre Lösung $y = i$ befriedigt, die zwar selbst keine Bedeutung hat, weil der zugehörige Wert von Y nach Gleichung (2) unendlich gross werden würde, die aber für weitere Transformationen der Differentialgleichung Verwendung finden kann. Wenn nämlich in der Substitution $y = \varphi . z + \psi$ die Funktion ψ ein partikuläres Integral der Differentialgleichung ist, so verschwindet der Koeffizient b_4 (Vergl. Seite 203), und man kann durch geeignete Wahl der Funktion φ auch noch den Koeffizienten b_3 gleich Null, machen. In dem vorliegenden Falle setze man $\psi = i$ und $e = g^2 . e^{2ix}$. Die Differentialgleichung für z erhält dann die einfache Form:

$$\frac{dz}{dx} = r_1 . z^2 - r_0 . z^3, \tag{13}$$

wo

$$r_1 = (g^2 - 3 . gg' . i) \, e^{2ix}, \quad r_0 = g^3 . g' . e^{4ix} \quad \text{ist.} \tag{14}$$

Im allgemeinen ist die Integration unmöglich; man erhält aber Lösungen, wenn man geeignete Voraussetzungen über die Natur der Funktion g und damit der Funktionen r_0 und r_1 macht. Im folgenden soll g so bestimmt werden, dass $r_1 = k . r_0$ ist, wo k eine gegebene Konstante bedeutet; dann lassen sich die Variabeln in der Differentialgleichung (13) separieren und diese durch Quadraturen integrieren.

Setzt man aus (14) die Werte für r_1 und r_0 ein, so findet man unter der Annahme $\frac{r_1}{r_0} = k$ zunächst:

$$\frac{1}{g \cdot g'} - \frac{3i}{g^2} = k \, . \, e^{2ix},$$

und ferner, wenn $f = g^2$ gesetzt wird:

$$f' = \frac{2f \, . \, e^{-2ix}}{k \, . \, f + 3i \, . \, e^{-2ix}} \, .$$

Wenn man an Stelle von f noch die neue Variabele $\eta = k \, . \, f + 3i \, . \, e^{-2ix}$ einführt, so erhält die Differentialgleichung für η die bemerkenswerte Form:

$$\eta \, . \, \frac{d\eta}{dx} = \varrho_0 + \varrho_1 \, . \, \eta, \tag{15}$$

wo

$$\varrho_0 = -6i \, . \, e^{-4ix}, \quad \varrho_1 = +8 \, . \, e^{-2ix} \qquad \text{ist.} \tag{16}$$

Hat man η aus (15) bestimmt, so ergibt sich g^2 aus der Gleichung:

$$k \, . \, g^2 = \eta - 3i \, . \, e^{-2ix}. \tag{17}$$

Die Differentialgleichung (15) besitzt die beiden partikulären Integrale $\eta_1 = 3i \, . \, e^{-2ix}$ und $\eta_2 = i \, . \, e^{-2ix}$, und die entsprechenden Werte $g = 0$ oder $k \, . \, g^2 = -2i \, . \, e^{-2ix}$. Es lässt sich nun zeigen, dass man auch das allgemeine Integral aufstellen kann.

5. Der integrierende Faktor der Differentialgleichung (15).

Der Ausdruck $\eta \,.\, d\eta - (\varrho_0 + \varrho_1 \,.\, \eta) \,.\, dx$ kann durch Multiplikation mit einem Faktor M, der von η und x abhängig ist, zu einem vollständigen Differential $d\Phi$ gemacht werden. M genügt der partiellen Differentialgleichung:

$$(18) \quad \eta \,.\, \frac{\partial \log M}{\partial x} + (\varrho_0 + \varrho_1 \,.\, \eta) \,.\, \frac{\partial \log M}{\partial \eta} + \varrho_1 = 0.$$

Es soll hier nur der besondere Fall behandelt werden, dass der Multiplikator ein Ausdruck von der Form $M = (\eta - \omega)^n$ ist, wo ω eine Funktion von x und n eine Konstante ist.

Setzt man die Ableitungen $\frac{\partial \log M}{\partial x} = -\frac{n\omega'}{\eta - \omega}$ und $\frac{\partial \log M}{\partial \eta} = + \frac{n}{\eta - \omega}$ in die Gleichung (18) ein, so findet man:

$$(19) \qquad \eta \,.\, \{(n+1) \,.\, \varrho_1 - n\omega'\} + (n\varrho_0 - \varrho_1 \omega) = 0.$$

Es ist möglich, diese Gleichung durch die Annahme $\omega = n \,.\, \frac{\varrho_0}{\varrho_1}$, $\omega' = \frac{n+1}{n} \,.\, \varrho_1$ zu erfüllen; dann sind aber die beiden Funktionen ϱ_0 und ϱ_1 nicht mehr von einander unabhängig. Differentiiert man nämlich $\omega = \frac{n \,.\, \varrho_0}{\varrho_1}$, so erhält man unter Berücksichtigung von $\omega' = \frac{n+1}{n} \,.\, \varrho_1$ die Bedingung:

$$(20) \qquad \frac{\varrho_1'}{\varrho_1} - \frac{\varrho_0'}{\varrho_0} + \frac{n+1}{n^2} \,.\, \frac{\varrho_1^2}{\varrho_0} = 0.$$

Diese Relation vorausgesetzt, wird der Ausdruck:

$$M \,.\, \{\eta \,.\, d\eta - (\varrho_0 + \varrho_1 \,.\, \eta)\, dx\} = d\Phi$$

ein vollständiges Differential, und das allgemeine Integral heisst:

$$(21)\qquad \left(\eta - n\,.\,\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\right)^{n+1} . \left(\eta + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\right) = c.$$

Man erkennt aus der Form desselben, dass die Funktionen

$$\eta_1 = n\,.\,\frac{\varrho_0}{\varrho_1} \text{ und } \eta_2 = -\frac{n}{n+1} \cdot \frac{\varrho_0}{\varrho_1}$$

partikuläre Integrale sein müssen.

6. Anwendung auf den Fall $\varrho_0 = -6i\,.\,e^{-4ix}$, $\varrho_1 = +8\,.\,e^{-2ix}$

Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung:

$$\frac{\varrho_1'}{\varrho_1} - \frac{\varrho_0'}{\varrho_0} - \frac{3}{16} \cdot \frac{\varrho_1^2}{\varrho_0} = 0$$

besteht. Es gibt daher einen Multiplikator:

$$M = \left(\eta - n \cdot \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\right)^n,$$

wo die Konstante n aus der quadratischen Gleichung $\frac{n+1}{n^2} = -\frac{3}{16}$ berechnet wird. Man findet $n_1 = -4$ und $n_2 = -\frac{4}{3}$.

Legt man der weiteren Rechnung zunächst den Wert $n_1 = -4$ zu Grunde, so erscheint das allgemeine Integral in der Gestalt:

$$(\eta - 3i\,.\,e^{-2ix})^{-3} . (\eta - i\,.\,e^{-2ix}) = c'$$

oder auch:

$$(22)\qquad (\eta - 3i\,.\,e^{-2ix})^3 = c\,.\,(\eta - i\,.\,e^{-2ix}).$$

Die beiden partikulären Integrale heissen:

$$\eta_1 = 3i\,.\,e^{-2ix} \text{ und } \eta_2 = i\,.\,e^{-2ix}.$$

Die Funktion g^2 ist Wurzel der kubischen Gleichung:

$$(23)\qquad k^3.g^6 = c\,.\,(k\,.\,g^2 + 2i\,.\,e^{-2ix}),$$

wo k eine gegebene, c dagegen die Integrationskonstante ist.

Es bleibt noch übrig, den Wert $n_2 = -\frac{4}{3}$ zu untersuchen. Man erhält kein neues Ergebnis, was ja auch zu erwarten war. Es bestehen auch für diesen Wert die Gleichungen (22) und (23).