Sur les domaines fondamentaux des fonctions analytiques au voisinage d'une singularité essentielle.

Par

MILOŠ RADOJČIĆ

1. Les considérations suivantes supposent une division, partielle ou totale, du domaine d'existence d'une fonction analytique en „domaines fondamentaux", de la manière exposée dans mon travail intitulé: „Sur une classe de fonctions analytiques"[1]). On trouve à la fin de ce travail un théorème désigné par 8* et qui comprend l'affirmation suivante:

A. *Le voisinage d'un point singulier essentiel isolé d'une fonction analytique quelconque, autour duquel celle-ci est méromorphe, peut être divisé en domaines fondamentaux de manière que la frontière de chacun d'eux soit continue et qu'ils convergent ensemble vers le point essentiel considéré.*

Supposons pour simplifier les descriptions, que ce point essentiel, et de même toute autre singularité essentielle dont nous aurons à parler, se trouve dans la partie finie du plan.

Rappelons que le voisinage d'un point essentiel isolé, autour duquel la fonction est uniforme, est un domaine ouvert du plan,

---

1) *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. I, 1932. Ce travail est strictement lié à deux de mes travaux antérieurs, parus dans le *Glas de l'Acad. Roy. Serbe* t. 134 (1929) et t. 146 (1931),

dont la frontière est composée de ce point lui-même et d'une ligne fermée simple qui entoure ce point, mais qui ne contient, ni sur elle-même, ni à l'intérieur, aucune autre singularité transcendante ou critique algébrique de la même branche de cette fonction.

Le domaine fondamental représente un domaine dans lequel la fonction est univalente et prend toutes les valeurs du plan imaginaire. Plus exactement, un domaine ouvert est appelé fondamental, s'il a les trois propriétés suivantes:

1. la fonction considérée y prend chaque valeur une fois seulement;

2. elle prend toutes les valeurs du plan imaginaire, soit à l'intérieur, soit sur la frontière de ce domaine, comme une valeur limite;

3. chaque partie de cette frontière est commune à certains domaines extérieurs au domaine considéré.

Quant à la division du voisinage envisagé en domaines fondamentaux, il faut remarquer tout d'abord que le nombre de ces domaines est infini. En effet, s'il était fini, la fonction prendrait autour du point considéré chaque valeur un nombre fini de fois seulement, donc se ne serait pas un point essentiel. Comme j'ai montré, *chaque point essentiel isolé est un point limite isolé de domaines fondamentaux*[2]).

Il peut y avoir, évidemment, un certain nombre de ces domaines, qui n'entrent pas entièrement au voisinage envisagé; mais il résulte de la façon dont cette division fut effectuée, que ce nombre est *fini*. Dans beaucoup de cas nous pourions, en ajoutant à ce voisinage les parties des domaines mentionnés, qui restèrent à l'extérieur, rendre la division, pour ainsi dire, complète. Or, ce n'est pas toujours possible, car il peut arriver que les parties qu'il faudrait ajouter ne soient pas des domaines du plan, ou bien, que les domaines fondamentaux dont il est question ne soient pas en réalité fondamentaux, la condition 2. ne pouvant être satisfaite à cause de certaines autres singularités transcendantes. Nous tiendrons compte de toutes ces circonstances possibles, sans nous laisser déranger par une répé-

---

[2]) Ibid. théorème 3′.

tition inutile des mots et qui compliquerait les énoncés. Ces circonstances exigent seulement, que dans certains cas quelques-uns des „domaines fondamentaux" incomplets soient traités comme s'ils étaient complets. Ainsi, la généralité de nos affirmations ne subira de ce côté aucune restriction.

2. Cependant, nos considérations ne se rapporteront pas seulement aux points essentiels isolés; il s'agira aussi de certaines lignes singulières autour desquelles la fonction est uniforme et méromorphe.

D'après le sens général du mot ligne, c'est un continu linéaire de points, qui est donc, par définition, d'une seule pièce. Pour simplifier nos considérations supposons, qu'après avoir appliqué une représentation conforme, ces lignes singulières soient devenues des lignes continues, par exemple un cercle ou un arc de cercle, suivant le cas.

Puisque la fonction est méromorphe autour de la ligne singulière considérée, il n'existe à son voisinage aucune autre singularité transcendante ou critique algébrique. — Ici le *voisinage* signifie, en premier lieu, un domaine ouvert du plan, dont la frontière est composée de cette ligne elle-même et d'une ligne fermée simple, qui entoure la première de manière qu'aucune autre singularité transcendante ou critique algébrique de la même branche ne se trouve, ni à l'intérieur ni sur la frontière de ce domaine. A supposer, bien entendu, que cette branche soit située à l'extérieur et non à l'intérieur de la ligne singulière considérée. La dernière hypothèse ne présente aucune restriction, puisqu'on peut la satisfaire toujours par une transformation homographique du plan.

Or, nous envisagerons encore une seconde espèce de voisinages. Nous donnerons le même nom à un domaine ouvert du plan, dont la frontière est composée de la ligne singulière considérée, qui relie deux points a et b, et d'une autre ligne simple, qui relie également a et b et qui détermine ainsi un domaine simplement connexe dans lequel n'existe, pas même sur sa frontière, aucune autre singularité transcendante ou critique algébrique de la même branche.

Généralement $a \neq b$; la ligne singulière est alors une ligne ouverte — un arc de cercle. En particulier $a = b$; c'est alors une ligne fermée — un cercle, ou bien, nous voulons permettre cette possibilité, la ligne se réduit à un point et nous avons un point singulier unique, isolé ou non.

Cette seconde espèce de voisinages s'impose par ex. dans la considération des arcs partiels d'une ligne singulière ou d'un seul point singulier qui appartient à une ligne singulière ou à un ensemble quelconque de points singuliers. Comme nous avons dit, un tel voisinage est un domaine ouvert simplement connexe. Les voisinages considérés auparavant, y compris le cas d'un point essentiel isolé, représentent, au contraire, des domaines doublement connexes, dont les frontières intérieures sont des cercles ou des points.

On peut comprendre facilement que nous devons choisir parmis toutes les lignes singulières que nous envisagions, celles qui ont des propriétés semblables à celles d'un point essentiel isolé. Celà veut dire, avant tout, qu'elles soient des *lignes essentielles*. Mais il faut exiger davantage: que le théorème cité au début, valable pour les points essentiels, retient d'une certaine façon sa valeur, pour nos lignes singulières, à savoir:

B. *Le voisinage de chaque ligne singulière que nous allons considérer (et dans lequel la fonction est méromorphe) doit être divisible en domaines fondamentaux de manière que la frontière de chacun d'eux soit continue, que de toute suite infinie de ces domaines on puisse extraire une suite parcielle qui converge vers un point de la ligne singulière considérée et qu'enfin, tous les points de cette ligne soient des tels points limites.*

Evidemment, une telle ligne est essentielle.

L'hypothèse précédente est bien nécessaire. Non seulement parce que la ligne singulière pourrait être ordinaire, mais aussi, d'abord, parce qu'une division en domaines fondamentaux pourrait être impossible; ensuite, parce que les frontières de ces domaines ne sont pas nécessairement continues; enfin, parce que certaines suites de ces domaines pourraient converger vers une ligne, au lieu de converger vers un seul point. La restriction aux fonctions qu'il faudrait nommer d'après le travail cité [3]) *absolument automorphes* suffirait peut-être, mais, jusqu'à

[3]) Ibid. n⁰ 4 et p. 118.

présent, il n'est démontré à ce sujet que ceci: la fonction dont on considère une ligne singulière étant absolument automorphe au voisinage de cette ligne, ce voisinage peut être divisé en domaines fondamentaux de manière, que la frontière de chacun d'eux soit continue, sauf peut-être sur la ligne elle-même; que toute suite infinie de ces domaines s'approche de cette ligne et qu'ainsi une infinité de domaines fondamentaux arrive près de chaque point de cette ligne[4]).

Puisque nous envisageons aussi le cas où la ligne singulière se réduit à un point, qui n'est pas nécessairement une singularité isolée, un énoncé analogue à **B** doit compléter notre base, à savoir:

C. *Le voisinage de chaque point singulier non isolé que nous allons considérer (et dans lequel la fonction est méromorphe) doit être divisible en domaines fondamentaux de manière que la frontière de chacun d'eux soit continue et qu'ils convergent ensemble vers le point considéré.*

Enfin, des remarques analogues à celle qui se trouve à la fin du n⁰ 1 au sujet du point essentiel isolé et qu'on devine facilement, se rattachent aux énoncés **B** et **C**.

3. Soit donc $\zeta = f(z)$ une fonction analytique et soit S n'importe laquelle parmis les singularités que nous venons d'envisager; supposons que $f(z)$ possède une telle singularité S et qu'un certain voisinage D de S soit divisé de la manière voulue en domaines fondamentaux. Soient D_n $(n=1, 2, ..)$ ces domaines, rangés en une suite. Celle-ci est infinie selon nos hypothèses. Il y a quatre cas à distinguer suivant la nature de S et de D. (fig. 1).

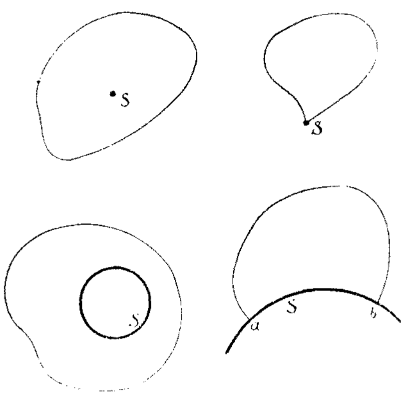

Fig. 1.

Désignons par $z = \varphi(\zeta)$ la fonction inverse de $\zeta = f(z)$, par Δ le domaine de la surface de Riemann de $\varphi(\zeta)$ et qui corres-

---

[4]) Ibid. voir les théorèmes 3—7 du point de vue de la généralisation à la fin du même travail.

pond à D, enfin par Δ_n le feuillet de cette surface, qui correspond à D_n.

4. Dans les propositions qui vont suivre interviennent quelques notions introduites dans le travail cité, mais qui exigent qu'on les définisse un peu plus largement avant de les appliquer à ce que nous entendons maintenant sous S et D.

Dans la disposition des domaines D_n dans D trois cas peuvent se présenter: Ou bien, tous les domaines fondamentaux dans D, sauf au plus un nombre limité d'eux, ont des sommets situés sur S (exemples appartenant aux fonctions „fuchsiennes“; e^z); ou bien, au contraire, ces domaines, sauf au plus un nombre limité d'eux, ne possèdent aucun sommet situé sur S (exemples appartenant aux fonctions „kleiniennes“; $sn\ z$) ou bien encore, une infinité de domaines fondamentaux a de tels sommets et une autre infinité n'en a pas. La *disposition* des domaines D_n dans D sera appelée dans ces trois cas respectivement: de la *première*, de la *seconde* et de la *troisième espèce*. Lorsqu'il n'y aura pas d'équivoque, nous dirons aussi que la *singularité* S est de la première, de la seconde ou de la troisième espèce.

Dans la description de la frontière d'un domaine fondamental interviennent en premier lieu les points du plan dans lesquels se rencontrent plus que deux domaines fondamentaux et, plus généralement, les points qui contienent à leurs voisinages certaines parties d'au moins trois domaines fondamentaux différents. Par analogie aux polygones ordinaires et aux résaux polygonaux, ces points peuvent être appelés les *sommets* du domaine fondamental considéré ou, plus exactement, les sommets du contour envisagé de se domaine. Ce contour devient ainsi un *polygone fondamental*, qui est en général curviligne. Chaque partie d'un tel polygone, limitée par deux sommets consécutifs, devient l'un de ces *côtés* ou, si l'on veut, un côté du domaine fondamental considéré. Chaque paire de côtés consécutifs détermine un *angle* du même polygone ou du domaine fondamental considéré.

Ces notions s'appliquent dans les cas les plus généraux. Le nombre des polygones d'un domaine fondamental ainsi que le nombre des côtés d'un polygone, peuvent varier de un à l'infini. S'il n'y a qu'un seul polygone, le domaine fondamental envisagé remplit son intérieur; s'il y en a plusieurs, ils sont évidemment extérieurs l'un à l'autre, sauf un seul, qui contient tous les autres; si un polygone n'a qu'un côté, il s'agit d'un contour sur lequel il y a au plus un sommet.

Un *sommet* sera nommé *algébrique*, s'il représente un point régulier ou singulier algébrique (un pôle) de $f(z)$; il sera nommé *transcendant*, s'il représente un point singulier transcendant de $f(z)$.

Notons ici que, d'après **B**, un domaine fondamental ne peut avoir tout un côté commun avec une partie de la ligne S que si une infinité de domaines fondamentaux, enfermés dans le premier, s'approche vers tout point de ce côté (fig. 2,2). Ce cas excepté, les sommets transcendants sont les points uniques de la frontière d'un domaine fondamental, situés sur S (fig. 2, 1).

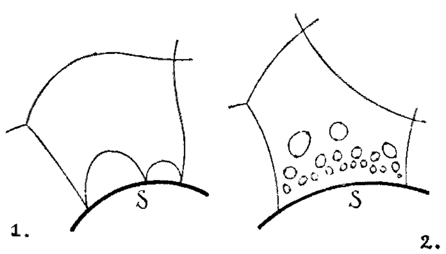

Fig. 2.

Un *angle* sera dit *vide*, si l'on peut relier ses deux côtés (c. à d. les côtés du domaine fondamental, qui renferment cet angle) par un arc simple, qui passe par l'intérieur de ce domaine et qui détermine ainsi, dans cet angle, un domaine qui ne contient pas d'autres contours du domaine fondamental considéré. — Celà a surement lieu quand le nombre des contours contenus dans un angle est nul ou fini; quand ce nombre est infini, le contraire, qui se rapporte à la définition suivante, peut avoir lieu.

Un *angle* sera dit *plein* si, quelque soit l'arc simple qui relie ses deux côtés en passant par l'intérieur du domaine fondamental envisagé, le domaine déterminé ainsi renferme d'autres domaines fondamentaux. — Une infinité de ces domaines renfermés tend alors vers le sommet de l'angle. On voit immédiatement que le sommet d'un angle plein est transcendant; le sommet d'un angle vide peut être transcendant autant qu'algébrique.

Deux angles seront appelés des angles *adjacents*, s'ils ont un côté commun, ou bien, s'ils ont une suite infinie d'arcs communs, qui convergent forcément vers le sommet commun à ces deux angles. Nous dirons que ces angles sont adjacents de la *première* ou de la *seconde façon*, suivant que la première ou la seconde circonstance a lieu (fig. 3). Si deux angles sont adjacents de la seconde façon, il y a évidemment une infinité de domaines fondamentaux enfermés entre les deux et convergeant vers leur sommet, qui appartient alors à S.

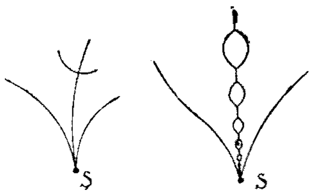

Fig. 3.

5. Nous appellerons un *faisceau d'angles adjacents* ou simplement un *faisceau* chaque ensemble d'angles à un sommet commun et dont les éléments forment une suite ininterrompue d'angles adjacents, pourvu que cet ensemble ne soit pas une partie d'un ensemble plus grand de la même espèce. Si l'on range ces angles dans l'ordre qu'ils occupent autour de leur sommet, le faisceau consiste en une suite simple, finie ou infinie, et nous l'appellerons respectivement un *faisceau fini* ou *infini*. La suite peut avoir un premier et un dernier élément; nous nommerons ces éléments les *angles extrèmes* du faisceau. Evidemment, un faisceau fini a deux angles extrèmes, ou bien, quand ces éléments font un cycle fermé autour du sommet commun, il n'y a aucun angle extrème. Un faisceau infini a un angle extrème ou n'en a aucun et nous dirons suivant ces deux cas qu'il est *unilatéral* ou *bilatéral*.

Un faisceau sera dit *vide*, si ses angles sont vides et s'ils sont adjacents entre eux de la première façon. Dans le cas contraire le faisceau sera dit *plein*.

Si un faisceau est infini ou s'il est plein, son sommet est transcendant; un sommet algébrique appartient à un faisceau vide, fini et sans angles extrèmes. Lorsqu'un faisceau est vide, il est pourtant possible qu'une infinité de domaines fondamentaux, enfermés dans ses différents angles ou entre ceux-ci, converge vers le sommet de ce faisceau. Lorsqu'un faisceau est vide, on voit facilement que l'on peut tracer une courbe simple fermée, qui passe par le sommet du faisceau et traverse chacun de ces angles de la même manière que l'arc mentionné dans la définition de l'angle vide; cette courbe n'enferme entiérement aucun domaine fondamental.

Enfin, les notions de *valeur exceptionnelle*, *de valeur asymptotique* et *du chemin de détermination*, définies ordinairement pour les points essentiels isolés, s'appliquent aussi bien à S et D quelconques.

6. Après avoir fixé toutes ces notions, voici quelques faits résultant plus ou moins immédiatement. En général il s'agira d'angles et de faisceaux dont les sommets appartienent à S.

Si deux angles A_1 et A_2 appartienent au même faisceau, le nombre des angles (du même faisceau) situés entre A_1 et A_2 est fini.

Si le nombre des domaines fondamentaux situés entre deux angles A_1 et A_2 est fini, A_1 et A_2 appartienent au même faisceau. En effet, le côté de A_1 tourné vers A_2 ne peut être commun qu'à un nombre fini d'autres domaines fondamentaux; donc l'un d'eux présente à A_1 un angle adjacent de la première façon; nommons le A'. En répétant le même raisonnement avec A' et A_2 etc., on obtient une suite d'angles $A_1, A', \ldots, A^{(p)}, \ldots$ qui doit être finie, mais qui ne peut finir que si un $A^{(p)}$ est identique à A_2. Or celà signifie que A_1 et A_2 appartienent au même faisceau.

Par conséquent, *si deux angles A_1 et A_2 appartienent à deux faisceaux différents, le nombre des angles situés entre A_1 et A_2 est infini.*

Puisque les frontières des feuillets Δ_n correspondant aux domaines fondamentaux D_n sont continues [5], *si l'on s'approche sur divers chemins situés à l'intérieur d'un D_n, vers un point de sa frontière, $f(z)$ tend sur ces chemins uniformément vers une valeur déterminée.* Par conséquent, *sur les chemins passant par un seul domaine fondamental ou par un nombre limité d'eux et s'approchant de S la fonction $f(z)$ tend uniformément vers une valeur déterminée. Il en résulte que chaque chemin passant par un nombre limité de domaines fondamentaux est un chemin de détermination.*

Si la fonction $f(z)$ tend vers une même valeur asymptotique ω dans deux angles A_1 et A_2, alors, elle tend uniformément vers ω

---

[5]) Ibid. théorème 1.

lorsque z tend vers S dans la partie du plan située entre A_1 et A_2, ou bien, elle s'approche là de toute valeur donnée arbitrairement. En effet, A_1 et A_2 peuvent appartenir à un ou à deux faisceaux. D'après ce que nous venons de dire, dans le premier cas $f(z)$ tend sur les chemins passant par les angles situés entre A_1 et A_2 et dont le nombre est fini, uniformément vers ω; si ces angles sont vides et si, y compris A_1 et A_2, ils sont adjacents de la première façon, les chemins passant par ces angles sont des chemins quelconques situés entre A_1 et A_2: si le contraire a lieu, une infinité des D_n se trouve entre A_1 et A_2, donc f s'approche là de toute valeur. — Dans le second cas également, une infinité des D_n se trouve entre A_1 et A_2 et la même chose a lieu[6]).

Si la fonction $f(z)$ tend vers deuxs valeurs asymptotiques différentes, dans deux angles A_1 et A_2, alors elle s'approche de toute valeur donnée arbitrairement lorsque z tend vers S dans la partie du plan située entre A_1 et A_2. En effet, les valeurs vers lesquelles f tend dans A_1 et A_2 étant différentes, A_1 et A_2 ne peuvent pas appartenir à un seul faisceau, donc nous avons la circonstance qui vient d'être mentionnée et qui conduit à la présente proposition.

7. Comme on voit du premier coup, il y a une correspondance étroite entre les angles ou faisceaux de $f(z)$ et les points de ramification de la fonction inverse $\varphi(\zeta)$. *A un sommet algébrique correspond un point de ramification algébrique d'ordre $\geqslant 3$* (c. à d. où se permutent au moins trois feuillets): *à un sommet transcendant d'un certain angle correspond un point de ramification transcendant. Aux points de la frontière d'un domaine fondamental, autres que les sommets, correspondent des points réguliers de la surface de φ ou des points de ramification algébriques du second ordre*, excepté dans le cas où un côté d'un certain polygone fondamental s'étend sur S (figure 2). Mais alors *une ligne singulière dont les points sont des points de*

---

[6]) Ibid. p. 113. Voir aussi ma note: *Sur une propriété des fonctions analytiques dans la proximité des singularités essentielles* (Bulletin de l'Acad. Roy. Serbe. 1936) où je démontre une proposition plus générale.

ramification transcendants, entourés d'une infinité de points de ramification algébriques, correspond à ce côté[7]).

Considérons d'un peu plus près les faisceaux transcendants. *A tous les angles d'un faisceau transcendant correspond le même point transcendant de $\varphi(\zeta)$.* Nous l'appellerons le *point transcendant correspondant au faisceau* considéré.

Remarquons que, d'après les conditions imposées à la division de D en domaines fondamentaux[8]), à tout point transcendant de φ ne correspond pas nécessairement un faisceau transcendant de f. (Ex.: fig. 4; les feuillets de la surface de φ sont liés ensemble de la manière suivante: Δ_1 et Δ_2 le long du ségment $\alpha_1 \beta_1$, Δ_2 et Δ_3 le long de $\alpha_2 \beta_2$ etc. L'ensemble des D_n consiste alors en une suite d'anneaux renfermant S. Il n'y a donc aucun angle transcendant). Inversement, à un point transcendant de φ peuvent correspondre plusieurs faisceaux transcendants de f. (Ex.: fig. 5, qui montre la disposition des domaines fondamentaux donnant naissance à deux faisceaux transcendants F_1 et F_2. Aux sommets algébriques, qu'on y voit, correspondent des points de ramification du troisième ordre, qui peuvent converger vers un seul point transcendant, commun aux deux faisceaux). Par conséquent, *il peut y avoir des chemins de détermination allant vers S et repassant sans cesse par les angles de deux faisceaux différents.*

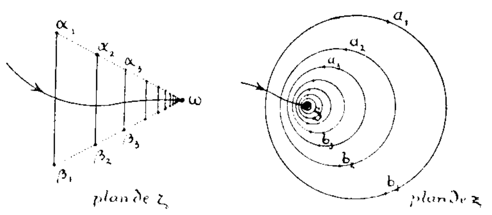

Fig. 4.

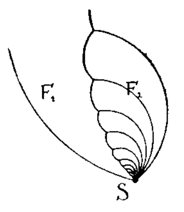

Fig. 5.

Soit F un faisceau transcendant vide, ω la valeur asymptotique correspondant à F; quelque soit un nombre positif ε, il existe

---

[7]) Ces points algébriques sont disposés de façon que cette ligne ne s'oppose pas à la définition des fonctions illimitées (ibid. n° 3).

[8]) Voir [1]).

toujours un domaine dans Δ, *correspondant à un domaine contenu dans le cercle* $|\zeta - \omega| < \varepsilon$ *et qui est limité par une courbe fermée simple, passant par le sommet de* F *et coupant chaque côté de chacun des angles de* F *juste une fois.*

En effet, soient A_1 et A_2 deux angles de F. D'après ce que nous avons dit dans le n° 6, f tend entre A_1 et A_2 uniformément vers ω et celà signifie en termes géométriques qu'un domaine de l'espèce décrite existe en ce qui concerne la région entre A_1 et A_2. Prenons encore deux angles A_1' et A_2' tels que les angles précédents soient situés entre ces deux. Puisque ε reste le même, il est possible que le domaine correspondant de l'espèce considérée aie dans les angles situés entre A_1 et A_2 frontière commune avec le domaine précédent. Prenons de nouveau deux angles etc. De cette façon tout angle de F sera contenu entre les paires d'angles que nous choisissons ainsi. — Il en résulte un domaine dans D, satisfaisant à notre proposition.

8. Voici quelques remarques concernant la nature du point transcendant de Δ, correspondant à un faisceau transcendant.

Le point transcendant de $\varphi(\zeta)$, *correspondant à un angle transcendant plein, est limite de points de ramification algébriques.* En effet, $f(z)$ étant continue sur la frontière d'un domaine fondamental D_p, elle tend vers l'affixe du point transcendant envisagé, lorsque z tend vers le sommet de cet angle sur une suite de contours de D_p contenus dans cet angle. A cette suite de contours correspond une suite de lignes de ramification, qui relient certains points de ramification algébriques (puisque ces contours ne passent pas par S) convergeant vers le point transcendant envisagé. Donc, ce point a la propriété énoncée.

Le point transcendant de $\varphi(\zeta)$, *correspondant à deux angles adjacents de la seconde façon, est limite de points de ramification algébriques dont une infinité a un ordre plus grand que deux.* En effet, nous avons de nouveau une suite infinie de contours, cette fois située entre les deux angles, convergeant vers leurs sommet et sur laquelle $f(z)$ tend (pour la même raison que précédemment) vers ω. A cette suite correspond également une suite de lignes et de points de ramification algébriques d'affixe ω, s'approchant vers le point transcendant envisagé. Or, on voit immédiatement, qu'une infinité de ces points de ramification a un ordre >2 (on peut se rappeller la fig. 3).

Ces deux propositions contienent la suivante:

Le point transcendant de $\varphi(\zeta)$, *correspondant à un faisceau plein, est limite de points de ramification algébriques.*

La réciproque n'est pas vraie. On peut s'imaginer par exemple un faisceau vide, composé d'angles vides, dont les côtés forment une suite infinie d'arcs reliant certains sommets algébriques à S et pourtant à ces sommets peuvent correspondre des points de ramification qui convergent vers le point transcendant ω. Donc, *si un faisceau est vide, le point transcendant peut être pourtant limite de points de ramification algébriques.*

Si un faisceau transcendant n'est pas infini bilatéral, il lui correspond un point transcendant limite de points de ramification algébriques d'ordre supérieur à deux ou limite de points transcendants. En effet, il y a un ou deux angles extrèmes; soit A l'un d'eux. Du côté où A n'a pas d'angle adjacent il est limité par une infinité de domaines fondamentaux différents; par conséquent, sur ce côté de A se trouve une infinité de sommets qui peuvent appartenir à S ou non. Selon ces deux possibilités le point transcendant correspondant au faisceau envisagé est limite de points de ramification transcendants ou algébriques d'ordre $\geqslant 3$. On en conclut:

Si à un point transcendant de $\varphi(\zeta)$, *qui n'est pas limite de points de ramification, correspond un faisceau, celui-ci est infini bilatéral.*

9. Voici enfin quelques affirmations dans lesquelles joue un certain rôle la notion de *l'espèce* du voisinage D (ou de S).

Si D *est de la première espèce, il y a dans* D *une infinité d'angles transcendants.* En effet, puisqu'il y a une infinité de domaines fondamentaux tendant vers S et que le nombre des ceux qui n'atteignent pas jusqu'à S est fini, une infinité atteint à S et celle-ci présente une infinité d'angles transcendants. — *Il y a par conséquent au moins un faisceau transcendant et* Δ *a au moins un point transcendant.* En outre, *si le nombre des faisceaux est fini, il y a au moins un faisceau infini, et si tous les faisceaux sont finis, il y en a une infinité.*

Le nombre des faisceaux transcendants peut être un nombre quelconque. Pour e^z il est égal à deux (les faisceaux y sont représentés par l'ensemble des bandes de périodicité, envisagées séparément des deux côtés de l'axe imaginaire); pour e^{z^n} (n entier) il y a $2n$ faisceaux et pour e^{e^z} il y a une infinité qui, rangée dans l'ordre qu'elle occuppe autour de S (c. à d. $z=\infty$),

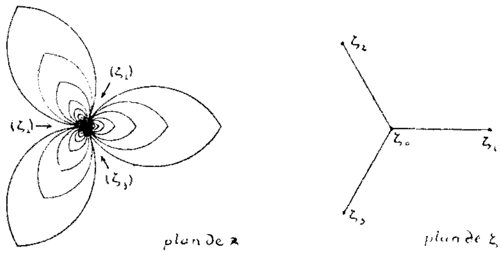

Fig. 6.

montre le type de la suite: ..., −2, −1, 0, 1, 2,... répétée deux fois. Si l'on se contente de la construction d'un mosaïque de domaines fondamentaux ou, ce qui revient presqu' au même, du modèle topologique d'une surface de Riemann (consacrée à φ), on peut inventer des exemples tels qu'on voudra. Ainsi, on peut s'i-

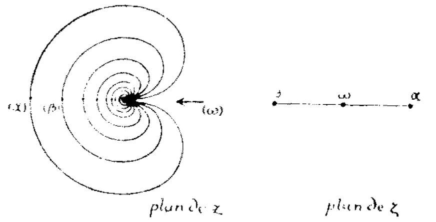

Fig. 7.

maginer des fonctions uniformes pour lesquelles on peut affirmer qu'elles ont un point essentiel unique et n faisceaux transcendants, n étant quelconque, mais >1. — La fig. 6 se rapporte à $n=3$. Alors la surface de φ est divisée en feuillets le long des segments reliant ζ_0 à ζ_1, ζ_2, ζ_3. Si l'on traverse ζ_1, ζ_0, ζ_2 du côté opposé à ζ_3, on entre dans une suite infinie de feuillets tournant autour de ζ_1 et ζ_2; une autre suite se trouve en dépassant $\zeta_2\ \zeta_0\ \zeta_3$ et une autre en dépassant $\zeta_3\ \zeta_0\ \zeta_1$.

La fig. 7 représente un cas où $n=1$. L'enchainement des feuillets Δ_n $(n=1, 2, \ldots)$ a lieu le long de $\alpha\beta$ de la manière suivante: Δ_1 et Δ_2 sont liés le long de $\alpha\omega$, Δ_2 et Δ_3 le long de $\beta\omega$, Δ_3 et Δ_4 le long de $\alpha\omega$ etc., alternativement. Dans tous ces exemples les faisceaux sont infinis bilatéraux. Or, on peut voir facilement qu'il est possible que tous les faisceaux transcendants d'une singularité S de première espèce soient infinis unilatéraux. Il semble encore plus étrange, que les faisceaux d'une singularité S de première espèce (qui, cette fois ci, n'est probablement jamais un point unique) peuvent être tous finis. Cependant, fig. 8 nous éclaire un tel cas: chaque domaine fondamental y présente un seul angle transcendant, qui n'est adjacent à aucun angle.

Ajoutons les remarques suivantes, dont on s'apperçoit immédiatement: d'abord, étant D de la première espèce, *il peut y avoir*

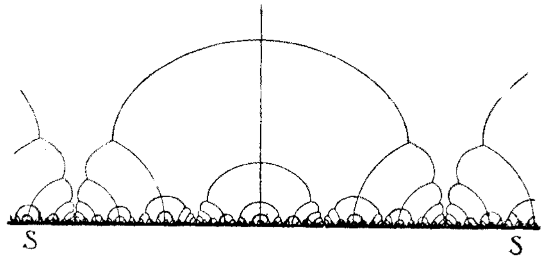

Fig. 8.

dans Δ une infinité de points de ramification algébriques et autant de points transcendants; ensuite, D étant de la première espèce, *tous les angles transcendants et tous les faisceaux transcendants sont vides.*

Si D est de la seconde espèce, il y a dans D une infinité de sommets algébriques, — conséquence immédiate de la présence d'un nombre infini de domaines fondamentaux qui n'atteignent pas jusqu'à S. Donc, il y a dans Δ une infinité de points de ramification algébriques.

Il est intéressant de remarquer que, D étant le voisinage entourant un point ou un cercle essentiel de la seconde espèce, il est possible que tous les points de ramification dans Δ soient algébriques d'un même ordre n, ce nombre étant quelconque. En effet, en supposant que S soit le point à l'infini (si c'était un cercle, les descriptions subiraient une petite altération) pour avoir un exemple où $n=2$, il suffit de tracer une suite infinie de contours, divisant le plan en une suite d'anneaux (fig. 4); sur chaque contour se trouvent deux points de ramification du second ordre. Un exemple où $n=3$ nous est représenté, au moins du point de vue topologique, par le réseau d'héxagones réguliers, recouvrant tout le plan; celui où $n=4$, par un réseau quadratique. Pour établir un équivalent topologique du cas où $n=5$, il suffit d'envisager encore le réseau quadratique et, pour faciliter la description, imaginer qu'il soit tracé dans un plan $u\,O\,v$ et qu'il soit composé des droites $u=$ *nombre entier* et $v=$ *nombre entier*; nous joignons ses sommets, deux à deux, par des arcs simples, qui ont seulement leurs bouts situés sur ce réseau, à savoir: le sommet $x=i$, $y=2k$ au sommet $x=i$, $y=2k+1$ $(i, k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. En multipliant cette espèce d'arcs supplémentaires on peut obtenir la figure topologique pour $n=6, 7$ etc.

Le nombre des sommets transcendants est fini ou infini. Il est réparti toujours parmis un nombre fini de domaines fondamentaux; donc, D étant de la seconde espèce, *si le nombre des sommets transcendants est infini, il y a au moins un domaine fondamental à une infinité de sommets transcendants.*

S'il n'y a dans D qu'un nombre fini de sommets algébriques ou, ce qui est le même, *s'il n'y a dans Δ qu'un nombre fini de points de ramification algébriques, D est de la première espèce; s'il n'y a dans D aucun sommet transcendant ou, s'il n'y a dans Δ aucun point transcendant, D est de la seconde espèce.* Par conséquent, *si D est de la troisième espèce, il y a dans D au moins un sommet transcendant et une infinité de sommets algébriques ou*, ce qui signifie la même chose, *il y a dans Δ au moins un point transcendant et une infinité de points de ramification algébriques.*