Bemerkung zur Note „Über einige Inversionssätze der Limitierungsverfahren".

Von

J. KARAMATA

In der im Titel genannten Note[1]) habe ich gezeigt dass im Satze[2])

Satz **A.** *Sei* $\varphi(0)$ *endlich,* $\varphi(t)$ *stetig und nicht zunehmend in* $(0, \infty)$ *und seien die Integrale*

$$\int_0^c \frac{\varphi(0)-\varphi(t)}{t}\,dt, \qquad \int_c^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \quad \textit{für ein } c>0 \textit{ konvergent.}$$

Sei ferner $s(t)$ *von beschränkter Schwankung im jeden endlichen intervall und das Integral*

$$\Phi(\sigma)=\int_0^\infty \varphi(\sigma t)\,d\{s(t)\} \quad \textit{konvergent für } \sigma>0.$$

Aus

$$\Phi(\sigma)=O(1), \qquad \sigma\to 0,$$

und

$$(1) \quad s(t')-s(t)>-w \quad \textit{für jedes } 0\leq t\leq t'\leq \lambda t \textit{ und ein } \lambda>1$$

folgt dann

$$s(t)=O(1), \qquad t\to\infty.$$

die Bedingung

---

1) Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade, T. III, p. 153-160, (1934).

2) J. Karamata, Über die O-Inversionssätze der Limitierungsverfahren, Math. Zeit. **37**, 582—588 (1933).

$$\int_0^c \frac{\varphi(0)-\varphi(t)}{t}\,dt \quad \textit{konvergiert}$$

wegfallen kann, falls die einseitige Konvergenzbedingung (1) durch die folgende

$$(2) \qquad |s(t')-s(t)| < w \quad \textit{für jedes} \ 0 \leq t \leq t' \leq \lambda t \ \textit{und ein} \ \lambda > 1,$$

ersetzt wird.

Hier möchte ich aber zeigen dass die Bedingung

$$\int_0^c \frac{\varphi(0)-\varphi(t)}{t}\,dt \quad \textit{konvergiert}$$

sogar im Satze A überflüssig ist, was unmittelbar aus dem folgenden Hilfsatz hervorgeht.

Hilfsatz. *Ist* $\varphi(0)$ *endlich,* $\varphi(t)$ *stetig und nicht zunehmend in* $(0, \infty)$, $s(t)$ *von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervalle und das Integral*

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(\sigma t)\, d\{s(t)\} \quad \textit{konvergent für} \ \sigma > 0;$$

dann folgt aus

$$(3) \qquad |\Phi(\sigma)| < M, \quad \textit{für} \ \sigma > 0,$$

und

$$(1) \quad s(t')-s(t) > -w \quad \textit{für jedes} \ 0 \leq t \leq t' \leq \lambda t \ \textit{und ein} \ \lambda > 1,$$

dass

$$(4) \qquad -w < s(t')-s(t) < w + \frac{2M + w\,\varphi(0)}{\varphi(a)-\varphi(b)} \quad \textit{für} \ 0 \leq t \leq t' \leq \frac{a\lambda}{b}\,t,$$

wo a *und* b *so gewählt sind dass*

$$\varphi(a)-\varphi(b) > 0 \quad \textit{und} \ 1 < b/a < \lambda \ \textit{wird.}$$

Beweis. Aus der Konvergenz des Integrals $\Phi(\sigma)$ und den Voraussetzungen des Hilfsatzes folgt, falls ohne Einschränkung $s(0) = 0$ gesetzt wird, dass

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(\sigma t)\, d\{s(t)\} = -\int_0^\infty s(t)\, d\{\varphi(\sigma t)\} =$$
$$= -\int_0^\infty s(t/\sigma)\, d\{\varphi(t)\}$$

ist. Wird im letzten Integral einerseits $1/\sigma = x'/a$ und anderseits $1/\sigma = x/b$ gesetzt, so ergibt sich durch Sustraktion und Beachtung von (3)

$$2M > -\int_0^\infty \{s(tx'/a) - s(tx/b)\}\, d\{\varphi(t)\} =$$
$$> -\int_0^\infty \{s(tx'/a) - s(tx/b) + w\}\, d\{\varphi(t)\} - w\,\varphi(0).$$

Wird hier x' so gewählt dass $x \leqslant x' \leqslant \frac{a}{b}\lambda x$ sei, so wird wegen (1)

$$2M > -\int_a^b \{s(tx'/a) - s(tx/b) + w\}\, d\{\varphi(t)\} - w\,\varphi(0);$$

für $a \leqslant t \leqslant b$ ist aber nach (1)

$$s(tx'/a) > s(x') - w$$

und

$$-s(tx/b) > -s(x) - w$$

dass heisst

$$s(tx'/a) - s(tx/b) + w > s(x') - s(x) - w,$$

so dass

$$2M > \{s(x') - s(x) - w\}\{\varphi(a) - \varphi(b)\} - w\,\varphi(0),$$

ist, und woraus indem x durch t ersetzt wird, die Behauptung (4) folgt.

Man könnte noch zu diesen Sätzen bemerken dass die Vor aussetztung der Endlichkeit von $\varphi(0)$ unentberlich ist, wie dies aus dem Beispiele

$$\varphi(t) = t^{-1/2} \quad \text{und} \quad s(t) = \log(1+t) + \frac{2}{1+t}$$

hervorgeht, da

$$\int_0^\infty t^{-1/2} d\left\{\log(1+t) + \frac{2}{1+t}\right\} = 0 \text{ ist.}$$

Der so erweiterte Satz A ergibt nun durch bekante Überlegungen[2]) die bisher allgemeinste Fassung des Wienerschen Satzes:

Satz B. *Sei* $\varphi(0)=1$, $\varphi(t)$ *stetig und nicht zunehmend in* $(0, \infty)$; *konvergiere das Integral*

$$\int_c^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt \quad \text{für ein } c>0,$$

und sei ferner

$$\int_0^\infty t^{ui} d\{\varphi(t)\} \neq 0 \quad \text{für jedes reelle } u.$$

Sei weiter $s(t)$ *von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall und konvergiere das Intergral*

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(\sigma t) \; \{s(t)\} \quad \text{für } \sigma > 0.$$

Aus

$$\Phi(\sigma) \to s, \qquad \sigma \to 0$$

und

$$\lim_{t=\infty} \inf \operatorname*{Min}_{t \leq t' \leq \lambda t} \{s(t') - s(t)\} > -w(\lambda) \to 0, \quad 1 < \lambda \to 1,$$

folgt dann

$$s(t) \to s, \qquad t \to \infty.$$

Es wäre noch näher zu prüfen in wie weit die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

bei diesen Sätzen erforderlich ist.

Beograd, 1 Dezembar 1935.