Théorème sur l'équation de Riccati.

Par

MICHEL PETROVITCH.

1. L'équation de Riccati la plus générale

$$y' + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0, \tag{1}$$

où φ_1, φ_2, φ_3 sont fonctions données de la variable indépendante x, se ramène par le changement

$$\begin{aligned} y &= z - \frac{\varphi_2}{2\varphi_1} \\ t &= \int \varphi_1 \, dx \end{aligned} \tag{2}$$

à une équation de la forme

$$y' = y^2 + f(x). \tag{3}$$

Nous allons, relativement à l'équation (3), démontrer le théorème suivant:

Etant donnée une équation (3) *intégrable, on peut lui rattacher une suite indéfinie de fonctions de* **x**

$$(4) \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

telle que toute équation

$$(5) \qquad y' = y^2 + (f + \lambda_k)$$

soit également intégrable, et cela sans aucune quadrature supplémentaire.

A cet effet, considérons la suite indéfinie

$$(6) \qquad X_0, X_1, X_2, \cdots$$

de fonctions de x formées d'après la loi de reccurence

$$(7) \qquad X_n = X_{n-1} + \frac{3}{4}\left(\frac{X'_{n-1}}{X_{n-1}}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{X''_{n-1}}{X_{n-1}}$$

avec X_0 arbitraire. En tenant compte de ce que

$$(8) \qquad \frac{X''}{X} = \left(\frac{X'}{X}\right)' + \left(\frac{X'}{X}\right)^2$$

la relation (7) peut aussi s'écrire sous la forme

$$(9) \qquad X_n = X_{n-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{d}{dx}\log X_{n-1}\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\log X_{n-1}\,.$$

Au moyen des fonctions X_n, ainsi définies, formons la suite indéfinie de fonctions (4), d'après la loi de reccurence

$$(10) \qquad \lambda_n = X_n - X_{n-1}.$$

Je dis qu'en prenant pour X_0 la fonction $f(x)$ figurant dans l'équation (3), cette équation jouira de la propriété énoncée. Pour le faire voir, effectuons sur l'équation (3) le changement

$$y = \frac{d}{dx} \log\left(\int e^{\int y_1 dx} \sqrt{f}\, dx\right), \tag{11}$$

y_1 étant la nouvelle fonction inconnue. Le changement est équivalent à trois changements successifs

$$y = \frac{u'}{u} \tag{12}$$

$$u = \int v\sqrt{f}\, dx \tag{13}$$

$$v = e^{\int y_1 dx}. \tag{14}$$

Le premier (12) transforme l'équation (3) en

$$u'' = fu. \tag{15}$$

Le deuxième (13) transforme (15) en

$$v'' = \varphi v, \tag{16}$$

où

$$\varphi = f + \frac{3}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{f''}{f}. \tag{17}$$

En effet, en différentiant (15), en y remplaçant ensuite u par sa valeur

$$u = \frac{u''}{f}$$

tirée de (15) et effectuant le changement $u'=z$, l'équation devient

$$z'' - \frac{f'}{f} z' - fz = 0; \tag{18}$$

cette dernière équation par le changement

$$z = v\sqrt{f}$$

devient (16).

Enfin le changement (14) transforme l'équation (16) en

$$y_1' = y_1^2 + \varphi, \tag{19}$$

où φ a pour l'expression (17).

Donc, le changement (11) transforme l'équation (3) en (19).

Prenons maintenant pour le premier terme de la suite (6) la fonction

$$X_0 = f.$$

D'après l'expression (17) de φ et l'équation (7) on voit que

$$\varphi = X_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{X_0'}{X_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{X_0''}{X_0} = X_1 \tag{20}$$

de sorte que la transformée (19) devient

$$y_1' = y_1^2 + X_1. \tag{21}$$

Or, y_1 s'exprime au moyen de y par la formule (11) qui donne

$$y_1 = y + \frac{d}{dx} \log \frac{y}{\sqrt{f}}. \tag{22}$$

Si, en partant de (21) on effectue le changement

$$y_1 = \frac{d}{dx} \log \left(\int e^{\int y_2 \, dx} \sqrt{X_1} dx \right), \tag{23}$$

y_2 étant la nouvelle fonction inconnue, l'équation (21) se transformera en

$$y_2' = y_2^2 + X_2 \tag{24}$$

dont l'intégrale s'exprime au moyen de y_1 par la formule

$$y_2 = y_1 + \frac{d}{dx} \log \frac{y_1}{\sqrt{X_1}}. \tag{25}$$

En continuant ainsi, on arrive à une suite indéfinie d'équations

$$\begin{gathered} y = y_k^2 + X_k \\ y_0 = y, \qquad X_0 = f(x), \\ k = 0, 1, 2, \cdots \end{gathered} \tag{26}$$

jouissant de la propriété suivante: *l'intégrale y_k de* (26) *s'exprime au moyen de l'intégrale y_{k-1} de l'équation*

$$y'_{k-1} = y^2_{k-1} + X_{k-1} \tag{27}$$

par la relation

$$y_k = y_{k-1} + \frac{d}{dx} \log \frac{y_{k-1}}{\sqrt{X_{k-1}}}. \tag{28}$$

Or, si l'on pose

$$(29) \qquad \frac{3}{4}\left(\frac{X_n'}{X_n}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{X_n''}{X_n} = \mu_n,$$

ou bien encore

$$(30) \qquad \mu_n = \frac{1}{4}\left[\frac{d}{dx}\log X_n\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\log X_n$$

on aura la suite d'équations

$$(31) \qquad \begin{aligned} X_k &= X_{k-1} + \mu_{k-1}, \\ X_{k-1} &= X_{k-2} + \mu_{k-2}, \\ X_{k-2} &= X_{k-3} + \mu_{k-3}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ X_1 &= X_0 + \mu_0 = f + \mu_0 \end{aligned}$$

et en les ajoutant membre à membre, on trouve

$$(32) \qquad X_k = f + \lambda_k$$

où

$$(33) \qquad \lambda_k = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{k-1}.$$

Donc, la fonction λ_k du théorème énoncé s'exprime par la formule

$$(34) \qquad \begin{aligned} \lambda_k = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{X_0'}{X_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{k-1}'}{X_{k-1}}\right)^2\right] - \\ - \frac{1}{2}\left[\frac{X_0''}{X_0} + \cdots + \frac{X_{k-1}''}{X_{k-1}}\right], \end{aligned}$$

ou bien encore

$$
(35)\qquad \begin{aligned}\lambda_k = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{d}{dx}\log X_0\right)^2 + \cdots + \left(\frac{d}{dx}\log X_{k-1}\right)^2\right] - \\ - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\log\left(X_0 X_1 \cdots X_{k-1}\right),\end{aligned}
$$

où les fonctions X_k sont définies par la formule de reccurence

$$
(36)\qquad X_k = X_{k-1} + \frac{3}{4}\left(\frac{X'_{k-1}}{X_{k-1}}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{X''_{k-1}}{X_{k-1}}.
$$

Les fonctions λ_k de la suite (4), *rattachées à l'équation de Riccati* (3), *se déterminent donc au moyen de $f(x)$ par des opérations algébriques et les quadratures.*

L'intégrale de l'équation

$$
(37)\qquad y'_k = y_k^2 + X_k
$$

se calcule de proche en proche par la suite de formules

$$
(38)\qquad \begin{aligned} y_1 &= y + \frac{d}{dx}\log\frac{y}{\sqrt{f}}, \\ y_2 &= y_1 + \frac{d}{dx}\log\frac{y_1}{\sqrt{X_1}}, \\ y_3 &= y_2 + \frac{d}{dx}\log\frac{y_2}{\sqrt{X_2}}, \\ & \cdots\cdots\cdots \end{aligned}
$$

y étant l'intégrale de l'équation

$$
(40)\qquad y' = y^2 + f(x).
$$

Ce calcul, à partir de y, n'exige que des opérations algébriques et les différentiations, ce qui démontre le théorème énoncé.

I Exemple: pour l'équation

$$y' = y^2 + ax \tag{41}$$

on trouve

$$\lambda_1 = \frac{3}{4x^2},$$

et comme (41) s'intègre par des fonctions de Bessel, il en sera de même de l'équation

$$y' = y^2 + ax + \frac{3}{4x^2}. \tag{42}$$

II Exemple: pour l'équation

$$y' = y^2 + ax^m \tag{43}$$

on trouve

$$\lambda_1 = \frac{3mx + 2m(m-1)}{4x^2}.$$

Or, l'équation (43) s'intègre par des fonctions élémentaires toutes les fois que le nombre m est de la forme

$$m = \frac{-4k}{1+2k} \qquad (k = \text{entier positif})$$

Il en sera donc de même pour l'équation

$$(44) \qquad y' = y^2 + ax^m + \frac{3mx + 2m(m-1)}{4x^2}.$$

2. Le théorème précédent se rattache au problème suivant: *Etant donnée une équation de Riccati intégrable*

$$(45) \qquad y' = y^2 + f(x)$$

en déduire d'autres en nombre illimité, également intégrables.

Le problème admet encore d'autres solutions, différentes de celle exposée dans ce qui précède. Nous en indiquerons une fondée sur une proposition de Darboux[1]) sur les équations linéaires binomes du second ordre. Soit

$$(46) \qquad z'' = [\varphi(x) + a]\, z$$

une équation intégrable pour une valeur particulière de la constante a, ayant

$$z = v(x)$$

comme une intégrale particulière. Soit ensuite

$$u = w(x, C_1, C_2)$$

l'intégrale générale de l'équation

$$(47) \qquad u'' = [\varphi(x) + b]\, u,$$

[1]) G. Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces, II partie, 1899, p. 196.

où b est une valeur constante différente de a. La proposition de Darboux consiste en ceci:

L'intégrale générale de l'équation

$$(48) \qquad y'' = \left[v\left(\frac{1}{v}\right)'' + b - a \right] y$$

est

$$(49) \qquad y = w' - w \frac{v'}{v} \cdot$$

La proposition permet de rattacher à toute équation (45), intégrable pour toute valeur de a, une suite illimitée d'équations linéaires binomes du second ordre qui seront également intégrables pour toute valeur de a. Les équations succesives s'éloigneront de plus en plus de la forme initiale et deviendront de plus en plus compliquées Il y a cependant de cas exceptionnels dans lesquels la forme de l'équation se conserve lorsqu'on choisit convenablement les intégrales particulières $v(x)$ au moyen desquelles s'effectue le passage de chaque équation à la suivante.

Ainsi, si l'on prend comme équation initiale

$$(50) \qquad z'' = az \,,$$

celle-ci admet comme intégrale particulière (pour la valeur particulière $a=0$)

$$z = v(x) = x$$

conduisant à l'équation (48) de la forme

$$(51) \qquad y'' = \left(\frac{1 \,.\, 2}{x^2} + h \right) y \qquad\qquad (h = b - a)$$

intégrable pour toute valeur de h. Par exemple, pour $h=1$ son intégrale générale est

$$y=C_1 e^x\left(1-\frac{1}{x}\right)+C_2 e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

L'équation (51), à son tour, a pour $h=0$ comme intégrale particulière

$$y=v(x)=x^2$$

ce qui conduit à l'équation intégrable

$$y''=\left(\frac{2.3}{x^2}+h\right)y$$

laquelle, par exemple pour $h=1$, a comme intégrale générale

$$y=C_1 e^x\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)+C_2 e^{-x}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right).$$

En continuant ainsi on arrive à l'équation intégrable

$$y''=\left[\frac{m(m-1)}{x^2}+h\right]y,$$

où m est un entier positif quelconque.

La proposition s'applique manifestement à l'équation de Riccati

$$y'=y^2+[\varphi(x)+a] \tag{52}$$

laquelle, par le changement

$$y = \frac{z'}{z}$$

se ramène à l'équation (46).

En partant d'une équation (52) intégrable, on peut en déduire une infinité d'autres également intégrables, par la simple itération du procédé ci-dessus indiqué.