Contribution à l'étude de la solution asymptotique d'une équation différentielle du premier ordre.

Par

TADYA PEYOVITCH

1. Soit donnée une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = a_0 + kx + a_n x^n$$

où a_0 est une fonction continue et bornée de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, k une constante réelle différente de zéro et a_n une fonction continue et bornée de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, satisfaisant à la condition

$$(2) \qquad |a_n| \leqq B, \text{ pour } t \geqslant t_0 \geqslant 0,$$

où B est un nombre positif et fixe; n étant un nombre entier positif supérieur à 1.

Dans cet article nous allons montrer, par la méthode d'approximations successives, que l'équation (1) admet, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, une solution bornée[1]).

---

[1]) Dans un article intitulé: *Sur la solution asymptotique d'une équation différentielle du premier ordre (Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade, t. III, 1934)*, j'ai supposé que la fonction a_n tend vers zéro, pour $t = \infty$.

2. Ecrivons l'équation (1) sous la forme de l'équation intégrale suivante

$$x = Ce^{kt} + e^{kt}\int_{t_0}^{t} e^{-kt}\, a_0(t)\, dt + e^{kt}\int_{t_0}^{t} e^{-kt}\, a_n(t)\, x^n(t)\, dt$$

ou

$$x = x_0 + e^{kt}\int_{t_0}^{t} e^{-kt}\, a_n(t)\, x^n(t)\, dt,$$

x_0 étant la solution de l'équation

$$\frac{dx_0}{dt} = a_0 + kx_0. \tag{3}$$

Soit, pour $t \geqq t_0 \geqq 0$, x_0 une solution bornée de l'équation (3). En partant de la solution x_0 on peut former la suite des fonctions bornées

$$x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m,\, \ldots \tag{4}$$

représentant les solutions successives de l'équation

$$x_m = x_0 + e^{kt}\int_{t_0}^{t} e^{-kt}\, a_n(t)\, x^n_{m-1}(t)\, dt \tag{5}$$

pour la valeur $m = 1, 2, \ldots$, d'où l'on a

$$x_m - x_{m-1} = e^{kt}\int_{t_0}^{t} e^{-kt}\, a_n(t)\, |\, x^n_{m-1}(t) - x^n_{m-2}(t)\, |\, dt. \tag{6}$$

Soit A un nombre positif et fixe verifiant les deux conditions suivantes:

1⁰

$$|\, x_0^n \,| \leq A, \tag{7}$$

pour la variable réelle $t > t_0 \geqq 0$, x_0 étant la solution bornée de l'équation (3);

2⁰

(8) $$| x_i^n - x_{i-1}^{n-1} | \leq A | x_i - x_{i-1} | ,$$

x_i et x_{i-1} étant les valeurs finies quelconques de la suite (4), pour la variable réelle $t \geqq t_0 \geqq 0$.

Les différences successives, données par l'équation (6), deviennent, d'après (2) et (8),

(9) $$| x_m - x_{m-1} | \leq AB\, e^{kt} \int_{t_0}^{t} e^{-kt} | x_{m-1} - x_{m-2} | \, dt$$

où l'on a $t_0 = \infty$ pour $k > 0$.

Considérons les solutions successives x_m $(m = 1, 2, \ldots)$.

Pour $m=1$, l'équation (5) donne, d'après (2) et (7),

(10) $$| x_1 - x_0 | \leq AB\, e^{kt} \int_{t_0}^{t} e^{-kt} \, dt \leq \frac{AB}{|k|}\ ^{1)}.$$

Pour $m=2$, l'inégalité (9) donne, d'après (10),

$$| x_2 - x_1 | \leq \frac{A^2 B^2}{| k |^2} .$$

En continuant ainsi on aura, pour $t \geqq t_0 \geqq 0$,

$$| x_m - x_{m-1} | < \frac{A^m B^m}{| k |^m} .$$

---

1) $$e^{kt} \int_{t_0}^{t} e^{-kt} \, dt = \frac{1}{k} \left(e^{k(t-t_0)} - 1 \right) \leq \frac{1}{|k|} , \quad \text{pour} \quad t \geqq t_0 \geqq 0 ;$$

pour $k > 0$, $t_0 = \infty$.

Si la constante B satisfait à la condition

$$(11) \qquad \frac{AB}{|k|} < 1, \qquad B < \frac{|k|}{A},$$

a série

$$x = x_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (x_m - x_{m-1})$$

converge uniformément, pour $t > t_0 > 0$, et représente la solution bornée de l'équation (1).

Par conséquent, on aura le théorème suivant:

Soit, pour $t \geq t_0 \geq 0$, x_0 une solution bournée de l'équation (3); sous l'hypothèse que l'on ait

$$|a_n| \leq B < \frac{|k|}{A}, \text{ pour } t > t_0 > 0,$$

où A est un nombre positif et fixe vérifiant les condition (7) et (8) l'équation (1) admet une solution bornée pour $t > t_0 > 0$. Si l'on a $k < 0$, cette solution dépend d'une constante arbitraire.

Remarque. — L'hypothèse introduite que k est un nombre réel différent de zéro ne restreint point la généralité du théorème démontré, car l'équation

$$\frac{dx}{dt} = a_0 + a_1 x + a_n x^n,$$

où a_i sont des fonctions de t, peut-être ramenée à l'équation 1) par la transformation

$$x = y\, x(t),$$

$u(t)$ étant une fonction convenablement choisie.

3. Considérons maintenant l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = f(t). \tag{12}$$

Si l'on pose

$$x = \lambda e^{\int \frac{dt}{y}}, \tag{13}$$

où λ est une constante arbitraire, l'équation (12) devient

$$\lambda^2 e^{2\int \frac{dt}{y}} \frac{y^2}{1+y^2} = f(t).$$

L'élimination de constante λ entre l'équation ci-dessus et l'équation dérivée par rapport à t, on obtient[1])

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{f'}{2f} y + y^2 - \frac{f'}{2f} y^3. \tag{13'}$$

Posons enfin

$$y = u(t)\, z + v(t) \tag{14}$$

où

$$u(t) = e^{\int \left(\frac{4f^2 - 3f'^2}{6ff'} - k \right) dt}, \qquad v(t) = \frac{2f}{3f'} \tag{15}$$

l'équation (13') devient

$$\frac{dz}{dt} = a_0 + kz + a_3 z^3, \tag{16}$$

---

[1]) Voir la thèse de doctorat de T. Peyovitch (Glas srpske kraljevske Akademije, t. 109 (1923), Beograd).

c'est-à-dire on obtient l'équation de la forme (1) avec

$$
(16') \quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{8f^2+18ff''}{27f'^2}\, e^{-\int\left(\frac{4f^2-3f'^2}{6ff'}-k\right)dt}, \\[2ex] a_3 = -\dfrac{f'}{2f}\, e^{2\int\left(\frac{4f^2-3f'^2}{6ff'}-k\right)dt} \end{cases}
$$

k une constante réelle différente de zéro.

Si l'on prend la dérivée de l'équation (13) par rapport à t, on obtient

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{y}\,,$$

d'où l'on a, en vertu de l'équation (12),

$$(12') \qquad x = \pm \frac{y\sqrt{f(t)}}{\sqrt{1+y^2}}$$

ou, d'après (14),

$$(17) \qquad x = \frac{\pm (uz+v)\sqrt{f(t)}}{\sqrt{1+(uz+v)^2}}\,.$$

Par conséquent, la solution de l'équation (12) est donnée par la formule (17) où z est une solution de l'équation (16), $u(t)$ et $v(t)$ sont des fonctions données par les formules (15). L'étude de solution de l'équation (16) entraine l'étude de solution de l'équation (12).

La fonction $f(t)$ peut-être choisie de la manière que l'équation (16) et par suite l'équation (12) admet une solution bornée pour $t > t_0 \geqslant 0$.

Choisissons, par exemple, la fonction $f(t)$ de la façon que la fonction $u(t)$, étant continue pour $t > t_0 > 0$, satisfait à la condition

$$\lim u(t) = e^a$$

a étant un nombre fixe. Il s'ensuit, d'après (15),

$$(18) \qquad \int \left(\frac{4f^2 - 3f'^2}{6ff'} - k \right) dt = a + \varepsilon(t)$$

où $\varepsilon(t)$ est une fonction continue tendant vers zéro pour $t = \infty$ Les dérivées $\varepsilon'(t)$, $\varepsilon''(t)$ sont supposées continues et tendent vers zéro.

Il résulte de l'équation (18)

$$(18') \qquad f(t) = e^{-\int \left[k + \varepsilon' \mp \sqrt{(k + \varepsilon')^2 + \frac{4}{3}} \right] dt} \text{ [1]},$$

c'est-à-dire la fonction $f(t)$, sous l'hypothèse que l'intégrale

$$(19) \qquad \int_{t_0}^{t} \left[k + \varepsilon' \mp \sqrt{(k + \varepsilon')^2 + \frac{4}{3}} \right] dt$$

soit convergente ou tend vers $+\infty$ pour $t = \infty$, est continue pour $t > t_0 > 0$ et tend vers une limite finie.

La fonction $v(t)$ et les coefficients de l'équation (16) donnés par les formules (16') sont, d'après (18'), continues et tendent vers des limites finies.

Dans ce cas *la solution bornée de l'équation (16) entraine, d'après (17), la solution bornée de l'équation (12).*

Il peut arriver que l'equation (13') sous l'hypothèse que la fonction $f(t)$ est bornée pour $t > t_0 > 0$, n'admet pas la solution bornée, tandis que la solution de l'équation (12) est bornée pour $t > t_0 > 0$. Cela résulte immédiatement de la formule (12')

Par exemple, la solution

$$x = \pm \sqrt{a} \sin(t + C)$$

[1]) On peut prendre un signe devant le radical.

de l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = a \qquad (a = \text{const.})$$

est bornée pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, tandis que la solution

$$y = tg\,(t + c)$$

de l'équation correspondant à l'équation (13')

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2$$

n'est pas bornée pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$.