# Sur certaines trajectoires des courbes algébriques planes de genre zéro, un et deux.

Par

DRAGOSLAV MITRINOVITCH

I. — Envisageons une famille des courbes planes

$$F(x, y, \lambda) = 0, \tag{1}$$

où $\lambda$ est un paramètre variable. Cette équation peut être mise, à l'infinité de manières, sous la forme paramétrique

$$\begin{aligned} x &= f(\lambda, t), \\ y &= \varphi(\lambda, t), \end{aligned} \tag{2}$$

où $t$ est un paramètre variable.

*Nous montrerons, dans le présent article, que le problème général de la détermination des trajectoires coupant chacune des courbes* (1) *sous un angle* $v$, *où* $v$ *représente une fonction donnée de* $\lambda$, *se réduit à l'intégration d'une équation différentielle algébrique du premier ordre et*

1° *du premier degré, si la courbe considérée* (1) *est unicursale:*

2° *du second degré, si la courbe considérée* (1) *est de genre un ou deux,*

II. — Sur une courbe (2), qui correspond à une valeur déterminée de $\lambda$, on a

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial f}{\partial t} dt, \\
dy &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Dans le cas, où les variables $\lambda$ et $t$ sont indépendantes entre elles, le point $M$, dont les coordonnées sont

$$x = f(\lambda, t), \quad y = \varphi(\lambda, t),$$

représente un point du plan $xoy$ qui décrit un ou plusieurs domaines du plan $xoy$. Si l'on établit une relation entre $\lambda$ et $t$ le point $M(x,y)$ décrira une courbe $T$. Nous allons choisir cette relation entre $\lambda$ et $t$ de telle sorte que la courbe $T$ coupe chacune des courbes (2) sous l'angle $v(\lambda)$.

Sur une courbe $T$, c'est-à-dire sur une trajectoire dont ill s'agit ici, on aura

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda, \\
dy &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \gamma p.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

En vertu des formules (3) et (4) l'équation différentielle du problème proposé est

$$tg\, v = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda\right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} d\lambda\right) \frac{\partial f}{\partial t}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda\right) \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} d\lambda\right) \frac{\partial \varphi}{\partial t}},$$

ou bien

$$(5)\quad \frac{dt}{d\lambda}=\frac{\operatorname{cotg}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)-\frac{\partial f}{\partial\lambda}\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2}.$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle

$$\Phi(\lambda, t, c)=0,$$

où $c$ est la constante arbitraire d'intégration, représente la relation cherchée liant les deux variables $\lambda$ et $t$.

Par conséquent, *si l'on joint une relation*

$$\Phi(\lambda, t, c)=0,$$

*fournie par l'équation différentielle* (5), *aux relations*

$$x=f(\lambda, t),$$
$$y=\varphi(\lambda, t),$$

*on obtient les trajectoires cherchées des courbes* (2).

Dans le cas des trajectoires orthogonales, l'équation différentielle (5) prend la forme suivante

$$\frac{dt}{d\lambda}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial\lambda}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2},$$

car alors on a

$$\operatorname{cotg}\nu=0.$$

III. — Si maintenant il s'agit d'une courbe *unicursale*, les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}, \ \frac{\partial f}{\partial t}, \ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}, \ \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

sont des fonctions rationnelles du paramètre $\lambda$.

*L'équation différentielle* (5), *dans ce cas, représente une équation différentielle de la forme*

$$\frac{dt}{d\lambda} = R(\lambda, t), \tag{6}$$

*où $R$ désigne une fonction rationnelle en $t$, et c'est ce qu'il fallait montrer.*

La solution complète du problème posé ne dépend donc que de l'intégration d'une équation différentielle de la forme (6). Cette équation, qui joue un rôle important dans plusieurs problèmes généraux de la Géométrie, a donné lieu aux nombreuses recherches. Dans le cas général on ne peut pas l'intégrer par des quadratures, mais elle est intégrable pour des formes particulières de la fonction $R$.

La liaison intime, établie plus haut, entre l'équation différentielle (6) et le problème des trajectoires proposées, permet de résoudre celui-ci pour des courbes unicursales particulières

*Premier exemple.* Considérons une famille des lignes droites

$$y = ax + b, \tag{7}$$

$a$ et $b$ étant des fonctions données d'un paramètre variable $\lambda$. Cette équation peut être mise sous la forme paramétrique

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= at + b. \end{aligned} \tag{8}$$

L'équation differentielle (5), en ce cas, devient

$$\frac{dt}{d\lambda} + \frac{\operatorname{cotg} v + a}{1 + a^2} (a't + b') = 0$$

et représente une équation linéaire dont l'intégrale générale est

$$(9)\quad t = e^{\int \frac{a'(\cotg v + a)}{1+a^2} d\lambda} \left[ c - \int e^{\int \frac{a'(\cotg v + a)}{1+a^2} d\lambda} \cdot \frac{b'(\cotg v + a)}{1+a^2} d\lambda \right],$$

où $c$ présente une constante arbitraire d'intégration.

Par suite, *les trajectoires coupant chacune des droites* (7) *à l'angle* $v$ *sont fournies par les formules* (8), *où il faut substituer* $t$ *par l'expression* (9). Ainsi les trajectoires seront définies par relations de la forme

$$(10)\qquad \begin{aligned} x &= \Theta_1(\lambda, c), \\ y &= \Theta_2(\lambda, c), \end{aligned}$$

qui donnent pour les différentes valeurs de $c$ des trajectoires différentes.

On peut aussi rattacher au même ordre d'idées une remarque sur les développantes d'une courbe plane. *La développante d'une courbe pouvant être considérée comme une trajectoire orthogonale de ses tangentes, il résulte, d'après ce qui précède, qu'on peut complètement déterminer les développantes de chaque courbe de la manière suivante*: soit

$$y = \varphi(x)$$

l'équation d'une courbe plane donnée. A un point $M(x_0, y_0)$ de la courbe envisagée on mène la tangente dont l'équation est

$$y - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0);$$

cette équation peut se mettre sous la forme

$$x = t,$$
$$y = \psi'(x_0)\,t + \psi(x_0) - x_0\,\psi'(x_0);$$

par conséquent, *le problème des développantes est équivalent au problème des trajectoires des lignes droites que nous venons d'exposer:* il suffit de poser

$$a = \psi'(\lambda),$$
$$b = \psi(\lambda) - \lambda\,\psi'(\lambda),$$
$$\operatorname{cotg} \nu = 0$$

dans les formules (10) pour avoir toutes les développantes d'une courbe donnée

$$y = \psi(x).$$

*Second exemple.* Toute section conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

est une courbe unicursale.

Par suite, le problème à déterminer des trajectoires qui coupent chacune des sections coniques (on suppose que les coefficients $A, B, C, D, E, F$ sont fonctions données d'un paramètre $\lambda$) sous un angle

$$\nu = \theta(\lambda)$$

se réduit aussi à l'intégration d'une équation différentielle de la forme (6).

Dans des Cours d'Analyse on trouve ordinairement le problème énoncé sur les trajectoires pour la famille de cercles

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

où $a$, $b$, $R$ sont des fonctions données d'un paramètre $\lambda$, servant comme exemple pour le problème dont la solution dépend de l'intégration d'une équation de Riccati, qui est, dans ce cas concret

$$(11)\quad 2R\frac{dt}{d\lambda}+b'(1-t^2)-2a't-\operatorname{cotg} v\,[R'(1+t^2)+ \\ +a'(1-t^2)+2b't]=0.$$

Cette équation différentielle, résolvant ce problème restreint, est aussi de la forme (6), ce qu'on pouvait prévoir.

Entre le problème général, dont la solution complète dépend de l'intégration d'une équation différentielle de la forme (6) et ce problème restreint, dont la détermination des trajectoires dépend de l'équation de Riccati (11), il existe une différence essentielle qui consiste en ceci: dans le problème général, on ne peut pas tirer parti de la connaissance d'une trajectoire particulière; au contraire, dans le problème restreint, la connaissance d'une trajectoire particulière conduit à trouver toutes es autres.

IV. — Si la relation (1) représente une courbe algébrique de genre *un*, ses coordonnées peuvent être exprimées en fonction rationnelle (à coefficients étant fonctions de $\lambda$) d'un même paramètre $t$ et d'un radical de la forme

$$\sqrt{At^4+Bt^3+Ct^2+Dt+E},$$

où les coefficients $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ sont des fonctions de $\lambda$.

L'équation différentielle du problème proposé, en ce cas, sera de la forme

$$(12)\qquad \frac{dt}{d\lambda}=\frac{\alpha+\beta\sqrt{At^4+Bt^3+Ct^2+Dt+E}}{\gamma},$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignent les polynômes en $t$ dont les coefficients sont des fonctions de $\lambda$.

L'équation (12) peut se réduire à la forme

$$(13) \qquad M\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + 2N\frac{dt}{d\lambda} + P = 0,$$

où $M, N, P$ désignent les polynômes en $t$ dont les coefficients sont des fonctions de $\lambda$.

Par suite, *le problème de la détermination des trajectoires des courbes de genre* un *dépend de l'intégration d'une équation différentielle algébrique du premier ordre et du second degré.*

V. — Dans le cas où la relation (1) représente une courbe algébrique de genre *deux*, on sait que ses coordonnées peuvent être exprimées par des fonctions rationnelles d'un paramètre $t$ et de la racine carrée d'un polynôme du sixième degré par rapport à ce paramètre $t$.

Comme précédemment on s'assure sans difficulté que *le problème à trouver les trajectoires des courbes de genre* deux *exige l'intégration d'une équation différentielle algébrique du premier ordre et du second degré de la forme* (13), *et c'est ce qu'il fallait démontrer.*

Il est à remarquer que l'équation différentielle de la forme (13) se rencontre aussi quand on cherche les lignes asymptotiques ou les lignes de courbure des surfaces pour lesquelles les coordonnées s'expriment en fonction rationnelle d'un paramètre $u$ et d'une façon quelconque d'un autre paramètre $v$ [1]).

---

1) Lelieuvre: *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* Paris, t. 106 p. 183; 1883.