Contribution à l'intégration de l'équation différentielle de J. Liouville.

Par

DRAGOSLAV MITRINOVITCH

1. — L'équation différentielle du premier ordre de la forme

$$\frac{dy}{dx}+f(x)\cos y+\varphi(x)\sin y+\psi(x)=0 \tag{1}$$

se réduit à une équation différentielle du type de Riccati en y faisant le changement de fonction inconnue y par la relation

$$tg\,\frac{y}{2}=z,$$

où z est une nouvelle fonction inconnue.

Ce fait a été signalé par J. Liouville *).

On rencontre l'équation (1) en cherchant les courbes qui coupent chacun des cercles

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

où a, b, R sont des fonctions supposées connues d'un paramètre variable λ, sous un angle v, constant ou fonction donnée de λ**).

---

*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Ire série t. XI, p. 445.

**) 1° E. Goursat: *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, p. 325; 1929.
2° L. Ballif: *L' Enseignement mathématique*, № 3-4, p. 215-223; 1915.
3° C. Cailler: *L' Enseignement mathématique*, № 3-4, p. 224-244; 1915.

Dans ce qui suit nous traiterons *le cas où l'équation* (1) *est réductible à l'équation de* Lagrange *et nous appliquerons le résultat obtenu au problème que nous venons de mentionner.*

2. — Pour que l'équation (1) soit du type de Lagrange

$$(2) \qquad y = x\,F(y') + \Phi(y'), \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right),$$

il faut et il suffit que les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ aient la forme

$$f(x) = -\alpha \sin kx, \quad \varphi(x) = \mp \alpha \cos kx, \quad \psi(x) = \beta$$

ou

$$f(x) = -\alpha \cos kx, \quad \varphi(x) = \mp \alpha \sin kx, \quad \psi(x) = \beta,$$

où α, β, k désignent trois constantes quelconques.

Les équations, qui correspondent aux formes indiquées des fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, seront

$$(3) \qquad \begin{aligned} y' + \beta - \alpha \sin (kx \pm y) &= 0, \\ y' + \beta - \alpha \cos (kx \mp y) &= 0, \end{aligned}$$

ou bien

$$kx \pm y - \text{arc sin} \frac{y' + \beta}{\alpha} = 0,$$

$$kx \mp y - \text{arc cos} \frac{y' + \beta}{\alpha} = 0,$$

et ce sont les équations différentielles intégrables appartenant au type de Lagrange (2).

3. — L'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} + f(x) \cos my + \varphi(x) \sin my + \psi(x) = 0,$$

(m = const), qui est plus générale que l'équation (1), par la substitution

$$tg \frac{m}{2} y = z,$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{2}{m} \text{arc } tg\, z, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{m} \frac{1}{1 + z^2} \frac{dz}{dx}.$$

$$\cos my = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \sin my = \frac{2z}{1+z^2},$$

se transforme en celle-ci

$$\frac{2}{m}\frac{dz}{dx} + (1-z^2)\, f(x) + 2z\,\varphi(x) + (1+z^2)\,\psi(x) = 0,$$

qui est une équation de Riccati.

Observons que l'équation (4) peut être mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx} + F(x)\cos[my + \Theta(x)] + \psi(x) = 0,$$

où les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ admettent la forme

$$f(x) = F(x)\cos\Theta(x),$$
$$\varphi(x) = -F(x)\sin\Theta(x).$$

4. — Considérons maintenant une famille de cercles définie par les trois fonctions

$$(5) \qquad a = g(\lambda), \quad b = h(\lambda), \quad R = j(\lambda),$$

qui donnent les coordonnées du centre et le rayon à l'aide d'un paramètre λ.

Les trajectoires qui coupent chacun de cercles (5) sous un angle v, où v est une constante ou une fonction donnée de même paramètre λ, sont fournies par les relations

$$(6) \qquad \begin{aligned} x &= a + R\cos\theta, \\ y &= b + R\sin\theta, \end{aligned}$$

où θ est l'intégrale générale de l'équation différentielle du type de Liouville

$$(7) \qquad R\frac{d\theta}{d\lambda} + (b' - a'\operatorname{cotg} v)\cos\theta - $$
$$- (a' + b'\operatorname{cotg} v)\sin\theta - R'\operatorname{cotg} v = 0,$$

a', b', R' étant les dérivées de a, b, R par rapport à λ.

Cette équation étant de la forme (1), on peut utiliser les équations intégrables (3) de la manière suivante:

Pour que l'équation (7) soit de la forme

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} + \beta - \alpha \sin (k\lambda + \Theta) = 0,$$

il faut et il suffit qu'on ait

$$\begin{aligned} b' - a' \operatorname{cotg} \nu &= -\alpha R \sin k\lambda, \\ b' \operatorname{cotg} \nu + a' &= \alpha R \cos k\lambda, \\ R' \operatorname{cotg} \nu &= -\beta R, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$R = C_1 e^{-\beta \int tg\, \nu\, d\lambda},$$

$$a = \alpha C_1 \int e^{-\beta \int tg\, \nu\, d\lambda} \sin \nu \sin (k\lambda + \nu)\, d\lambda + C_2,$$

$$b = \alpha C_1 \int e^{-\beta \int tg\, \nu\, d\lambda} \sin \nu \cos (k\lambda + \nu)\, d\lambda + C_3,$$

où C_1, C_2, C_3 désignent trois constantes arbitraires.

D'une manière analogue, on peut obtenir R, a, b en partant d'équations différentielles

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} + \beta - \alpha \sin (k\lambda - \Theta) = 0,$$

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} + \beta - \alpha \cos (k\lambda \mp \Theta) = 0.$$

Pour des formes différentes de la fonction $\nu(\lambda)$, *on aura des cercles* (5) *dont les trajectoires en question sont représentées, sous la forme paramétrique, par les relations* (6), *où la fonction* $\Theta(\lambda)$ *sera obtenue par l'intégration d'une équation intégrable du type de* Lagrange.