Sur une suite de polynomes rattachés aux équations différentielles.

Par

MICHEL PETROVITCH

1. Considérons l'équation du premier ordre

$$y' = R(x, y) \tag{1}$$

où R est une fonction rationnelle de x et y, à coefficients réels, nombres commensurables. Ecrivons la sous la forme

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{2}$$

où P et Q sont des polynomes en x et y à coefficients nombres entiers, avec la seule hypothèse que $Q(0, 0)$ diffère de zéro.

L'équation admet une seule intégrale y s'annulant pour $x = 0$ et celle-ci est développable en série

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{3}$$

à coefficients a_n nombres commensurables, convergente au voisinage de $x = 0$.

Le coefficient a_n est fourni par la formule

$$a_n = \frac{r_n}{n!} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4}$$

où r_n désigne la valeur que prend pour $x = 0$, $y = 0$ une certaine fonction rationnelle R_n: cette fonction est le n-ième terme de la suite

$$R_1, R_2, R_3, \cdots \tag{5}$$

de fonctions formées d'après la loi de reccurence

$$R_n = \frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} + \frac{P}{Q}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y}, \qquad R_1 = \frac{P}{Q}. \tag{6}$$

La fonction R_2 est un polynome divisé par Q^3; R_3 est un polynome divisé par Q^5, et si l'on pose

$$R_n = \frac{P_n}{Q^{2n-1}}, \quad P_1 = P \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{7}$$

où P_n est un polynome à coefficients nombres entiers, on trouve bien

$$R_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{Q^{2n+1}}$$

ce qui confirme la formule (7). De

$$R_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{Q^{2n-3}}$$

on trouve

$$\frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} = \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{dx} - (2n-3)\dfrac{\partial Q}{\partial x}\cdot P_{n-1}}{Q^{2(n-1)}},$$

$$\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y} = \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y} - (2n-3)\dfrac{\partial Q}{\partial y}\cdot P_{n-1}}{Q^{2(n-1)}}$$

et en le remplaçant dans (7) on aura

$$(8) \qquad P_n = A\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + B\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} + (2n-3)\,C\,P_{n-1} \quad (n=2,3,\cdots)$$

où A, B, C sont trois *polynomes fixes* en x, y

$$(9) \qquad \begin{aligned} A &= Q^2, \qquad B = PQ, \\ C &= -\left(Q\frac{\partial Q}{\partial x} + P\frac{\partial Q}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Le calcul des coefficients a_n se ramène donc à celui des termes constants $p_1, p_2, p_3 \cdots$ des polynomes $P_1, P_2, P_3 \cdots$ formés d'après la loi de recurrence (8), *et du terme constant q du polynome Q: on aura alors*

$$(10) \qquad a_n = \frac{p_n}{n!\,q^{2n-1}}\,.$$

Les formules (8) et (9) montrent que le calcul du nombre p_n n'exige que la connaissance de la partie linéaire seule du polynome

$$P_{n-1} = a_0 + a_1 x + a_2 y + \cdots$$

Si l'on désigne par p le terme constant du polynome P, par q' et q'' les coefficients de x et de y dans le polynome Q, les formules (9) réduisent pour $x=y=0$ les polynomes A, B, C aux valeurs fixes

$$A = q^2 = a, \qquad B = pq = b,$$

$$C = -(qq' + pq'') = c$$

et les formules (8), en y faisant $x=y=0$ fournissent

$$p_n = a\alpha_1 + b\alpha_2 + (2n-3)\, c\, \alpha_0.$$

Ceci, par exemple, fait voir que si $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=0$, on a $p_n=0$. *Si, donc, dans un polynome P_k manque la partie linéaire, la série (3) ne contient pas le terme en x^{k+1}.*

Si l'on a à la fois

$$\alpha_0=0, \qquad a\,\alpha_1 + b\,\alpha_2 = 0,$$

on aura encore $p_n=0$. *Si, donc, dans un polynome P_k le terme constant est nul, ses coefficients de x et de y étant liés par la relation précédente, la série (3) ne contient pas les termes en x^k et en x^{k+1}.*

Les remarques qui suivent se rattachent aux termes constants p_n des polynomes P_n.

D'abord, p_n est un entier au plus égal, en valeur absolue à une certaine valeur

$$n!\, \alpha^n$$

où α est un nombre positif, fini et indépendant de n.

En effet, la relation (8) montre que p_n est un nombre entier. La série (3) ayant son rayon de convergence ϱ non nul on a

$$\text{(11)} \qquad \limsup \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = \frac{1}{\varrho}$$

donc

$$\left| \sqrt[n]{a_n} \right| = \frac{1}{\varrho} + \varepsilon_n$$

où ε_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Par suite

$$|a_n| = \frac{1}{n!}\left|\frac{p_n}{q^{2n-1}}\right| = \left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon_n\right)^n < h^n$$

où h est une quantité positive fixée, indépendante de n. Donc

$$|p_n| < n!\, h^n\, |q|^{2n-1} \leqslant n!\, h^n\, |q|^{2n}.$$

On en conclut que

$$(12) \qquad |p_n| < n!\, \alpha^n$$

où α est la quantité positive finie et fixe

$$(13) \qquad \alpha = h\, |q|^2.$$

Enfin, une remarque d'ordre aritmétique se rattache aux p_n dans le cas où l'équation (1) admet comme intégrale y une fonction *algébrique* de x. Dans ce cas p_n *est toujours un multiple entier de la n-ième puissance d'un nombre fixe.*

En effet, lorsque la série (3) représente une fonction algébrique, il existe un nombre entier fixe M tel que a_n soit multiple entier du nombre M^{-n}. Il s'en suit, d'après (10), que p_n sera multiple entier du nombre

$$\frac{n!\, q^{2n-1}}{M^n}.$$

Si l'on désigne par α et β le numérateur et le dénominateur du nombre rationnel fixe $\frac{q^2}{M}$ réduit à sa plus simple expression, on aura

$$p_n = n!\, h_n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \frac{1}{q}. \qquad h_n = \text{entier}$$

et comme p_n est un entier, $q\beta^n$ est nécéssairement un diviseur du nombre $n!\,h_n\,\alpha^n$, de sorte que

$$(14) \qquad p_n = k_n \gamma^n,$$

k_n et γ étant des entiers.

2. Les faits analogues se présentent dans le cas d'une équation différentielle d'un ordre quelconque

$$(15) \qquad y^{(h)} = R\,(x, y, y', y'', \cdots y^{(h-1)})$$

où R est une fonction rationnelle en toutes variables qu'elle contient, à coefficients nombres commensurables. Ecrivons

$$(16) \qquad y^{(k)} = y_k \qquad y_0 = y$$

et considerons l'équation (15) écrite sous la forme

$$(17) \qquad y_h = \frac{P}{Q}$$

où P et Q sont des polynomes en

$$(18) \qquad x, y_0, y_1, \ldots y_{h-1}$$

à coefficients nombres entiers, avec la seule hypothèse que le terme constant de Q n'est pas nul.

Soit y une intégrale de (15) s'annullant, ainsi que ses dérivées

$$(19) \qquad y_1, y_2, \cdots y_{h-1}$$

pour $x=0$ et ayant la valeur $x=0$ comme point ordinaire; on aura au voisinage de $x=0$

$$(20) \qquad y = a_h x^h + a_{h+1} x^{h+1} + a_{h+2} x^{h+2} + \cdots$$

Le coefficient de x^n sera fourni par la formule

$$a_n = \frac{r_n}{n!} \qquad (n=h,\ h+1, \ldots)$$

où r_n désigne le terme constant d'une certaine fonction R_n rationnelle en variables (18); cette fonction est le n-iéme terme de la suite

$$(21) \qquad R_h, R_{h+1}, R_{h+2}, \cdots$$

de fonctions formées d'après la loi de reccurence

$$(22) \quad R_n = \frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_0} + y_2 \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_1} + \\ + \cdots + y_{h-1} \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-2}} + \frac{P}{Q} \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}$$

avec

$$R_h = \frac{P}{Q}\,.$$

On s'assure comme précédement que

$$(23) \qquad R_n = \frac{P_n}{Q^{2n-2h+1}}, \quad P_h = P \quad (n = h,\ h+1, \cdots)$$

où P_n est un polynome en (18) à coefficients nombres entiers.

De la formule

$$R_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{Q^{2n-2h-1}}$$

on tire par différentiation

$$
(24)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} &= \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial x} - (2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial x}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}\\
\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_0} &= \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_0} - (2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_0}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}\\
\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_1} &= \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_1} - (2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_1}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}} &= \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{n-1}} - (2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_{h-1}}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}
\end{aligned}
$$

donc

$$
(25)\quad \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}\frac{P}{Q} = \frac{PQ\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-1}} - (2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_{h-1}}PP_{n-1}}{Q^{2n-2h+1}}.
$$

Des formules (22) et (23) on tire

$$
P_n = Q^{2n-2h+1}\left(\frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} + y_1\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_0} + y_2\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_1} + \cdots + \right.
$$
$$
\left. + y_{h-1}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-2}} + \frac{P}{Q}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}\right)
$$

et en y remplaçant les dérivées partielles de R_{n-1} par leur expressions (24) et (25) on trouve

$$
(26)\quad P_n = A\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + H_0\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_0} + H_1\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_1} + H_2\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_2} +
$$
$$
+ \cdots + H_{h-2}\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-2}} + B\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-1}} + (2n-2h-1)\,CP_{n-1}
$$

où

$$A, B, C, H_0, H_1, \cdots H_{n-2}$$

sont des polynomes fixes en (18), à coefficients nombres entiers, ayant pour expressions

$$A = Q^2, \qquad B = PQ,$$

$$(27) \quad C = -Q\left[\frac{\partial Q}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Q}{\partial y_0} + y_2 \frac{\partial Q}{\partial y_1} + \cdots + y_{h-1} \frac{\partial Q}{\partial h_{h-2}} + \frac{P}{Q} \frac{\partial Q}{\partial y_{h-1}}\right],$$

$$H_0 = y_1 Q^2, \quad H_1 = y_2 Q^2, \quad H_2 = y_3 Q^2, \cdots \quad H_{h-2} = y_{h-1} Q^2.$$

Le calcul des coefficients a_n se ramène à celui des termes constants p_h, p_{h+1}, p_{h+2}, ... des polynomes P_h, P_{h+1}, P_{h+2}, ... formés d'après la loi de recurrence (26) et du terme constant q du polynome Q; on aura la formule

$$a_n = \frac{p_n}{n!\, q^{2n-2h+1}} \qquad (n = h, h+1, \ldots)$$

Ce calcul n'exige que la connaissance de la partie du polynome

$$P_{n-1} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y_{h-1} + \cdots$$

linéaire en x et en y_{h-1}. En effet pour

$$x = y_0 = y_1 = \cdots = y_{h-1} = 0$$

les polynomes

$$H_0, H_1, H_2, \cdots H_{h-2}$$

se réduisent à zero, et les polynomes A, B, C aux valeurs fixes

$$A = q^2 = a, \qquad B = pq = b,$$

$$C = -(qq' + pq'') = c$$

où p désigne le terme constant du polynome P, et q', q'' les coefficients de x et de y_{h-1} dans le polynome Q. On aura de (26)

$$p_n = a\alpha_1 + b\alpha_2 + (2n - 2h - 1)\, c\alpha_0$$

et l'on en tire les conclusions relativement aux lacunes que présentera la série (20), comme dans le cas de l'équation (1) du premier ordre.

On démontre de la même manière que dans le cas de l'équation du premier ordre que p_n *est un entier au plus égal, en valeur absolue, à une certaine valeur*

$$n!\, a^n$$

où a est un nombre positif, fini et indépendant de n.

Enfin, la même remarque que dans le cas du premier ordre se rattache aux intégrales y *algébriques* de l'équation (15): *l'entier p_n est un multiple entier de la n-ième puissance d'un nombre fixe.*