Note sur l'intégrabilité d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.

Par

NICOLAS SALTYKOW.

1. Considérons, tout-d'abord, l'équation linéaire à coefficients constants par rapport à la fonction inconnue et aux dérivées partielles de cette dernière du premier et du second ordre:

$$(1) \qquad Ar + 2Bs + Ct + 2Dp + 2Eq + Fz + G = 0,$$

les quantités variables

$$r, \quad s, \quad t, \quad p, \quad q$$

désignant respectivement les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y},$$

les coefficients A, B, C, D, E, F et G étant des constantes.

Profitons des expressions pour les coefficients qu'avait établi Euler[1]), dans le cas d'une équation homogène à trois variables indépendantes. Après les avoir introduit, écrivons[2]) l'équation étudiée (1), sous la forme suivante:

---

[1]) L. Euleri. — Institutiones Calculi Integralis. t. III. p. 361. Lipsiae et Berolini 1914.

[2]) N. Saltykow. *Théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue (Bulletin de L'Académie des Sciences Mathématiques et Naturelles. A. Sc. Math. et Phys. N. 2. Belgrade 1935. p. 126)*

$$(2) \qquad afr+(ag+bf)s+bgt+(ah+cf)p+ \\ +(bh+cg)q+chz+G=0.$$

Il s'agit d'en obtenir l'intégrale générale sous la forme d'une seule équation[3]), grâce aux propriétés de deux intégrales premières générales qu'admet[4]) l'équation (2).

En effet, l'équation (2) peut être mise sous l'une des deux formes suivantes

$$(3) \qquad f\frac{\partial}{\partial x}(ap+bq+cz)+g\frac{\partial}{\partial y}(ap+bq+cz)+ \\ +h(ap+bq+cz)+G=0,$$

ou bien:

$$(4) \qquad a\frac{\partial}{\partial x}(fp+gq+hz)+b\frac{\partial}{\partial y}(fp+gq+hz)+ \\ +c(fp+gq+hz)+G=0.$$

L'équation (3) est immédiatement réductible à l'ensemble des deux équations:

$$(5) \qquad ap+bq+cz=z_1,$$

$$(6) \qquad fp_1+gq_1+hz_1+G=0,$$

z_1 désignant la nouvelle fonction inconnue auxiliaire, dont les dérivées partielles sont désignées par les expressions:

$$p_1\equiv\frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad q_1\equiv\frac{\partial z_1}{\partial y}.$$

Quant à l'équation (4), elle est équivalente au système d'équations:

$$(7) \qquad fp+gq+hz=\bar{z}_1,$$

---

[3]) Н. Салтиков. *Теорија линеарних парцијалних једначина другог реда са једном непознатом функцијом.* (Глас CLXV, Први Разред 81. А. Мат. Науке. Београд 1935 стр. 10).

[4]) Cf. [2]) p. 127.

$$a\bar{p}_1+b\bar{q}_1+c\bar{z}_1+G=0, \tag{8}$$

où $\bar{z}_1$ est la fonction auxiliaire, en posant:

$$\bar{p}_1=\frac{\partial\bar{z}_1}{\partial x_1}, \quad \bar{q}_1=\frac{\partial\bar{z}_1}{\partial y_1}.$$

Les deux équations (6) et (8) étant linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, chacune d'une seule fonction inconnue, leurs intégrales générales seront définies, indépendamment l'une de l'autre, par les intégrations respectives des équations différentielles ordinaires simultanées:

$$\frac{dx}{f}=\frac{dy}{g}=-\frac{dz_1}{hz_1+G}, \tag{9}$$

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=-\frac{d\bar{z}_1}{c\bar{z}_1+G}. \tag{10}$$

On en tire par une solution particulière des équations linéaires aux dérivées partielles correspondantes (6) et (8), à savoir:

$$\eta\equiv fy-gx, \quad \xi\equiv ay-bx. \tag{11}$$

Pour éviter l'introduction d'autres quantités variables, outre ξ et η, complétons les systèmes (9) et (10) respectivement par les rapports:

$$\frac{d\,(ay-bx)}{k}, \quad \frac{d(fy-gx)}{-k},$$

où l'on a introduit la désignation suivante:

$$k\equiv ag-bf. \tag{12}$$

Cela posé, l'intégrale générale de chacune des équations (6) et (8) s'écrit respectivement sous la forme suivante:

$$z_1 = \frac{1}{h}\left[\varphi(\eta)\, e^{-\frac{h\xi}{k}} - G\right],$$

$$\overline{z_1} = \frac{1}{c}\left[\psi(\xi)\, e^{\frac{c\eta}{k}} - G\right],$$

φ et ψ désignant deux fonctions arbitraires de leurs arguments respectivement η et ξ.

Par conséquent, les équations (5) et (7) deviennent:

$$ap+bq+cz = \frac{1}{h}\varphi(\eta)e^{-\frac{h\xi}{k}} - \frac{1}{h}G,$$

$$fp+gq+hz = \frac{1}{c}\psi(\xi)e^{\frac{c\eta}{k}} - \frac{1}{c}G,$$

Ces deux dernières équations sont bien en involution[5]). En les résolvent par rapport à p et à q, on a immédiatement:

$$(13)\qquad \begin{cases} p = m\left(z+\frac{1}{ch}G\right) + \frac{g}{kh}\varphi(\eta)e^{-\frac{h\xi}{k}} - \frac{b}{kc}\psi(\xi)e^{\frac{c\eta}{k}}, \\ q = n\left(z+\frac{1}{ch}G\right) - \frac{f}{kh}\varphi(\eta)e^{-\frac{h\xi}{k}} + \frac{a}{kc}\psi(\xi)e^{\frac{c\eta}{k}}, \end{cases}$$

où l'on a posé:

$$(14)\qquad m \equiv \frac{bh-cg}{k}, \qquad n \equiv \frac{cf-ah}{k}.$$

Les valeurs (13) de p et de q rendent, grâce aux formules (11), l'expression $dz=pdx+qdy$ une différentielle exacte:

$$d\left[\left(z+\frac{1}{ch}G\right)e^{-mx-ny}\right] = d\Psi(\xi) + d\Phi(\eta),$$

en introduisant les désignations:

$$\Psi(\xi) \equiv \frac{1}{ck}\int \psi(\xi)e^{\frac{h\xi}{k}}d\xi,$$

[5]) N. Saltykow — Cf.[4])

$$\Phi(\eta) \equiv -\frac{1}{hk}\int \varphi(\eta)\, e^{-\frac{c\eta}{k}}\, d\eta.$$

Il s'en suit, par quadrature, vu les formules (11), (12) et (14), l'intégrale générale de l'equation étudiée (2):

$$z = [\Psi(ay-bx)+\Phi(fy-gx)]\, e^{\frac{(bh-cg)x+(cf-ah)y}{ag-bf}} - \frac{1}{ch}G,$$

Ψ et Φ désignant deux fonctions arbitraires.

La méthode exposée s'étend d'elle même à l'intégration des équations linéaires à coefficients constants d'un nombre quelconque des variables indépendantes.

2. Si la forme quadratique adjointe à l'équation donnée (11) dégénére en carré d'une forme linéaire, l'équation (2) devient parabolique:

$$(15) \qquad a^2r+2abs+b^2t+2acp+2bcq+c^2z+G=0.$$

En écrivant cette dernière équation de la manière suivante:

$$a\frac{\partial}{\partial x}(ap+bq+cz)+b\frac{\partial}{\partial y}(ap+bq+cz)+c\,(ap+bq+cz)+G=0,$$

on la réduit au système de Charpit[6]), dont l'intégration revient à celle du système d'équations différentielles ordinaires:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{U-cz}=-\frac{dU}{cU+G}\ .$$

Il s'en suit l'intégrale générale de l'équation (15):

$$z=[xf(ay-bx)+\varphi\,(ay-bx)]\, e^{-\frac{cx}{a}}-\frac{1}{c^2}\,G,$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires.

[6]) N. Saltykow — *Equations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par un système de Charpit* (Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade t. II Belgrade 1933, p. 66).

3. Passons, maintenant à l'intégration de l'équation des surfaces minima que l'on va mettre, grâce à la transformation de Legendre, sous la forme suivante:

$$(16) \qquad (1+X^2)R+2XYS+(1+Y^2)T=0.$$

En appliquant à cette dernière équation les formules exposées sur les pages 125, 126, 130 et 131 du Mémoire cité de N. Saltykow[2]), on aura[7]):

$$\varrho \equiv \sqrt{-1-X^2-Y^2}, \qquad K \equiv XY \pm \varrho.$$

$$M \equiv \frac{XY \pm \varrho}{1+X^2}, \quad \psi(A) \equiv 2X, \quad \psi(K) \equiv 2Y,$$

$$L \equiv \pm \frac{Y}{\varrho} - X, \quad N \equiv \frac{\pm Y - X\varrho}{(1+X^2)\varrho}, \quad \psi(L) \equiv \frac{1}{\varrho^2} - 1,$$

$$\mu \equiv \frac{2}{\varrho^2}.$$

La valeur μ étant distincte de zéro, calculons le premier facteur μ_1, dont l'expressia est donnée par la formule:

$$\mu_1 = \mu - I_1 \beta - \psi(\beta) + \psi(I_2) + I_1 I_2 + I,$$

où l'on a posé:

$$\beta \equiv \varphi(lg\,\mu), \quad \varphi(\ldots) = A\frac{\partial(\ldots)}{\partial X} + K\frac{\partial(\ldots)}{\partial Y},$$

$$I_1 \equiv \pm \frac{1}{2\varrho}[M\psi(A) + \varphi(M) - \psi(K)],$$

$$I_2 \equiv \pm A I_1 - \psi(A),$$

$$I \equiv I_1 L + I_2 N + \psi(L) - \psi(N).$$

Il s'en suit par substitution, en ces derniéres formules, des expressions antérieurement données:

---

[7]) On va désigner ρ au lieu de R et X, Y, Z, au lieu de x, y, z.

$$\beta \equiv 2\left(\pm\frac{Y}{\varrho}-X\right), \quad \psi(\beta)\equiv\frac{2}{\varrho^2}-2,$$

$$l_1\equiv 0, \quad l_2\equiv 2X, \quad \psi(l_2)\equiv -2,$$

$$\varphi(N)\equiv\pm\frac{2XY}{(1+X^2)\varrho}+\frac{2X^2}{1+X^2}+\frac{1}{\varrho^2}-1, \qquad l\equiv 0,$$

$$\mu_1\equiv 0.$$

Cela étant, l'intégrale générale de l'équation (16) est donnée par la formule:

$$(17)\quad Z=\frac{\varrho^2}{2}\left[\frac{\partial Z_1}{\partial X}+\frac{(XY\mp\varrho)}{1+X^2}\frac{\partial Z_1}{\partial Y}+\frac{\mp Y-X.\varrho}{(1+X^2).\varrho}Z_1\right],$$

où la fonction Z_1 sera définie de la manière suivante:

Prenant en considération les valeurs des coefficients:

$$L_1\equiv L+l_2-\beta\equiv\mp\frac{Y}{\varrho}-X,$$

$$N_1\equiv N\equiv\frac{\mp Y-X.\varrho}{(1+X^2).\varrho},$$

on obtient le système d'équations qui donnent la valeur requise de Z_1, à savoir:

$$(18)\quad (1+X^2)\frac{\partial Z_1}{\partial X}+(XY\pm\varrho)\frac{\partial Z_1}{\partial Y}+\left(\mp\frac{Y}{\varrho}-X\right)Z_1=Z_2,$$

$$(19)\qquad \frac{\partial Z_2}{\partial X}+\frac{XY\mp\varrho}{1+X^2}\frac{\partial Z_2}{\partial Y}+\frac{\mp Y-X\varrho}{(1+X^2)\varrho}=0.$$

L'intégrale générale de l'équation (19) devient:

$$Z_2=\varrho f\left(\frac{XY\mp\varrho}{1+X^2}\right),$$

f désignant une fonction arbitraire.

Grâce à cette dernière valeur de Z_2, l'intégrale générale de l'équation (18) va se présénter de la manière suivante:

$$(20)\quad Z_1=\frac{1+X^2}{\varrho}\left[\psi\left(\frac{XY\pm\varrho}{1+X^2}\right)+\varphi\left(X,\frac{XY\pm\varrho}{1+X^2}\right)\right],$$

où la fonction φ vérifie la condition

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X} = \left\{ \left(\frac{m'X \pm c'}{1+X^2}\right)^2 f\left[c' \pm \frac{2(m'X \pm c')}{1+X^2}\right] \right\}_{c' = \frac{XY \pm \varrho}{1+X^2}},$$

$$m' = \sqrt{-1-c'^2},$$

les accolades, avec l'indice c', désignant le résultat de la substitution, au lieu de c', de la valeur $\frac{XY \pm \varrho}{1+X^2}$ et ψ étant la seconde fonction arbitraire.

Or, avant de substituer la valeur trouvée (20) de Z_1 dans la formule (17), remarquons que cette dernière se simplifie, grâce à l'équation (18), de la manière suivante:

$$Z = \frac{\varrho^3}{1+X^2}\left[\frac{1}{2} f\left(\frac{XY \pm \varrho}{1+X^2}\right) \mp \frac{\partial Z_1}{\partial Y}\right].$$

Cela étant, en y substituant la valeur (20) de Z_1, on obtient l'intégrale générale de l'équation étudiée (16) (en écrivant de la manière abregée):

$$Z = \mp Y(\psi+\varphi) \mp \frac{Y \mp X\varrho}{1+X^2}\varrho(\psi'+\varphi') + \frac{\varrho^3}{2(1+X^2)} f,$$

ψ' et φ' désignant les dérivées prises respectivement de ψ et de φ par rapport à leur argument $\frac{XY \pm \varrho}{1+X^2}$.

Pour en tirer les trois formules définissant les coordonnés réctangulaires des points des surfaces minima, en fonctions de deux paramétres variables, on n'a qu'effectuer la transformation inverse de Legendre.