La base de M. Hamel et la propriété de Baire.

Par

WACLAW SIERPIŃSKI

Comme j'ai démontré¹), toute base de M. Hamel est non mesurable B (pouvant d'ailleurs être ou n'être pas mesurable L). Dans cette Note je traiterai le problème si la base de M. Hamel peut jouir de la propriété de Baire²). En admettant l'hypothèse du continu je prouverai que c'est justement le cas. Je démontrerai notamment ce

Théorème I: Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une base de M. Humel qui est un ensemble toujours de première catégorie³).

Démonstration.

Lemme 1. N étant un ensemble linéaire de mesure nulle et a un nombre réel donné, il existe toujours deux nombres réels x et y n'appartenant pas à N et tels que a = x - y.

Dém. Soit N(a) la translation de l'ensemble N (le long de la droite) de longueur a. L'ensemble N étant de mesure nulle

¹⁾ Fundamenta Mathematicae, t. I, p. 109.

²) Pour la définition de cette notion voir p, e. C. Kuratowski Topologie I (Monografje Matematyczne t. III) Warszawa 1933, p. 49 et p. 55.

³⁾ c. à d. (d'après M. N. Lusin) de première catégorie sur tout ensemble parfait (Fund. Math. t. XXI, p. 114).

les ensembles N(a) et N+N(a) le sont aussi. Il existe donc un nombre réel x qui n'appartient pas à N+N(a). Posons y=x-a. S'il était $y \in N$, on aurait évidemment $x=y+a \in N(a)$, contrairement à la définition du nombre x. On a donc y non $\in N$, x non $\in N$ et a=x-y, est le lemme 1 est démontré.

Lemme 2: Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble linéaire E toujours de 1^{re} catégorie, tel que tout nombre réel est une différence de deux nombres de E.

Dém. Admettons que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Il existe donc une suite transtinie du type Ω ,

$$(1) x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\omega}, x_{\omega+1}, \ldots, x_{\xi}, \ldots (\xi < \Omega)$$

formée de tous les nombres réels et une suite transfinie du type Ω ,

(2)
$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_{\omega}, \Gamma_{\omega+1}, \ldots, \Gamma_{\xi}, \ldots$$
 $(\xi < \Omega)$

formée de tous les ensembles linéaires G_{δ} de mesure nulle.

Nous définirons pour tout nombre ordinal $a < \Omega$ un couple de nombres réels p_a et q_a comme il suit.

Posons $p_1 = x_1$ et $q_1 = 0$. Soit maintenant a un nombre ordinal donné quelconque > 1 et $< \Omega$. L'ensemble $S_a = \sum_{\xi < a} \Gamma_{\xi}$ étant de mesure nulle (puisque $a < \Omega$), il existe, d'après le lemme 1, deux nombres réels p_a et q_a n'appartenant pas à S_a et tels que $p_a - q_a = x_a$.

Soit E l'ensemble formé de tous les nombres p_a et q_a , où $a < \Omega$. Il résulte tout de suite de la définition des nombres p_a et q_a que p_a non $\in \Gamma_{\xi}$ et q_a non $\in \Gamma_{\xi}$ pour $\xi < a < \Omega$: tout ensemble Γ_{ξ} , où $\xi < \Omega$ a donc un ensemble au plus dénombrable de points communs avec l'ensemble E. La suite transfinie (2) étant formée de tous les ensembles linéaires G_{δ} de mesure nulle et tout ensemble linéaire de mesure nulle étant contenu dans un ensemble G_{δ} de mesure nulle, il en résulte que l'ensemble E a un ensemble au plus dénombrable de points

jouissant de la propriété S est toujours de 1^m catégorie¹). L'ensemble E est donc toujours de 1^m catégorie.

communs avec tout ensemble de mesure nulle, c'est-à-dire que E jouit de le propriété S. Or, comme on sait, tout ensemble

Or, la suite (1) étant formée de tous les nombres réels et la formule $p_{\alpha} - q_{\alpha} = x_{\alpha}$ ayant lieu pour tout nombre ordina $\alpha < \Omega$, tout nombre réel est une différence de deux nombres de l'ensemble E.

Le lemme 2 est ainsi demontré.

Soit maintenant E un ensemble satisfaisant aux conditions du lemme 2. Soit b_1 le premier terme de la suite (1) appartenant à E. Soit maintenant a un nombre ordinal donné $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres b_{ξ} , où $\xi < a$. L'ensemble Q_a de tous les nombres réels x de la forme

$$x = r_1 b_{\xi_1} + r_2 b_{\xi_2} + \cdots + r_n b_{\xi_n}$$

où n est un nombre naturel, r_1, r_2, \ldots, r_n sont des nombres rationnels et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont des nombres ordinaux $<\alpha$ est, comme on voit sans peine (d'après $\alpha < \Omega$) au plus dénembrable. L'ensemble E étant évidemment indénombrable, il existe donc des termes de la suite (1) qui n'appartiennent pas à $E-Q_a$, et c'est le premier d'entre eux que nous désignerons par b_a .

La suite transfinie b_n ($a < \Omega$) est ainsi définie par l'induction transfinie. Soit B l'ensemble de tous les termes de cette suite. Il résulte sans peine de la propriété de l'ensemble E et de la définition de B que l'ensemble B est une base de M. Hamel 2).

Or, l'ensemble B, en tant que sous-ensemble de l'ensemble E toujours de 1^{re} catégorie, est un ensemble toujours de 1^{re} catégorie, donc satisfait aux conditions du théorème I qui est ainsi démontré.

J'ai démontré³) que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble de M. Lusin⁴), E, tel que tout nombre réel est une différence

¹⁾ Voir mon livre *Hypothèse du continu* (Monografje Matematyczne, t. IV) Warszawa 1934, p. 85 (Th. I).

²⁾ Cf. ma Note dans Fund. Math. t. 1. p. 106-107.

³⁾ Fund. Math. t. XXIV, p. 49 (Lemme 2).

⁴⁾ On appelle ensemble de M. Lusin tout ensemble linéaire qui ne contient aucun sous-ensemble indénombrable non dense.

de deux nombres de E. Tout à fait comme nous avons déduit notre théorème I de notre lemme 2, on en déduit ce

Théorème II: Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une base de M. Hamel qui est un ensemble de M. Lusin.

Tout ensemble de M. Lusin jouit, comme on sait, de la propriété C suivante: il peut être recouvert par une suite infinie d'intervalles dont les longueurs sont arbitrairement données d'avance¹). Il résulte donc de notre théorème II ce

Corollaire: Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une base de M. Hamel qui jouit de la propriété C.

Or, comme on sait, tout ensemble indénombrable de M. Lus in ne satisfait pas à condition de Baire (au sens large, c. à. d. relativement à la droite). Donc, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une base de M. Hamel qui ne jouit das de la propriété de Baire (relativement à la droite).

Or, cette dernière proposition peut être démontrée sans utiliser l'hypothèse du continu comme il suit.

C. Burstin a démontré²) (en utilisant le théorème de M. Zermelo) l'existence d'une base B de M. Hamel qui a des points communs avec tout ensemble linéaire parfait. Soit $b \neq 0$ un élément de la base B. Il est manifeste que B. B(b)=0, puisque, s'il était $b_1 \in B$ et $b_1 \in B(b)$, il existerait un élément b_2 de la base B, tel que $b_1 = b_2 + b$, ce qui est impossible, b_1 , b_2 et $b \neq 0$ étant des éléments de la base B.

Donc, le complémentaire CB de B contient un sous ensemble B(b) superposable (par translation) avec l'ensemble B qui a des points communs avec tout ensemble linéaire parfait. Or, comme on voit sans peine, tout ensemble superposable avec un ensemble ayant des points communs avec tout ensemble linéaire parfait, jouit de la même propriété. Donc CB a des points communs avec tout ensemble linéaire parfait, de

¹⁾ Voir p. e. Fund. Math. t. XI, p. 304.

²) C. Burstin: Die Spaltung des Kontinuums in c in L Sinne nichtmessbare Mengen. Sitzungsber. Akad. Wien Math.- Nat. Kl. Abt. II, Bd. 125 (1916).

méme que B. Cela entraîne, comme on sait, que les ensembles B et CB sont chacun partout de deuxième catégorie. L'ensemble B ne jouit pas donc de la propriété de Baire. Nous avons ainsi démontré (sans faire appel à l'hypothèse du continu) ce

Théorème III: Il existe une base de M. Hamel qui ne jouit pas de la propriété de Baire (relativement à la droite).

En ce qui concerne les théorèmes I et II. nous ne savons pas, dans l'état actuel de la science, de les démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu, puisqu'on ne sait pas démontrer sans cette hypothèse l'existence d'un ensemble toujours de 1^{re} catégorie de puissance $2^{\aleph_0 \, 1}$) ni d'un ensemble indénombrable de M. Lusin.

Il est encore à remarquer que le complémentaire d'une base de M. Hamel est toujours un ensemble qui est partout de 2^{me} catégorie. Cela est évident si la base B est un ensemble de 1^{re} catégorie, et, si B est de 2^{me} catégorie, cela résulte sans peine du fait que l'ensemble CB contient chaque ensemble B(br), où b est un élément $\neq 0$ de la base B et r est un nombre rationnel $\neq 0$.

Il en résulte sans peine que si la base de M. Hamel jouit de la propriété de Baire, elle est nécessairement un ensemble de 1^{re} catégorie.

¹⁾ Par contre, on sait démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu l'existence d'un ensemble linéaire indénombrable (de puissance \aleph_1) qui est toujours de 1^{rc} catégorie. Voir p. c. N. Lusin, Fund. Math. t. II, p. 155 (cf. Fund. Math. t. XXI, p. 123—124) et W. Sierpinski, C. R. Soc-Sc. Varsovie XXV, p. 103.