Ueber den vektoriellen Begriff des Trägheitsproduktes

Von

ANTON BILIMOVITCH

Die Ausdrücke für das Trägheitsmoment bzw. für das Deviationsmoment eines gegebenen Massensystems lassen sich, obwohl ihrer analytischen Form und ihrer geometrischen Bedeutung nach tief verschieden, aus dem allgemeineren Begriff des Trägheitsproduktes als dessen Abarten zwanglos ableiten, was hier gezeigt werden soll.

Dieses Trägheitsmoment bzw. dieses Deviationsmoment sind durch die zwei nachstehenden Ausdrücke veranschaulicht.

$$J_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), \tag{1}$$

$$D_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i, \tag{2}$$

worin m_i die Masse des materiellen Punktes und x_i, y_i dessen Koordinaten bezüglich eines orthogonalen Koordinatensystems bedeuten. Dagegen erscheint das Trägheitsprodukt desselben Massensystems bezüglich zweier beliebigen im Punkte O sich schneidenden Achsen $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ durch die Vektorgleichung

$$\Pi_{12} = \sum_i m_i\,([\mathfrak{e}_1 \mathfrak{r}_i]\,[\mathfrak{e}_2 \mathfrak{r}_i]) \tag{3}$$

veranschaulicht, worin $\mathfrak{e}_1$ bzw. $\mathfrak{e}_2$ die Einheitsvektoren der beiden Achsen und $\mathfrak{r}_i$ den Ortsvektor des Massenpunktes m_i in bezug auf den Punkt O bedeutet.

Fallen die beiden erwähnten Achsen zusammen, d.h. wird $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2$, wählt man diese Achse zur z-Achse des benützten Koordinatensystems $x-y-z$ und bezeichnet mit $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ die diesem System zugehörigen Einheitsvektoren, so ist nach dem analytischen Ausdruck für das vektorielle Produkt:

$$[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{r}_i] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = -y_i \mathfrak{i} + x_i \mathfrak{j}$$

d. h.

$$([\mathfrak{e}_1 \mathfrak{r}_i]\,[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{r}_i]) = x_i^2 + y_i^2$$

und

$$\Pi_{zz} = \sum_i m_i\,(x_i^2 + y_i^2). \tag{4}$$

Dieser Ausdruck ist gleich dem Definitionsausdruck (1) für das Trägheitsmoment des in Betracht gezogenen Massensystems bezüglich der Achse.

Stehen die beiden Achsen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ senkrecht aufeinander und wählt man $\mathfrak{e}_1$ zur x-Achse, $\mathfrak{e}_2$ zur y-Achse des Koordinatensystems, so wird

$$[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{r}_i] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = y_i \mathfrak{k} - z_i \mathfrak{j},$$

$$[\mathfrak{e}_2 \mathfrak{r}_i] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = z_i \mathfrak{i} - x_i \mathfrak{k},$$

d. h.

$$([\mathfrak{e}_1\mathfrak{r}_i][\mathfrak{e}_2\mathfrak{r}_i]) = -x_i\,y_i$$

und

$$\Pi_{xy} = -\sum_i m_i\,x_i\,y_i. \tag{5}$$

Dieser Ausdruck ist bis auf sein Vorzeichen gleich dem Definitionsausdruck (2) für das Deviationsmoment. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, ja es sprechen mehrere Gründe dafür, das Daviationsmoment mit dem hier auftretenden Minuszeichen zu behaften.

Der durch den Ausdruck (3) definierte Begriff des Trägheitsproduktes besitzt also eine allgemeinere Bedeutung: Fallen die beiden Achsen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ zusammen, so erhält man daraus das Trägheitsmoment, stehen diese Achsen bei sonstiger beliebiger Lage senkrecht aufeinander, so erhält man das Deviationsmoment des in Betracht gezogenen Massensystems.

Aus (3) ergibt sich noch folgendes. Haben die Achsen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ eine beliebige Orientierung und schliessen sie einen beliebigen Winkel φ ein und zerlegt man den Einheitsvektor $\mathfrak{e}_2$ in zwei Komponenten, von denen die eine in die Richtung des Vektors $\mathfrak{e}_1$ fällt, die andere, $\mathfrak{n}$, auf dieser Richtung senkrecht steht, so wird

$$\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_1 \cos\varphi + \mathfrak{n}\sin\varphi,$$

so dass man nach Einsetzung dieses Ausdruckes in (3) erhält:

$$\Pi_{12} = \Pi_{11}\cos\varphi + \Pi_{1n}\sin\varphi, \tag{6}$$

worin Π_{11} das Trägheitsmoment bezüglich der Achse $\mathfrak{e}_1$, und Π_{1n} unter Beibehaltung der bisher üblichen Terminologie das mit dem Zeichen minus behaftete Deviationsmoment bezüglich der zu einander senkrechten Achsen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{n}$ bedeutet.

Die Formel (6) zeigt, dass das Trägheitsmoment und das Deviationsmoment als orthogonale Komponenten des Trägheitsproduktes Π_{12} betrachtet werden können, ähnlich jenen, die man bei der Zerlegung eines gewöhnlichen Vektors in zwei komplanare zueinander senkrechte Komponenten erhält.