Schubspannungen in dünnwändigen Trägern

Von

J. KLITCHIEFF.

(Fortsetzung[1])

Statt der Biegungsfunktion χ führen wir die konjugierte Funktion χ_1 ein; dann ist

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi_1}{\partial x}, \quad \frac{d\chi}{d\nu} = \frac{d\chi_1}{ds},$$

wo ds ein Bogenelement der Randkurve bezeichnet. Die Funktion χ_1 ist ebenso harmonisch im Bereiche und die Randbedingung für sie lautet:

$$\frac{d\chi_1}{ds} = -\{{}^1/_2\,\sigma x^2 + (1 - {}^1/_2\sigma)\,y^2\}\cos(x,\nu) - (2+\sigma)\,xy\cos(y,\nu).$$

Durch Integration bekommen wir den Randwert von χ_1

$$\chi_1 = {}^1/_6\,\sigma(y^3 - 3x^2y) - {}^1/_3\,y^3 + 2\,(1+\sigma)\int\limits_R xy\,dx,$$

wo das Integal $\int\limits_R$ längs eines Stücks der Randkurve erstreckt wird. Bei unserem zweifachzusammenhängenden Bereich wird das Integral für die Punkte der äusseren Randkurve in einem Sinne, für die der inneren im entgegengesetzten erstreckt.

Setzen wir

[1]) *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade.* T. III, pp. 212—216.

$$\chi_1 = {}^1/_6\,\sigma\,(y^3 - 3x^2y) + \chi_2,$$

dann ist χ_2 ebenso harmonisch und nimmt am Rande den Wert an:

$$\chi_2 = -{}^1/_3\,y^3 + 2\,(1+\sigma)\int\limits_R xy\,dx.$$

Für die auf der Fig. 1[2]) dargestellte Querschnittsform haben wir

$$y^3 = -\left(\frac{2a}{K}\right)^3\left(\varrho^3\cos^3\varphi - \frac{3}{10}\varrho^7\cos^2\varphi\cos 5\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}\varrho^{11}\cos^2\varphi\cos 9\varphi + \cdots\right) = -\left(\frac{2a}{K}\right)^3\left\{\varrho^3\left(\frac{3}{4}\cos\varphi + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\cos 3\varphi\right) - \frac{3}{20}\varrho^7\left(\frac{1}{2}\cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \frac{1}{2}\cos 7\varphi\right) +$$
$$\left. + \frac{1}{16}\varrho^{11}\left(\frac{1}{2}\cos 7\varphi + \cos 9\varphi + \frac{1}{2}\cos 11\varphi\right) + \cdots\right\},$$

und

$$(xy\,dx)_{\varrho=const.} = -\left(\frac{2a}{K}\right)^3\left(\frac{1}{2}\varrho^2\sin 2\varphi - \frac{1}{10}\varrho^6\sin 6\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{7}{150}\varrho^{10}\sin 10\varphi - \cdots\right)\left(\varrho\cos\varphi - \frac{1}{2}\varrho^5\cos 5\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}\varrho^9\cos 9\varphi - \cdots\right)d\varphi = \left(\frac{2a}{K}\right)^3\left\{\varrho^3\left(\frac{1}{4}\sin\varphi + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\sin 3\varphi\right) - \varrho^7\left(-\frac{1}{8}\sin 3\varphi + \frac{1}{20}\sin 5\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{7}{40}\sin 7\varphi\right) + \varrho^{11}\left(\frac{1}{40}\sin\varphi - \frac{3}{32}\sin 7\varphi + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{7}{300}\sin 9\varphi + \frac{341}{2400}\sin 11\varphi\right) - \cdots\right\}d\varphi,$$

---

2) *Ibid.*

also

$$\int_R xy\,dx = \pm \left(\frac{2a}{K}\right)^3 \Big\{ \varrho^3 \left(\frac{1}{4} \cos\varphi + \frac{1}{12} \cos 3\varphi\right) -$$

$$- \varrho^7 \left(-\frac{1}{24} \cos 3\varphi + \frac{1}{100} \cos 5\varphi + \frac{1}{40} \cos 7\varphi\right) +$$

$$+ \varrho^{11} \left(\frac{1}{40} \cos\varphi + \frac{3}{224} \cos 7\varphi + \frac{7}{2700} \cos 9\varphi +\right.$$

$$\left. + \frac{31}{2400} \cos 11\varphi\right) + \cdots \Big\},$$

wo das obere Vorzeichen sich auf die äussere Randkurve bezieht.

Setzen wir diese Werte in die Randbedingung ein und nehmen χ_2 in Form von der Reihe

$$\chi_2 = \left(\frac{2a}{K}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{2n-1}\, \varrho^{2n-1} + D_{2n-1}\, \varrho^{-(2n-1)}\right) \cos(2n-1)\varphi,$$

dann lassen sich die Koeffizienten C_{2n-1} und D_{2n-1} aus der Randbedingung bestimmen. In *erster* Annäherung, wo wir uns auf ein Glied in der Reihenentwicklung von z, bzw. auf die Glieder mit ϱ^3 beim Grenzwert von χ_2, beschränken, haben wir

$$C_1 = 4{,}81 + 4{,}36\,\sigma, \quad D_1 = -4{,}06 - 3{,}86\,\sigma;$$

$$C_3 = 0{,}62 + 0{,}55\,\sigma, \quad D_3 = -0{,}37 - 0{,}38\,\sigma.$$

In der *zweiten* Annäherung bleiben C_1 und D_1 unverändert, dagegen für C_3 und D_3 bekommt man Korrekturen:

$$\Delta C_3 = 0{,}17 + 0{,}18\,\sigma, \quad \Delta D_3 = -0{,}11 - 0{,}09\,\sigma,$$

und selberzeit

$$C_5 = -0{,}09 - 0{,}02\,\sigma, \quad D_5 = 0{,}02 + 0{,}00\,\sigma;$$

$$C_7 = -0{,}11 - 0{,}05\,\sigma, \quad D_7 = 0{,}03 + 0{,}00\,\sigma.$$

Ich habe weiter nicht gerechnet, glaube aber, dass es für die „technische Biegungslehre" von Nutzen wäre, diese Rechnung weiter durchzuführen und angesichts der schon erwähnten Tatsache, dass die betreffenden Werte der Schubspannungskomponenten auch für die auf Fig. 2[3]) dargestellte Querschnittsform gelten, diese Werte mit denen zu vergleichen, die S. Timoshenko[4]) durch *soap-film method* und K. Huber[5]) durch direkte Messung der Winkeländerungen für das gebogene **I** gewonnen haben.

---

[3]) *Ibid.*

[4]) „*Theory of Elasticity*", New York & London, 1934.

[5]) „*Festschrift August Föppls*", 1923, p. 25.