Ensembles ordonnés et ramifiés

Par

GEORGES KUREPA.

Introduction.

La théorie des ensembles ordonnés s'est heurtée, dès son début, à des problèmes présentant de sérieuses difficultés d'ordre plutôt logique que technique; tels sont: le problème de l'ordonnance ou de la bien-ordonnance d'un ensemble donné quelconque [1]), le problème de l'existence d'un nombre cardinal entre k et 2^k, k étant un nombre cardinal infini quelconque [2]). Ensuite, Michel Souslin [3]), un des premiers élèves de M. Lusin, a posé, dès 1917, le problème de savoir si tout ensemble ordonné con-

---

1) Ce problème est *partiellément* résolu par l'affirmative par M. Zermelo (en formulant „l'Axiome de Zermelo") et M. Fraenkel (en prouvant l'indépendance de l'axiome de Zermelo des autres axiomes de la théorie des ensembles); cependant, on est loin de prouver que l'axiome de Zermelo est *indépendant* d'un système *non-contradictoire* d'axiomes de la théorie des ensembles.

2) La réponse présumée négative à ce problème est appelée Hypothèse de Cantor.

3) C'est lui qui, avec M. Lusin, a inventé, en 1917, en généralisant les ensembles boreliens, les ensembles analytiques dont la théorie nous jette un peu de lumière sur la structure du Continu mathématique.

tinu E tel que $p_2E = \aleph_0$ est nécessairement identique, au point de vue de l'ordre, au continu mathématique [4]), ou, ce qui revient au même à la suite d'un théorème de Cantor, si un tel ensemble E est tel que $p_1E = \aleph_0$.

Malgré des efforts continuels d'un grand nombre de mathématiciens, aucun des trois problèmes fondamentaux précédents n'est complètement résolu. Dans le présent travail, on a traité un ensemble de problèmes se rattachant au problème de Souslin. Bien que celui-ci ne soit pas définitivement résolu, on verra quelle est sa nature et quelles sont les difficultés qui s'opposent à sa solution. Voici le véritable aspect du problème de Souslin: E étant un ensemble ordonné continu, on se donne *la donnée cellulaire* $p_2E = \aleph_0$, et on se demande quelle est la valeur du nombre p_1E *dont le caractère est ponctuel* [5]). Au sein de tableaux ramifiés ($\equiv$ arbres généalogiques), le problème de Souslin est revêtu d'un caractère ponctuel. En effet, la réponse affirmative au problème de Souslin est une conséquence de l'une quelconque des deux hypothèses suivantes: 1) Toute suite ramifiée distinguée contient un sous-ensemble disjonctif non-dénombrable; 2) T étant un tableau ramifié quelconque, la borne supérieure $b\,T$ des puissances des sous-ensembles dégénérés [6]) de T est, dans T, atteinte; c'est-à-dire, T contient un sous-ensemble dégénéré ayant la puissance $b\,T$ (Postulat de ramification).

Une fois qu'on se trouve dans le domaine de tableaux ramifiés, un grand nombre de problèmes se posent d'eux-mêmes;

---

[4]) L'ensemble des nombres réels x tels qne $0 \leq x \leq 1$ est appelé Continu mathématique.

[5]) C'est par l'analyse précédente que nous avons pu formuler le Problème de la structure cellulaire des espaces abstraits (voir la note (11) du „Complement").

[6]) Un arbre généalogique A est *dégénéré* si aucun couple de ses éléments, sauf ceux appartenant à la première génération de A, n'ont, dans A, les mêmes, préd écesseurs.

notons celui-ci qui, par sa structure logique, occupe une place à part [7]): Deux suites distinguées quelconques de rang ω_1 sont-elles nécessairement semblables? (Premier problème miraculeux[8]).

La réponse affirmative au problème précédent entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin; celle-ci, de sa part, entraîne cette proposition que nous ne savons pas prouver: Tout sous-ensemble non-dénombrable de σ_0 [9]) contient une famille non-dénombrable d'ensembles dont aucun n'est contenu dans aucun autre. Pour que, inversement, la proposition précédente entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin, on devrait, ce que nous ne savons pas faire, démontrer que toute suite distinguée de rang ω_1 est semblable à un sous-ensemble de σ_0 [9]).

Il est remarquable que, en attaquant, en liaison avec le problème de Souslin, différents problèmes concernant des

---

[7]) Tout en croyant que la réponse à ce problème ne soit pas négative, il n'y a aucun éspoir d'en pouvoir donner une affirmative parce que celle-ci exige un passage à la limite non-denombrable d'homéomorphies partielles non-denombrables mutuellement enchevêtrées (c'est surtout M. Lusin qui a insisté sur la possibilité de tels phénomènes).

[8]) Dans le langage courant, le Premier problème miraculeux s'exprime ainsi: Soient A^1, A^2 deux arbres généalogiques *infinis non-dénombrables* quelconques vérifiant ces conditions: a) Toute génération de A^i, $(i=1,2)$ est infinie et dénombrable, b) A tout élément a de A^i correspond une infinité d'autres éléments de A^i, $(i=1,2)$ ayant les mêmes prédécesseurs que a, c) Tout élément de A^i a au moins un *parent direct* dans toute génération de A^i, $(i=1,2)$, d) Tout sous-ensemble d'individus de A^i, $(i=1,2)$ deux à deux en parenté *directe* est au plus dénombrable (L'existence de tels A a été prouvée, pour la première fois, par M. N. Aronszajn cf. Note 9·3); peut-on, alors, établir une *correspondance biunivoque* entre les éléments de A^1 et ceux de A^2 *conservant leur degré de parenté.*

[9]) σ_0 désigne la famille des sous-ensembles bien-ordonnés non-vides et bornés de l'ensemble des nombres rationnels. Si l'on considère les éléments de σ comme complexes de points, σ_0 devient un tableau ramifié jouissant d'intéressantes propriétés. (V. Lemme 10·4).

tableaux ramifiés — tels que l'existence d'une descente disjonctive dans toute suite distinguée —, on se heurte à des difficultés qui, par un certain dualisme logique, nous rappelent des difficultés qu'on rencontre en voulant prouver l'Hypothèse de Cantor (pour le dualisme des mots „au moins un" et „tout" (sans exception, voir la note (17) du „Complément").

Quant à d'autres problèmes liés aux précédents, voir le Théorème fondamental du „Complément".

Enfin, dans un travail particulier, nous reviendrons sur une catégorie de problèmes liés au problème de Souslin, et chez lesquels c'est une certaine notion d'*uniformité* qui domine [10]).

Le présent travail se compose de trois parties:

Le Chapitre I traite des E [11]). Après avoir posé, dans le § 1, un certain nombre de définitions, on démontre, dans le § 2, quelques propriétés utiles des nombres transfinis, pour passer, dans le § 3, à l'étude des E: on prête une attention particulière à la distinction entre différentes espèces de portions de E à la suite de quoi on formule trois principes de l'induction; le § 3 se termine par la considération de certains sous-ensembles et sur ensembles d'un E donné [V. la signification de fE ($f = l, L, s, S$ u, v, w)]. Le § 4 contient une étude assez détaillée de familles monotones d'ensembles (commencée par MM. Zermelo et Kuratowski), et leur application à la définition des ensembles ordonnés (cf, le théorème 3 du § 4). Dans le § 5, on esquisse la notion de complexes de points (due à M. Hausdorff) et on étudie différentes opérations avec ceux-ci. Le § 5 rend compte de la liaison

---

10) A ce propos, cf. le „Postulate of Uniformity" de M. Veblen (Tr. Am. Math. Soc. 9, 1908, p. 166) aussi bien que le critère de M. Alexandroff-Urysohn sur la distanciabilité des espaces accessibles (pour son énon é, voir p. 220 des Espaces abstraits de M. Fréchet); voir aussi les hypothèses P_6, P_7 du „Complément" chez lesquelles c'est la notion d'une certaine *unicité* qui intervient.

11) E, T désigneront respectivement un ensemble ordonné et un tableau ramifié quelconques.

entre les espaces ordonnés et plusieurs catégories d'espaces étudiés par M. Fréchet; on y démontre que le continu mathématique est caractérisé, au point de vue de l'ordre, par la propriété d'être un espace ordonné continu distanciable. Le dernier § du Chap. I contient les notions importantes des familles disjonctives d'ensembles et des puissances $p_i E$, $(i = 0, 1, \ldots 5)$ attachées à un E, et différents théorèmes concernant celles-ci.

Le Chapitre II traite des T et E[11]). Le § 8 contient la définition des ensembles, tableaux et suites ramifiés, la notion de differents sous-ensembles d'un T (portion, noeud etc.), classification des T en larges, étroits et ambigus; on introduit la notion de familles et de tableaux ramifiés d'ensembles, on donne, en généralisant une idée due à M. Lebesgue la représentation de ceux-ci au moyen de complexes de points dont un cas particulier sera utilisé, dans le § 12 B, pour résoudre un problème de M. Sierpinski; on reprend l'étude de complexes en définissant leur *ordonnance naturelle* dont on fait, par la suite, usage à plusieurs reprises (Existence de suites distinguées, Second problème miraculeux. Hypothèses P_6 et P_7 du Complément, etc,). Le § 9 contient l'étude de quelques questions se rattachant à la notion importante de *traversées monotones et disjonctives* d'un T. Dans le § 10, on introduit la notion de *types de ramification* et, en établissant quelques théorèmes, on arrive au *Premier problème miraculeux*. Dans le § 11, on attache à tout T deux puissances bT, $b'T$, on définit des T *normaux* et on pose la question de l'existence des T anormaux. Enfin, dans le § 12, on revient aux E, on introduit la notion de *développement complet d'un E* et en particulier celle d'une *ϑ-partition complète des E continus;* on redonne la solution d'un problème de Sierpinski et on arrive au problème de Souslin et à la notion de *E normaux*.

Quant au „*Complément*", sa lecture est particulièrement recommandée.

L'origine de ce travail était l'idée de généraliser les espaces distanciés de M. Fréchet en faisant jouer le rôle de nombres réels aux éléments d'un ensemble ordonné quelconque (Cf. la définition des espaces pseudo-distanciés dans les C. R. de Paris, 30 avril 1934); quelques résultats ont paru dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (19 Février, 5 Mars et 9 Juillet 1934).

Pour terminer, j'exprime ma plus vive reconnaissance à M. V. Varićak, Professeur à l'Université de Zagreb, pour ses encouragements et l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à mes travaux. Qu'il me soit permis d'adresser l'expression de ma profonde gratitude envers MM. Borel et Hadamard. Je remercie infiniment: M. Montel de ces conseils et des innombrables services qu'il a bien voulu me rendre, M. Fréchet de ses précieux conseils et de l'intérêt constant qu'il a porté à mes travaux, et M. Denjoy de ces conversations, instructives et encourageantes à la fois.

CHAPITRE I

ENSEMBLES ORDONNÉS DE POINTS

§ 1. Définitions générales.

1. x, y, étant deux objets[1]), la lettre R, dans un symbole de la forme $x\ R\ y$, est une relation binaire dont x est le premier et y le second terme.

Si la relation binaire R subsiste entre tout couple de points d'un ensemble E, on dira que E est *domaine de* R.

Si $x\ R\ x$ est vraie pour tout x, la relation R sera dite *réflexive*. Si $x\ R\ x$ n'est vraie pour aucun x, R sera dite *anti-réflexive*.

Si $x\ R\ y$, $y\ R\ x$ subsistent simultanément pour tout x et tout y, R sera dite *symétrique*; si cela n'a lieu pour aucun couple x, y, R sera dite *anti-symétrique*.

Si $x\ R\ z$ subsiste toutes les fois que $x\ R\ y$, $y\ R\ z$, R sera dite *transitive*. Si cela n'arrive pour aucun triple de points, la relation R sera dite *anti-transitive*.

---

[1]) Le mot „objet" est le nom commun pour „élément" et „ensemble" tels qu'il sont axiomatisés, par ex. par M. E. Zermelo (Fund. Math. 16, 1930, p. 29 et suiv.). Si a est un élément d'un ensemble E, on écrira $a \varepsilon E$ ou $E \ni a$; dans le cas contraire, on écrira a non εE; E, F étant deux ensembles, on écrira $F \subseteq E$ ou $E \supseteq F$ si tout élément de F est un élément de E : F sera dit alors un *sous-ensemble* de E, et E un *sur-ensemble* de F.

Si $F \subseteq E$ sans que $E \supseteq F$, on ecrira $F \subset E$ et dira que F (E) est un vrai *sous-ensemble* (sur-ensemble) de E(F). En désignant l'ensemble vide par 0, le symbole $0 \subset E$ voudra dire que E n'est pas vide, c'est à dire $p\ E > 1$, $p\ E$ désignant la *puissance de* E: a étant un objet quelconque, on désignera, en cas d'ambiguité, par $\{a\}$ l'ensemble (ou la famille) composé de l'élément a.

2. Une relation réflexive, symétrique et transitive sera appelée *relation de classification* ou simplement *classification*, et designée par le symbole particulier $\sim$ qu'on pourra lire „équivalent", „congruent", etc.

L'identité est une relation de classification. Soient E le domaine d'une classification $\sim$ et a un élément de E; en appelant *faisceau a de E* l'ensemble E_a de tous les points x de E tels que $x \sim a$, on a ce

Lemme I: $E = \sum_a E_a$ [2]), $a \varepsilon E$; les E_a sont tels que $E = E_b$ si $a \sim b$, et $E_a E_b = 0$ si a non$\sim b$.

3. *Une relation d'ordre* est une relation binaire qui est anti-réflexive, anti-symétrique et transitive; elle sera désignée par le symbole $<$ qu'on pourra lire „précède", „inférieure à" „avant", etc.

Le signe $a < b$ sera écrit aussi sous la forme $b > a$.

On voit que le signe $>$ est aussi une relation d'ordre ayant le même domaine que la relation $<$. La relation $>$ sera dité *relation inverse de* $>$ *et* lue „succède à" „plus grand que", „après" etc.

4. Un ensemble de points, E, sera dit *ordonné* si l'on peut établir, entre ses points, une relation d'ordre $<$; autrement dit[3]), un ensemble ordonné E est une paire d'un ensemble de points, P, et d'une relation d'ordre $<$ ayant P pour domaine. On écrira $E = (P, <)$. De plus, l'ensemble vide et tout ensemble composé d'un seul élément seront considérés comme d'ensembles ordonnés. (cf. relation de comparabilité dans le § 8).

L'ensemble ordonné $(P, >)$ sera designé par E^* et appélé *inverse de E.*

Dorénavant, sauf mention expresse du contraire, E désignera un ensemble ordonné. F étant un sous-ensemble de E, F sera considéré comme *ordonné* par la même relation d'ordre par

---

[2]) Φ étant une classe de familles $\mathcal{F}$ d'ensembles E de points a, le signe $\Sigma\Phi$ désignera la réunion de tous les points a. Le signe $\Sigma'\Phi$ désignera la famille de tous les E appartenant à au moins une famille $\mathcal{F}$. D'une façon analogue, on définit $\Pi\Phi$ et $\Pi'\Phi$. En particulier, deux ensembles E, F, tels que $EF = 0$ seront dits *disjoints*.

[3]) Cette définition est due à M. M. Fréchet.

laquelle E est ordonné. En particulier, $\mathcal{F}$ étant une famille de sous-ensembles de E, l'ensemble ΣF sera toujours considéré comme un sous-ensemale ordonné de E. A, B, étant deux ensembles non-vides de E, le signe $A < B$ voudra dire que tout point de A précède tout point de B.

Convention 1. L'ensemble vide pourra, dans le cas général, précéder et succéder, à la fois, à tout point de chaque ensemble ordonné. En particulier, si $A < B$, on aura aussi $A < 0 < B$.

5. G, H étant deux sous-ensembles de E, les symboles $(.\,, G)_H$ et $(G, .)_H$ désigneront respectivement l'ensemble de tous les points de H qui *précèdent* les points de G et l'ensemble de tous les points de H qui *succèdent* aux points de G. En particulier, a étant un point de E, l'ensemble $(.\,, a)_E$ ou simplement $(.\,, a)$ sera appelé *intervalle de E à gauche de a* ou, ce qui est plus commode, *intervalle gauche a de E.*

L'ensemble $(.\,, a]_E + a$ sera appelé *segment gauche a de E* et designé par $(.\,, a]_E$ ou $(.\,, a]$. D'une façon analogue[4]), on définit *le segment droit a de E* qu'on désignera par $[a\,, .)_E$ ou $[a\,, .)$. Le point a sera dit *extrémité* de $(.\,, a)$, $(.\,, a]$, $(a\,, .)$ et de $[a\,.,)$. a, b étant deux points différents d'un E tel que $pE > 1$, l'ensemble ordonné

$$(a\,, .)\ (.\,, b) + (b\,, .)\ (.\,, a)$$

sera appelé *intervalle a b ou b a de E* et désigné par $(a, b)_E$ ou (a, b) ou $(b, a)_E$ ou (b, a); autrement dit (a, b) est l'ensemble de tous les points x de E tels que $a < x < b$ si $a < b$ ou $b < x < a$ si $b < a$;

L'ensemble $a + (a, b) + b$ sera appelé *segment a b ou b a de E* et designé par $[a, b]_E$ ou $[a, b]$ ou $[b, a]_E$ ou $[b, a]$. Le signe $x \varepsilon (a, b)_E$ sera lu aussi: *x est entre a et b* ou entre b et a.

On posera $[a, b)_E = a + (a, b)$, $(a, b]_E = b + (a, b)$.

---

4) On remarquera, une fois pour toutes, que les expressions telles que: gauche-droit, premier-dernier, etc. sont dans une certaine dépendance dualistique, parce que, par exemple, „gauche" dans E veut dire „droit" dans E^*. C'est ainsi que par exemple *le segment droit a de E* veut dire „le segment gauche a de E^*".

5) Cf. A. Denjoy, Journal de Math. I, 1915, p. 106.

Les points a, b seront appelés *extrémités* de $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ et (a, b).

Les intervalles (segments), les intervalles (segmentes) gauches et droits de E, seront appelés, tout court, *intervalles (segments)* de E[5]).

6. L'ensemble vide, tout ensemble composé d'un seul point de E, les segments, les intervalles et les ensemble $[a, b)_E$ et $(a, b]_E$ seront appellés, en commun, *portions élémentaires de E.* Tout sous-ensemble F de E tel que $[a, b)_E \subseteq F$ si $a + b \subseteq F$, a, b étant quelconques, sera dit *portion de E.* Par conséquent, tout point de E est une portion de E. Tout sous-ensemble F de E tel que $(. , a]_E \subseteq F$ si $a \varepsilon F$, a étant quelconque, sera appelé *portion gauche de E.*

L'ensemble vide sera considéré comme une portion, portion gauche et portion droite de E.

7. Un sous-ensemble non-vide F de E sera dit *borné inférieurement dans E* s'il est contenu dans un *segment droit* de E. On dira que F est *limité inférieurement* s'il contient un point a tel que $[a , .)_E \supseteq F$. Le point a sera dit alors le *premier* point de F. On dira que F est *borné* dans E, s'il est borné, dans E, inférieurement et supérierement, c'est à dire s'il appartient à un segment de E. F sera dit *limité* s'il a un *premier* et un *dernier* point.

Si E n'a ni un premier ni un dernier point, il sera dit *anti-limité.* Par conséquent, un ensemble non-limité, n'est pas nécessairement anti-limité. L'ensemble vide sera considéré comme anti-limité.

On dira que la *borne supérieure*[6]) relativement à E, d'un sous-ensemble non-vide F de E *existe* et qu'elle est égale à a si a est *ou bien* le dernier point de F ou bien, si F n'a pas un dernier point, alors a est le premier point de $(F , .)_E$.

8. Si tout sous-ensemble non-vide de E est *limité*, E sera dit *fini*; dans le cas contraire, E sera dit *infini.* Si tout sous-ensemble non-vide de E a un premier (dernier) point, E sera

---

[6]) Cf. R. Baire, Leçons sur les théories générales de l' Analyse, Paris, 1907, t. I p. 7 et suiv.

dit *bien ordonné* (inversement bien ordonné). L'ensemble vide sera considéré comme fini, bien-ordonné et inversement bien-ordonné. On s'aperçoit que cette définition des ensembles finis est équivalente à la définition courante[7]).

9. *Espaces ordonnés.* F étant un sous-ensemble de E, la fermeture $\overline{F}$ de F relativement à E est l'ensemble de tous les points a de E tels que dans tout *intervalle* de E contenant a, il y ait au moins un point de F[3]). Tout point a de E appartenant à la fermeture de $F-a$ sera appelé *point d'accumulation de* F[3]) (relativement à E). En particulier, si a appartient à la fermeture de $(\,.\,,a)_E$, a sera dit point d'accumulation de F *du côté gauche.* Si a est un point d'accumulation de F du côté gauche et du côté droit, a sera dit point d'accumulation *bilatérale* de F. *L'ensemble dérivé* F' de F, relativement à E, sera l'ensemble de tous les points d'accumulation de F. Tout point de F qui n'est pas un point d'accumulation de F, sera dit point *isolé* de F. Si $F' \subseteq F$, F sera dit *fermé.* Si $F' \supseteq F$, F sera dit *dense en soi.* F ayant au moins deux points sera dit *dense* (au sens absolu) si tout point a de F est un point d'accumulation aussi bien de $(\,.\,,a)_E$ si $(\,.\,,a)_F \supset 0$ que de $(a\,,\,.)_F$ si $(a,.) \supset 0$.

G, H étant deux sous-ensembles de E, on dira que G *est partout dense sur* H *si* $\overline{G} \supseteq H$[8]). Sous la même hypothèse, on dira que G, H sont *mutuellement connexes*[3]) si $\overline{G}H + G\overline{H} \supset 0$.

Un sous-ensemble F de E sera dit *connexe* si, en le décomposant d'une manière quelconque en deux sous-ensembles, ceux-ci sont mutuellement *connexes*[3]).

Convention 2. Sauf mention expresse du contraire, tout ensemble ordonné composé d'un seul point sera considéré comme non-connexe[8]).

Remarque. D'après ce qui précède, on doit *distinguer* les *espaces* ordonnés des *ensembles* ordonnés ou, comme on les

---

7) Sur la théorie des ensembles finis, voir A. Tarski, Fund. Math., VI, 1922, p. 45-95.

8) Pour la terminologie, voir M. Fréchet, Espaces abstraits, Paris 1928, p. 173 et 288; W. Sierpinski, Nombres transfinis, Paris, 1926, chap. VII; et F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914 p. 474. Ces trois livres seront désignés, dans ce qui va suivre, respectivement, E. A., N. T. et G. M.

appellera dans le second chapitre, ensembles *monotones*, un *espace ordonné* étant un ensemble ordonné dans lequel l'opération de dérivation, qu'on vient de définir, des sous-ensembles de E est donnée (ou ce qui revient au même, si l'on se donne l'opération de faire correspondre à tout $F \subseteq E$ un $\overline{F} \subseteq E$). Cette remarque sera utile dans la suite[9]).

10. Chaque décomposition de E en *deux portions disjointes* sera appelée *coupure de E*. Excepté le cas où l'une des portions en question est vide, on voit que l'une d'elle est à gauche de l'autre. Si l'une d'elles est vide, on aura *deux coupures différentes* suivant qu'on prend la portion vide pour la portion gauche ou droite et alors l'ensemble E lui, même pour portion droite ou gauche. Alors la portion qui est à gauche de l'autre, sera appelée *composant inférieur de la coupure* en question, ou (portion à gauche de la coupure).

P étant une portion de E, la *coupure P de E* signifiera la décomposition $E = A + P + B$, $A < P < B$ c'est à dire la décomposition $E = (\,.\,, P)_E + P + (P\,,\,.\,)_E$.

On dira qu'une coupure de E *ouvre une lacune de E* (ou dans E) si la portion à gauche de la coupure n'a pas un dernier élément et si sa portion droite n'a pas un premier élément; si, de plus, les deux portions sont non-vides, la lacune correspondante sera dite *intérieure*. Si E a au moins une lacune, il sera dit *lacunaire;* dans le cas contraire, E sera dit *non-lacunaire. L'ensemble vide sera* considéré comme *lacunaire*. On dira que la coupure AB de E *est engendrée* par le saut $A\dot{\cdot}B$ ou $a\,b$ de E si a est le dernier point de A et b le premier point de B.

11. D'une manière générale, tout couple de points différents a, b de E *entre lesquels* il n'y a aucun point de E c'est à dire qui sont tels que $(a, b)_E = 0$, sera appelé *un saut de E*; les deux points seront appelés *extrémités* du saut. Si les extrémités d'un saut de E sont points d'accumulation de E, le saut sera dit de *seconde espèce*. Tout saut qui n'est pas de seconde espèce, sera dit de *première espèce* (Cf. la définition des nombres ordinaux de première et de seconde espèce dans le § 2).

---

[9]) Cette remarque est due à M. Fréchet.

12. Un ensemble ordonné *dense* et non-lacunaire sera dit *continu*.

P étant une propriété quelconque d'intervalles, on dira que E *possède partout la propriété* P ou que E *possède totalement la propriété* P, si tout intervalle non-vide de E possède la propriété P. On saura alors la signification des notions: partout lacunaire, totalement non-connexe, etc.

13. G, H étant deux sous-ensembles non-vides d'un ensemble ordonné E, on dira que G, H sont *confinaux* (coïnitiaux) si *ou bien* ils ont le même dernier (premier) élément *ou bien* après (avant) tout point de G il y a un point de H et après (avant) tout point de H il y a un point de G.

Si G, H sont coïnitiaux et confinaux, ils seront dits *coextensifs* [10]).

14. Deux ensembles ordonnés sont dits *semblables* si, entre leurs points, on peut établir une correspondance bi-univoque conservant l'ordre relatif des points.

A chaque E on fera correspondre un et un seul signe tE appelé *type ordinal de* E. Le symbole $tG \leqslant tH$ ou $tH \geqslant tG$ voudra dire que G est semblable à un sous-ensemble de H. On écrira $tG = tH$ si $tG \leqslant tH$ et $tG \geqslant tH$. Enfin, le symbole $tG \parallel tG$ signifiera qu'aucun des signes $tG \leqslant tH$ et $tH \leqslant tG$ n'ait lieu. Dans le dernier cas, on dira que tG et tH sont *incomparables* [11]).

Convention 3. Dans une certaine phrase, on dira, par abréviation, *type ordinal* α au lieu de : tout type ordinal α qui substitué à α dans P ne change pas le sens de cette phrase.

15. F étant un ensemble ordonné, soient E_a, a parcourant F, les éléments d'une famille d'ensembles ordonnés qui sont, pour des a différents, deux à deux disjoints; alors *l'ensemble-somme* $E = \sum_F E_a$ signifiera la réunion des points des E_a ordonnée de manière que les points d'un même E conservent leur ordre primitif et $E_a \lesseqgtr E_b$ dans E suivant que $a \lesseqgtr b$ dans F.

---

10) G. M. p. 130.

11) Cf. G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Berlin-Leipzig 1932 p. 282; et E. A. p. 31 et suiv.

On posera $tE = \sum_F tE_a$. A, B étant deux ensembles ordonnés, le *produit* (combinatoire) $A \times B$ de A et B est l'ensemble de tous les couples (b, a), $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$ ordonnés *alphabétiquement* (d'après le *principe de premières différences*):

On posera $(b', a') = (b, a)$ si $b = b'$ et $a = a'$; on posera $(b', a') \lesseqgtr (b, a)$ dans $A \times B$ suivant que ou bien $b' \lesseqgtr b$ dans B ou bien $b' = b$ et $a' \lesseqgtr a$ dans A (cf. §§ 5 et 13).

§ 2. Sur les nombres transfinis.

A. Nombres ordinaux.

1. Les types ordinaux des ensembles bien ordonnés s'appellent *nombres ordinaux* ou simplement *ordinaux*[1]). Tout nombre ordinal qui est un point d'accumulation d'autres nombres ordinaux sera dit de *seconde espèce*. Tout ordinal qui n'est pas de seconde espèce sera dit de *première espèce*. On désignera par $p\alpha$ et on appelera puissance du nombre ordinal α la puissance de l'ensemble de type ordinal α.

2. Un ordinal α étant donné, *le type-limite* $\tau\alpha$ *de* α est défini comme suit[2]): si α est de première espèce, alors $\tau\alpha = \alpha$; si α est de seconde espèce, $\tau\alpha$ est la borne inférieure, relativement à l'ensemble des ordinaux, des nombres ordinaux ξ tels que α soit la borne supérieure d'une ξ-suite d'ordinaux $< \alpha$[3]). Si $\tau\alpha = \alpha$, α sera dit *régulier*; si $\tau\alpha < \alpha$, α sera dit *singulier*. Si α est régulier et de seconde espèce, il sera appelé *inaccessible*[4]).

---

[1]) Pour la théorie axiomatique des nombres ordinaux, voir A. Fraenkel, J. für Math., 155, 1926, p. 129-158; J. v. Neumann, Math. Ann., 99, 1928, p. 373-391.

[2]) La notion de $\tau\alpha$ interviendra très fréquemment dans le chap. II.

[3]) Tout ensemble bien ordonné de type ordinal φ s'appellera aussi une φ-suite. Il est à remarquer que, α étant un ordinal, l'ensemble $(., \alpha)$ des ordinaux précédant α forment une α-suite (voir N.T.p. 171).

[4]) Concernant la théorie des nombres inaccessibles, voir A. Tarski-W. Sierpinski, Fund. Math., 15, 1930 p. 292-300; quant à leur existance et interprétation, voir E. Zermelo, loc. cit. §§ 2 et 5.

Tout ordinal infini dont la puissance est supérieure à celle d'un ordinal quelconque qui le précède, sera dit *initial.* Les nombres initiaux seront désignés par:

$$\omega_0,\ \omega_1, \ldots \omega_\alpha, \ldots \quad \text{pour tout ordinal} \quad \alpha \geqslant 0,$$

$\omega \equiv \omega_0$ signifiant le plus petit ordinal initial et ω_α pour $\alpha > 0$, désignant la borne inférieure des ordinaux β tel que $p\beta > p\omega_\xi$, $\xi < \alpha$.

On posera $p\omega_\alpha = \aleph_\alpha$ et lira *aleph* α.

Pour la suite, il faut retenir qu'on posera:

$$\tau\aleph_\alpha = \tau\omega_\alpha.$$

On parlera d'alephs $\aleph_\alpha$ réguliers, inaccessibles, etc., suivant que le sont les ω_α correspondants. Les alephs seront appelés aussi *nombres cardinaux transfinis* (ou infinis).

Lemme 1. Le type-limite $\tau\alpha$ de tout ordinal α est un ordinal régulier bien déterminé et tel que $\tau\alpha \leqslant \alpha$.

Corollaire 1. Toute nombre ordinal est ou bien singulier ou bien régulier.

Lemme 2. La borne inférieure de toute ensemble E d'ordinaux appartient à E. Si $pE < p\tau\gamma$, γ désignant la borne supérieure de E, alors $\gamma \varepsilon E$.

S'il s'agit des nombres cardinaux, le lemme précédent s'énonce comme suit:

Lemme 2': Soient E un ensemble quelconque de nombres cardinaux et c la somme de ceux-ci; si $pE < p\tau c$, alors le nombre cordinal c appartient à E.

Le lemme précédent interviendra assez fréquemment dans le chapitre II.

3. E étant un ensemble d'ordinaux et γ_0 sa borne inférieure, on dira que $\varphi(\alpha)$ est une *fonction rétractante dans* E si pour tout $\alpha \varepsilon E$, $\varphi(\alpha)$ est un nombre ordinal tel que $\varphi(\gamma_0) \leqslant \gamma_0$ et $\varphi(\beta) < \beta$ pour tout $\beta \varepsilon E - \gamma_0$.

En rappelant que $(\,.\,,\alpha)$ désigne l'ensemble des ordinaux $< \alpha$, on a ce

Théorème 1. Soient γ un nombre ordinal de seconde espèce tel que $\tau\gamma > \omega_0$ et $\varphi(\alpha)$ une fonction rétractante définie dans $(\cdot\,,\gamma)$; alors, il existe un ensemble $E \subset (\cdot\,,\gamma)$ avant γ pour borne supérieure et tel que $\varphi(\alpha) < E$ pour tout $\alpha \varepsilon E$.

En effet, *ou bien* pour *tout* $\alpha < \gamma$ il existe un nombre ordinal $\nu(\alpha)$ tel que $\alpha < \nu(\alpha) < \gamma$ et que, pour tout β entre $\nu(\alpha)$ et γ, on ait $\alpha < \varphi(\beta)$ *ou bien* il y a un ordinal $\alpha < \gamma$ pour lequel un tel nombre $\nu(\alpha)$ n'existe pas. Si le premier cas avait lieu, on poserait $\beta_0 = 1$, $\beta_{n+1} = \nu(\beta_n)$, $n = 0,1,\ldots$ et β_{ω_0} = borne sup. β_n; on voit qu'on aurait $\varphi(\beta_{\omega_0}) \geqslant \beta_{\omega_0}$ et $\beta_{\omega_0} < \gamma$, contrairement à la définition de la fonction $\varphi(\alpha)$.

Il y a donc un nombre, et soit α_0 le premier nombre ordinal $\xi < \gamma$ tel que, pour tout β entre ξ et γ il y ait un nombre α entre β et γ tel $\varphi(\alpha) \leqslant \xi$. En désignant par E l'ensemble de tous les $\alpha \varepsilon (\alpha_0, \gamma)$ tels que $\varphi(\alpha) \leqslant \alpha_0$, on voit que E satisfait aux conditions du théorème.

Corollaire 2. γ étant un nombre initial régulier non-dénombrable et $\varphi(\alpha)$ une fonction rétractante définie pour tout $\alpha < \gamma$, il existe un nombre $\alpha_0 < \gamma$ et un ensemble $E \subset (\cdot\,,\gamma)$ ayant γ pour borne supérieure tel que $\varphi(\alpha) = \alpha_0$ pour tout $\alpha \varepsilon E$[5]).

Ce corollaire exprime une propriété intéressante des nombres ordinaux, à savoir que la fonction inverse de chaque fonction rétractante définie pour tout $\alpha < \gamma$, γ étant initial, régulier et non-dénombrable, possède une infinité de puissance $p\gamma$ de déterminations différentes.

---

[5]) Ce corollaire est dû, pour $\gamma = \omega_1$ à M. P. Alexandroff et P. Urysohn (voir Proc. Ac. Si., Amsterdam, Eerste sectie, Deel XIV n⁰ I, 1929 p. 95).

Une fonction rétractante est le pendant logique aux fonctions telles que $\varphi(\alpha) \geqslant \alpha$ pour tout ordinal α. Si on appelle *fonction normale* chaque fonction uniforme $\varphi(\alpha)$ définie pour *tout* α et telle que $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$ si $\alpha < \beta$ et φ (borne sup. E) = borne sup. $\varphi(\alpha)$ E étant un ensemble quelconque d'ordinaux, on démontre qu'il y a de „valeurs critiques" de $\varphi(\alpha)$ telles que $\varphi(\alpha) = \alpha$ (voir O. Veblen, Trans. Am. Math. Soc. 9, 1908, p. 280; et G. M. p. 114) Par exemple, la fonction $\varphi(\alpha) = \omega_\alpha$ est une fonction normale et tout nombre ordinal inaccessible est une valeur critique de ω_α; la réciproque n'a pas lieu (N. T. p. 226). Cependant, M. E. Zermelo a construit une fonction normale dont l'ensemble des valeurs critiques coïncide avec l'ensemble des ordinaux inaccessibles (loc. cit. p. 34).

Théorème 2. Tout ensemble ordonné non-vide n'ayant pas un dernier point est confinal avec un et un seul nombre initial régulier (voir la convention 1 · 3)[6]).

Corollaire 3. Le type-limite $\tau\alpha$ d'un nombre ordinal de seconde espèce est le nombre régulier avec lequel l'intervalle gauche α est confinal[7]).

B. Nombres cardinaux.

On sait que, en admettant le fameux axiome de M. Zermelo, on peut démontrer que toute puissance infinie est égale à un seul aleph[8]). En particulier α, β étant deux ordinaux quelconques, on peut écrire:

$$(1) \qquad \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma,$$

γ étant un ordinal déterminé, d'une manière unique.

Cependant, on ne connait aucun triple d'ordinaux vérifiant l'équation (1). Tout ce q'on peut dire dans l'état actuel des Mathématiques c'est ce:

Théorème 3. Si $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma$, alors $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta < \gamma$ et $\tau\beta \neq \tau\gamma$.

On se contentera de prouver que $\tau\beta \neq \tau\gamma$. Pour cela, il suffit de démontrer ce:

Lemme 3. Pour tout ordinal α, on a $\aleph_\alpha^{\aleph_{\tau\alpha}} > \aleph_\alpha$.

---

6) Ce théorème est dû a M. Hausdorff (G. M. p. 142).

7) A peine faut il rappeler que cela veut dire l'ensemble des ordinaux $<\alpha$. De même, (α, β) voudra dire l'intervalle $\alpha\beta$ de l'ensemble des nombres ordinaux, etc.

8) N. T. chap. XII. La réciproque est aussi vraie: si toute puissance est un aleph, l'axiome de Zermelo est démontrable. Rappelons aussi ce théorème de Hartogs: la comparabilité de deux puissances quelconques est une proposition logique équivalente à l'axiome de Zermelo (T. N. chap. XII).

Pour la théorie axiomatique des puissances, voir E. Zermelo, Math. Ann. 65, 1908 p. 261—281.

Cf. aussi la notion axiomatique de tE dans la définition 1·14.

En effet, si, dans (1), on avait $\tau\beta = \tau\gamma$, on aurait $\left(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\right)^{\aleph_{\tau\beta}} = \aleph_\gamma^{\aleph_{\tau\gamma}}$ et par conséquent, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ serait égal à la fois à $\aleph_\gamma$ et $\aleph_\gamma^{\aleph_{\tau\gamma}}$ ce qui est, d'après le lemme 3, impossible.

Démontrons donc le lemme 3. Distinguons deux cas:

1°. α est régulier: $\tau\alpha = \alpha$. Puisque $\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = 2^{\aleph_\nu}$ si μ, ν sont deux ordinaux quelconques tels que $\mu \leqslant \nu$ [9]), l'inégalité à démontrer se réduit à l'inégalité classique de Cantor, à savoir que $2^{\aleph_\nu} > \aleph_\nu$ pour tout ordinal ν.

2°. α est singulier. Soit

$$\alpha = \text{borne sup. } \alpha_\xi,\ \alpha_\xi < \alpha,\ \xi < \tau\alpha \text{ les } \alpha_\xi \text{ étant croissants.}$$

On a donc $\aleph_{\alpha_\xi} < \aleph_\alpha$ et d'après le théorème de König-Zermelo-Jourdain[11]), on a $\sum_{\alpha < \alpha\tau} \aleph_{\alpha_\xi} < \aleph_\alpha^{p\tau\alpha}$.

Puisque $\sum_{\xi < \tau\alpha} \aleph_{\alpha_\xi} = \aleph_\alpha$ et $p\tau\alpha \leqslant \aleph_{\tau\alpha}$, le lemme est démontré.

L'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *étant l'hypothèse du continu* [12]) l'hypothèse que, m étant une puissance quelconque infinie, il n'y ait

---

9) N. T. p. 220.

10) N. T. p. 89.

11) N. T. § 55.

12) Voir le livre récent de H. W. Sierpirski, „Hypothèse du continu" Warszawa, 1934, qui commence par cette phrase: „La question si l'ainsi dite *l'hypothèse du continu* est vraie ou non appartient aux problèmes les plus difficiles de la mathématique contemporaine".

M. D. Hilbert a donné une esquisse de démonstration de l'hypothèse du continu, mais nous ne savons pas si, n_1, $n_2 \ldots$ étant une suite d'entiers, le procédé itératoire de M. Hilbert finit par engendrer la suite n_1, $n_2 \ldots$ C'est à ce point de vue que sa démonstration reste inachevée (voir Math. Ann., 95, 1925 p. 161 et suiv. en particulier p. 186 et suiv.; aussi W. Ackermann, Math. Ann. 99, 1928 p. 118). Voir l'opinion de M. N. Lusin dans le livre de M. Sierpinski p. 3 et 4.

aucune puissance n telle que $m < n < 2^m$ s'appelle *l'hypothèse du continu généralisée*[13]) ou *l'hypothèse de Cantor;* elle sera désignée par (G). Sous cette hypothèse, on peut démontrer ce

Théorème 4.

1° Si $\alpha \leqslant \beta$, alors $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$.

2° si $\alpha \geqslant \beta$, $\tau\alpha \leqslant \tau\beta$, alors $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$.

3° si $\alpha + 1 \geqslant \beta$, alors $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$

4° si $\alpha > \beta$, $\tau\alpha = \omega_\delta$, $\beta < \delta$, alors $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.

5° si $\alpha > \beta$, $\tau\alpha = \omega_\delta$, $\beta \geqslant \delta$, alors $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$[14]).

Théorème 5. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, alors, $\aleph_\alpha^{\aleph_0} < \aleph_{\alpha+\omega_0}$, pour tout α[15]).

Dans la suite, on aura besoin de ce:

Théorème 6. *Pour tout nombre ordinal* α, *on a*

$$\sum_{\xi < \omega_{\alpha+1}} 2^{p\xi} = 2^{p\omega_\alpha}. \tag{2}$$

Sous l'hypothèse généralisée du continu, on a $\sum_{\xi < \omega_\alpha} 2^{p\xi} = p\omega_\alpha$.

En effet, pour tout $\xi < \omega_{\alpha+1}$, on a $2^{p\xi} \leqslant 2^{p\omega_\alpha}$; par conséquent,

$$2^{p\xi} \leqslant \sum_{\xi < \omega_{\alpha+1}} 2^{p\xi} \leqslant 2^{p\omega_\alpha} \cdot \aleph_{\alpha+1}.$$

Puisque $2^{\aleph_\alpha} \geqslant \aleph_{\alpha+1}$[16]), l'égalité (2) devient évidente.

---

13) Voir le livre précité de M. Sierpinski.

14) Le théorème est dû à M. A. Tarski, Fund. Math. 6, 1925 p. 1—14, en particulier p. 9 et 10. Aussi le chap. VII du livre précité de M. Sierpinski.

15) Voir la Note des C. R., 198, 1934 p. 703 où une généralisation est donnée. La démonstration paraîtra ailleurs.

16) Bien entendu en admettant l'axiome de Zermelo,

Sous l'hypothèse (G), on a $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$ et, par conséquent, aussi $\sum_{\xi<\omega_\alpha} 2^{p\xi}=p\omega_\alpha$.

§ 3. Propriétés élémentaires des espaces et des ensembles ordonnés.

Dans ce §, E désignera un espace ordonné, F, G, ... des ensembles, a, b, ... des points de E.

I.

Lemme 1. Si FRG signifie que F et G sont coextensifs, le signe R est une relation classifiante (Déf. 1·2, 1·13).

Lemme 2. $\mathcal{F}$ étant une famille *finie* d'ensembles de E, la somme $\sum\mathcal{F}$ est confinale avec un élément de $\mathcal{F}$.

II.

Lemme 3. P étant une portion de E, on a

(1) $E=(.\,,P)+P+(P.\,,)\ ,\ (.\,,P)<P<(P,.)$.

Si $P\supset 0$, cette décomposition est déterminée d'une manière unique; si $P=0$, toute coupure de E peut être mise sous la forme (1) (voir déf. 1·5, 1·6, 1·10 et la convention 1·1).

Lemme 4. Chaque famille de portions droites de E est une famille *monotone* d'ensembles (voir la def. 1·4),

Lemme 5. La partie commune de chaque famille de portion de E est une portion de E (qui est en général vide).

Lemme 6. $\mathcal{F}$ étant une famille de portion de E deux à deux non-disjointes, la somme $\sum\mathcal{F}$ est une portion de E.

Lemme 7. $\mathcal{F}$ étant une famille *finie* de portions de E telles que $\Pi\mathcal{F}\supset 0$, $\mathcal{F}$ contient deux éléments M_1, M_2 tels que $M_1+M_2=\sum\mathcal{F}$.

En effet, d'après le lemme 2, $\mathcal{F}$ contient un élément $M_1(M_2)$ qui est coïnitial (confinal) avec $\sum\mathcal{F}$. Puisque, par hypothèse, $\Pi\mathcal{F}\supset 0$, soit $x\in M_1M_2$. Alors, en posant $F=\sum\mathcal{F}$, il est clair que $(.\,,x)_F\subset M_1$, $(x,.)_F\subset M$ et, par conséquent, $F=M_1+M_2$ c. q. f. d.

Il est à remarquer que le lemme 7 ne subsiste pas nécessairement si $\mathcal{F}$ est infinie[1])

III.

Lemme 8. Si $F \subset G$, alors $F' \subseteq G'$ et $\overline{F} \subseteq \overline{G}$. Si F est fini, alors $F' = 0$.

Lemme 9. Les ensembles F', $\overline{F}$ sont fermés et par suite $\overline{\overline{F}} = \overline{F}$[2]).

Lemme 10. F étant fermé et $F \supseteq H$, alors $F \supseteq \overline{H}$.

Lemme 11. Si FRG signifie que F est partout dense sur G, R est une relation réflexive et transitive; en général, elle n'est pas symétrique.

Lemme 12. F étant partout dense sur G, tout point isolé de G appartient à F.

Lemme 13. P étant une portion de E, l'ensemble $\overline{P} - P$ est composé au plus de deux points de E: de la borne inférieure et de la borne supérieure de P relativement à E.

Lemme 14. Pour qu'un espace ordonné ayant au moins deux points soit *dense*, il faut et il suffit qu'il n'ait aucun saut.

Lemma 15. Tout ensemble ordonné dense est dense en soi.

Lemme 16. Toute ensemble ordonné partout dense sur un ensemble ordonné *dense* est dense en soi.

IV. *Principes d'inductions.*

Dans cette section, $T(x)$ désignera une proposition logique qui est, en y remplaçant x par un point quelconque de E, ou bien vraie ou bien non vraie; on dira pour abréger, que $T(x)$ est vraie ou non vraie pour un $x \varepsilon E$[3]).

---

1) Le lemme 7 est dû à M. A. Denjoy qui s'en est servi dans la théorie de la mesure des ensembles (cf. La notion de „couvertures strictes d'intervalles", loc. cit. p. 223—232).

2) Il est clair que $\overline{\overline{F}}$ veut dire $\overline{G}$ en posant $G = \overline{F}$. Par conséquent, les espaces ordonnés appartiennt à la classe des espaces (V) de M. Fréchet verifiant la condition α de M. Appert (voir, Appert, Actualité Sci. et Indust. 145, Paris, 1934, p. 12).

3) voir N. T. p. 164. On peut dire que $T(x)$ est une fonction univoque définie pour tout $x \varepsilon E$ et ne pouvant admettre dans E que deux valeurs différentes au plus. C'est donc la fonction caractéristique d'un sous-ensemble de E.

1. On dira qu'un ensemble ordonné non-vide E *admet le principe de l'induction linéaire*, si la conclusion suivante a lieu:

Hypothèse. Soit $T(x)$ une proposition logiqne quelconque vérifiant les deux conditions:

C_1 : Il y a une portion gauche non vide P_0 de E telle que $T(x)$ soit vraie pour tout point x de P_0.

C_2: Si $T(x)$ est vraie pour tout point $x \varepsilon P$, P étant une portion gauche non-vide de E, il y a, si $P \subset E$, une portion gauche Q de E telle que $P \subset Q$ et que $T(x)$ soit vraie pour tout x de Q.

Conséquence: La proposition $T(x)$ est vraie pour tout x de E.

2. On dira qu'un ensemble ordonné non-vide E possède la propriété Lebesgue-Khintchine[4]), si la conclusion suivante a lieu:

Hypothèse. Soit $T(x)$ une proposition logique quelconque vérifiant les conditions:

C_1': Il y a une portion gauche *élémentaire* P_0 de E telle que $T(x)$ soit vraie pour tout point de P_0.

C_2': Si $T(x)$ est vraie pour tout point x de P, P étant une portion gauche *élémentaire* non-vide de E, il y a, si $P \subset E$, une portion gauche *élémentaire* Q de E telle que $P \subset Q$ et que $T(x)$ soit vraie pour tout x de Q.

Conséquence: La proposition $T(x)$ est vraie pour tout point de E.

3. On dira qu'un ensemble ordonné non-vide E *admet le principe de l'induction* complète[3]), si E a un premier élément et si la conclusion suivante a lieu:

Hypothèse. Soit $T(x)$ une proposition logique quelconque vérifiant ces conditions:

C_1^0: a désignant le premier point de E, $T(a)$ est vraie;

---

4) Cf. H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Paris, 1904 p. 105 et A. Khintchine, Fund. Math., 4, 1923, p. 164-166. Voir aussi T. H. Hildebrandt, Bull. Amer. Math. Soc., 32, 1926 p. 430, qui au lieu des conditions C_1', C_2' pose ces deux conditions:

K_1: Il y ε un point pour lequel $T(x)$ est vraie;

K_2: Si $T(x)$ est vraie pour tout point de E précédant un point x' de E, il y a un point y de E tel que $x' < y$ et que $T(y)$ soit vraie. D'après M. Hildebrandt, cette définition serait équivalente avec la définition 2 ce qui n'est pas exact (voir la note 5)).

C_2^0: b étant un point de E tel que $T(x)$ soit vraie pour tout point de *l'intervalle gauche* a de E, $T(x)$ est encore vraie pour *le point* a de E;

Conséquence. $T(x)$ est vraie pour tout $x \varepsilon E$.

Convention 1. L'ensemble vide possède la propriété de Lebesgue-Khintchine et admet le principe de l'induction linéaire ainsi que celui de l'induction complète.

Théorème 1. *Toute ensemble ordonné admet le principe de l'induction linéare.*

Soient: E un ensemble ordonné non-vide, $T(x)$ une proposition logique quelconque vérifiant les conditions C_1, C_2, et $\mathcal{F}$ la famille de toutes les portions gauches de E pour tout point desquelles $T(x)$ est vraie. Il s'agit de prouver que $E \varepsilon \mathcal{F}$. Si E *non* $\varepsilon \mathcal{F}$, soit $P = \sum \mathcal{F}$. Il est clair que $P \varepsilon \mathcal{F}$ et d'après la condition C_2, il existerait une portion gauche Q de E telle que $P \subset Q$, $Q \varepsilon \mathcal{F}$ ce qui est absurde à cause de la définition de P. On a donc $E \varepsilon \mathcal{F}$. c. q. f. d.

Théorème 2. *Pour qu'un ensemble ordonné admette le principe de l'induction complète, il faut est il suffit qu'il soit bien ordonné*[3]).

Nous nous contentons de prouver que la condition est nécessaire. De plus, à cause de la convention précédente, on peut supposer que $E \supset 0$. Soit donc E un ensemble ordonné ayant un premier point a et admettant le principe de l'induction complète. Si E n'était pas bien ordonné, il existerait un sous-ensemble non-vide F de E n'ayant pas un premier point. x étant un point de E, désignons par $T(x)$ la phrase „x précède tout point de F". Il est manifeste que la condition C_1^0 est remplie; d'autre part, si $T(x)$ est vraie pour tout point x de E précédant un certain point b de E, il est claire que $T(b)$ est encore vraie, sans quoi b serait le premier point de F, contrairement à la supposition. Bref, la condition C_2^0 est aussi vérifiée. E admettant, par hypothèse, le principe de l'induction complète, la proposition $T(x)$ serait vraie pour tout $x \varepsilon E$ ce qui est absurde. Donc E est bien ordonné.

Théorème 3. *Les quatre hypothèses suivantes sur un ensemble ordonné non-vide E sont logiquement équivalentes:*

α. E possède la propriété de Lebesgue-Khintchine;

β. E est sans aucune lacune intérieure (définition 1·10);

γ. Tout F non-vide borné inférieurement dans E a une borne inférieure dans E (définition 1·7);

δ. Tout F non-vide borné supérieurement dans E a une borne supérieure relativement à E (définition 1·7).

Il suffira de prouver cette chaîne de conclusions logiques:

$$\alpha \to \beta \to \gamma \to \delta \to \alpha.$$ [5])

$\underline{\alpha \to \beta}$. Supposons qu'il existe une lacune intérieure AB de E c'est-à-dire que $A < B$, $A \supset 0$, $B \supset 0$, et $A + B = E$.

Désignons par $T(x)$, x étant un point de E, la phrase „x appartient à A". Puisque $A \supset 0$, la condition $C^1{}_1$ est satisfaite; puisque, par supposition, A n'a pas un dernier élément, $T(x)$ vérifie aussi la condition $C^1{}_2$ et à la suite de l'hypothèse α, la proposition $T(x)$ serait vraie pour tout $x \varepsilon E$ donc en particulier pour tout point de B, ce qui est absurde.

$\underline{\beta \to \gamma}$. F étant borné inférieurement dans E, on a $A \supset 0$, A désignant l'ensemble de tous les points $a \varepsilon E$ tels que $F \subseteq (a, .)_E$. L'inclusion $\beta \to \gamma$ étant évidente si F a un premier point, supposons que F n'a pas un premier point et que $F \supset 0$. Par conséquent, l'ensemble $B = E - A$ est aussi non-vide et n'a pas un premier point. A cause de l'hypothèse β, l'ensemble A a un dernier point, soit $a \varepsilon E$; et alors, on voit sans peine que a est la borne inférieure de F relativement à E.

$\underline{\gamma \to \delta}$. $F \supset 0$ étant borné supérieurement dans E, soit B l'ensemble de tous les $a \varepsilon E$ tels que $F \subseteq (. , a)_E$. Il est évident que B est une portion droite de E. Le dernier point éventuel de F étant sa borne supérieure, supposons que F n'a pas un dernier point. L'ensemble B étant non-vide et borné inférieurement dans E, soit b la borne inférieure de B relativement à E

---

[5]) X, Y étant deux hypothèses ou deux propositions logiques, le symbole $X \to Y$ voudra dire „que Y est une conséquence logique de X ou "si X alors Y". Si $X \to Y$ et $Y \to X$, on dira que X, Y sont équivalentes.

Le signe $\underline{X \to Y}$ voudra dire "prouver que $X \to Y$".

dont l'existence est assurée par l'hypothèse γ. On prouve facilement que b est alors la borne supérieure de F relativement à E.

$\delta \rightarrow \alpha$. $T(x)$ désignant une proposition logique quelconque vérifiant les conditions C^1_1, C^1_2 désignons par P *l'ensemble de tous les points* x *de* E pour lesquels $T(x)$ est vraie. A cause des conditions C^1_1, G^1_2, l'ensemble P est une portion gauche non-vide de E [6]. Si $P = E$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $G = E - P \supset 0$. On a alors $P < G$, $P \supset O$, $G \supset 0$. Autrement dit, la portion P serait bornée supérieurement et, à la suite de l'hypothèse δ, aurait une borne supérieure relativement à E, soit a E. A cause de la condition C^1_2 on a a *non* εP, on aurait donc $a \varepsilon G$. On voit que $P = (. , a)_E$ et à la suite de la condition C^1_2, il existerait une portion gauche élémentaire Q de E telle que $P \subset Q$ et que $T(x)$ soit vraie pour tout point de Q. Puisque $b \varepsilon Q$, on aurait $b \varepsilon P$, ce qui est incompatible avec la supposition que $b \varepsilon Q$ et $P < G$. Ainsi le théorème 3 est complétement démontré.

V. *Ensembles et espaces ordonnés non-lacunaires.*

Théorème 4. *Pour tout ensemble ordonné non-lacunaire, les hypothèses* α, β, γ, δ *du théorème 3 sont verifiées.*

C'est une conséquence immédiate du théorème précedent.

Théorème 5. *Les cinq hypothèses suivantes sur un ensemble ordonné non-vide* E *sont logiquement équivalentes:*

α. E est non-lacunaire;

β. Tout sous ensemble non-vide de E a une borne inférieure et une borne supérieure relativement à E;

γ. 1° E est limité, 2° chaque portion de E est une portion élémentaire de E;

---

[6]) C'est cette conclusion qui est fondamentale dans tout le raisonnement; or il est clair qu'elle n'est pas une conséquence des conditions k_1, k_2 de la note (4).

δ. 1° E est limité, 2° $\mathcal{F}$ étant une famille quelconque de portions (élémentaires) de E deux à deux non-disjointes, l'ensemble $\sum \mathcal{F}$ est une portion élémentaire de E;

ε. $\mathcal{F}$ étant une famille monotone [7]) non-vide *quelconque* de segments de E, l'ensemble $\Pi \mathcal{F}$ est un point ou un segment de E.

La démonstration du théorème consistera à prouver cette chaîne de conclusions $\alpha \to \beta \to \gamma \to \delta \to \varepsilon \to \alpha$.

$\underline{\alpha \to \beta}$. Prouvons, par exemple, l'existence de la borne supérieure de F relativement à E. En désignant par A la portion gauche de E confinale avec F, considérons la coupure A de E (voir la définition 1·10). Si A a un dernier point, a, a est le dernier point de F. Si A n'a pas un dernier point, l'ensemble $B = E - A$ a un premier point b, sans quoi on aurait la lacune AB de E contrairement à l'hypothèse. Or, on prouve facilement que le point b de E est alors la borne supérieure de E.

D'une façon analogue, on démontre que F a une borne inférieure relativement à E.

$\underline{\beta \to \gamma}$. P étant une portion non-vide de E, soient a_P, b_P la borne inférieure et la borne supérieure de P relativement à E; on s'aperçoit que P admet une (et une seule) des représentations: $[a_P, b_P]$, $[a_P, b_P)$, $(a_P, b_P]$ et (a_P, b_P). Si, en particuliers, $P = E$, on a $E = [a_E, b_E]$ et a_E, b_E sont respectivement le premier et le dernier point de E.

$\underline{\gamma \to \delta}$. Voir le lemme 6.

$\underline{\delta \to \varepsilon}$. H désignant la famille des segments droits x de E, x parcourant l'ensemble des extrémités droites des éléments de $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ ayant la même signification que dans l'hypothèse ε), posons $H = \sum \mathrm{H}$.

La famille H étant monotone (lemme 4) et non-vide (parce que d'après l'hypothèse δ, E est limité), l'ensemble H est, d'après l'hypothèse $\delta 2$, une portion élémentaire de E. En désignant

[7]) voir la définition 4·1.

alors par h l'extrémité gauche de H, on s'aperçoit que h est le dernier point de $\Pi\mathcal{F}$. De la même façon, on prouve que $\Pi\mathcal{F}$ a un premier point g. On a alors $\Pi\mathcal{F}=g=h$ ou $\Pi\mathcal{F}=[g, h]$.

$\varepsilon \to \alpha$. A, B, étant respectivement le composant inférieur et le composant supérieur d'une coupure 0 de E, au moins l'un d'eux est non-vide, soit $A \supset 0$. En désignant par $\mathcal{F}$ la famille des segments droits x de E, x parcourant A, soit g le premier point de $\Pi\mathcal{F}$. Si $g \varepsilon A$, g est le dernier point de A, si $g \varepsilon B$, g est le premier point de B. L'existence de g étant assurée par l'hypothèse ε, l'ensemble E est donc non-lacunaire.

Ainsi le théorème 1 est completement démontré.

Lemme 16. *Tout ensemble fermé non-vide F qu'un espace non-lacunaire E est non-lacunaire.*

En effet, considérons une coupure XY de F. Puisque, par hypothèse, $F \supset 0$, au moins un des ensembles X, Y est non-vide, soit X. Si X a un dernier point, il n'y a rien à démontrer. Si X n'a pas un dernier point, la portion gauche A de E confinale avec X n'en a pas non plus et, par conséquent, l'ensemble $B=E-A$ a un premier point, soit b. Le point b est, on le voit, un point d'accumulation de X et par conséquent, F étant fermé, $b \varepsilon F$ donc $b \varepsilon Y$. On s'aperçoit aisément que b est alors le premier point de Y. Autrement dit, F est non-lacunaire.

Corollaire 1. Tout ensemble fermé non-vide d'un espace non-lacunaire est limité.

Lemme 17. $\mathcal{F}$ étant une famille *quelconque* d'intervalles d'un espace non-lacunaire E telle que $\sum\mathcal{F}=E$, la famille $\mathcal{F}$ contient une famille *finie* $\mathcal{F}_1$ telle que $\sum\mathcal{F}_1=E$. Ou, dans la terminologie de M. Fréchet: *tout espace ordonné non-lacunaire possède la propriété de Borel-Lebesgue* (voir le théorème 6·2).

$\mathcal{F}$ étant une famille d'intervalles de E telle que $\sum\mathcal{F}=E$, disons, avec M. Lebesgue[4]), qu'un point x de E est *atteint* s'il existe une famille *finie* f_x telle que $f_x \subseteq \mathcal{F}$ et $\sum f_x \supseteq (\cdot\,, x]_E$. Désignons par $T(x)$, x étant un point de E, la proposition logique „x peut être atteint". On s'aperçoit immédiatemment que $T(x)$ vérifie les conditions C^1_1 et C^1_2 de la définition 2; l'ensemble E, étant non-lacunaire, possède la propriété Lebesgue-Khintchine et, par conséquent, la proposition $T(x)$ est

vraie pour tout $x \varepsilon E$. En particulier, le dernier point b est atteint par les éléments de f_b: on a donc $f_b \subset \mathcal{F}$, $\sum f_b = E$ puiss. $f_c < \aleph_0$.

A la suite des lemmes 16 et 17, on a ce

Théorème 6. *Tout ensemble fermé non-vide d'un espace ordonné non lacunaire, possède la propriété Borel-Lebesgue (voir le théorème 6·2).*

VI. *Ensembles connexes.*

Lemme 18. Tout ensemble ordonné connexe est dense.

En effet, E étant connexe, supposons qu'il ne soit pas dense; cela voudrait dire, d'après le lemme 13, l'existence de deux points consécutifs a, b de E. Si par exemple $a \lhd b$, posons $G = (. , a]$, $H = [b , .)$.

On s'aperçoit que $E = G + H$, $G \supset 0$, $H \supset 0$, $\overline{G}H + G\overline{H} = 0$ ce qui est contraire à la supposition que E est connexe.

Théorème 7. *Pour qu'un ensemble ordonné E soit continu, il faut et il suffit qu'il soit limité et connexe.*

On se contentera de prouver que la condition est nécessaire. E étant continu, E est limité, sans quoi, si E n'avait pas un premier point par exemple, E aurait la lacune OE; démontrons de plus qu'il est connexe. Supposons, par impossible que E ne soit pas connexe, donc

$$(1) \qquad E = G + H, \; G \supset 0, \; H \supset 0, \; \overline{G}H + G\overline{H} = 0.$$

Il s'en suit que

$$(2) \qquad GH = 0, \quad G' = G, \quad H' = H.$$

Supposons que c'est G qui contient le premier point a de E, donc a *non* ε H. L'ensemble H étant, par suppositions (1) et (2), fermé, possède, d'après le corollaire 1, un premier point, soit b. Il est évident que $a < b$, $(a, b) \subseteq G$. Or, E étant continu, donc en particulier dense, le point b serait un point d'accumulation de (a, b) donc aussi de G et à la suite de (2), on aurait $b \varepsilon G$. On aurait donc $b \varepsilon G H$, contrairement à (2).

Théorème 8. *Pour qu'un ensemble ordonné soit connexe, — il faut et il suffit qu'il soit dense et sans aucune lacune inférieure.*

Théorème 9. *E étant un ensemble connexe, les hypothèses* α, β, γ, δ *du théorème 2 sont vérifiées.*

Théorème 10. *Pour qu'un sous-ensemble F d'un ensemble connexe E soit connexe il faut et il suffit qu'il soit une portion de puissance* >1 *de E (voir la convention 1·2).*

Nous nous contenterons de prouver que la condition est nécessaire. En effet, soit F un sous-ensemble connexe de F; il s'agit de prouver que F est une portion de E. Si F n'était pas une portion de E, on aurait deux points a, b de F tels que $c \varepsilon (a, b)$, c *non* εF. En posant alors $G=(.\,,c)_F$, $H=(c\,,.)_F$, on voit que $F=G+H$, $G \supset 0$, $H \supset 0$ et $\overline{G}H+G\overline{H}=0$; par conséquent, F ne serait pas connexe, contrairement à la supposition.

VII. *Prolongements et réductions d'ensembles et d'espaces ordonnés.*

5) E étant donné, lE désignera l'ensemble ordonné déduit de E en comblant chaque lacune de E par un élément (*Remplissage de lacunes*[8]) *de E*).

LE désignera un ensemble qu'on obtient de E en y supprimant un sous-ensemble quelconque de points ne remplissant aucune portion de puissance >1 de E.

---

[8]) Voici un procédé concret de remplissage de lacunes de E. Une famille non-vide C d'intervalles non-vides de E sera dite *chaîne fondamentale d'intervalles de E* si ces trois conditions sont vérifiées: 1° $v_1 v_2 \supset 0$ pour tout $v_1 \varepsilon C$, $v_2 \varepsilon C$; 2° $\Pi C = \Pi \overline{C}$, $\overline{C}$ désignant la famille des fermetures $\overline{v}$, $v \varepsilon C$. 3° $p\Pi C=0$ ou 1. Si $p\Pi C=1$, on dira que C *converge* vers le point ΠC. Si $p\Pi C=0$. C sera dite divergente.

Deux chaînes fondamentales C^i, $(i=1,2)$ sont dites *équivalentes*, en signes $C^1 \sim C^2$, si pour tout $v^1 \varepsilon C^1$ et tout $v^2 \varepsilon C^2$, on ait $v^1 v^2 \supset 0$. On démontre que le signe $\sim$ est une relation de classification et que deux chaînes fondamentales équivalentes sont à la fois ou bien divergentes ou bien convergentes et que, dans le dernier cas elles convergent vers le même point de E. A la suite du lemme 1·1, l'ensemble des chaînes fondamentales peut être partagé en faisceaux de chaînes fondamentales. Si l'on pose, Φ^1, Φ^2 étant deux faisceaux différents, $\Phi^1 < \Phi^2$ si $\sum' \Phi^1$ contient un élément précédant un élément de $\sum' \Phi^2$ (voir la note 1·2) et si l'on substitue a au lieu de Φ si

sE désignera l'ensemble ordonné obtenu en plaçant dans chaque saut de E un ensemble ordonné ayant le type λ de l'ensemble des nombres réels (*Remplissage de sauts de E*).

SE désignera un ensemble ordonné qu'on obtient de E en lui enlevant une certaine famille d'intervalles deux à deux disjoints et ayant, tous, le type ordinal λ.

6) uE désignera l'ensemble ordonné qu'on obtient en comblant chaque lacune AB de E soit par deux points soit par un seul point, suivant que la lacune est intérieure ou non-intérieure.

a parcourant l'ensemble de points d'accumulation bilatérale de E, vE désignera l'ensemble ordonné qu'on déduit de E en intercalant un point, soit entre a et $(.,a)_E$, soit, entre a et $(a,.)_E$. Le signe VE désignera un ensemble qu'on obtient en supprimant une extrémité de chaque saut de seconde espèce de E.

wE désignera le sur-ensemble ordonné de E qu'on obtient en intercalant un point entre les composants de chaque coupure AB de E telle que *ou bien* A a un dernier point qui est alors non-isolé du coté droit *ou bien* B a un premier point qui est alors non-isolé du côté gauche.

Lemme 19. E étant non-vide. l'ensemble lE est non-lacunaire. Si $pE > 1$, l'ensemble sE est dense.

Lemme 19'. Pour que lE soit continu, il faut et il suffit que E soit dense.

Lemme 19''. Si $pE > 1$, les ensembles $s(lE)$ et $l(sE)$ sont continus et semblables. Par conséquent, tout ensemble ordonné est continu dans un ensemble ordonné continu. Ainsi, la théorie des ensembles ordonnés peut se déduire de la théorie des ensembles ordonnés continus.

Lemme 20. Si E est dense (connexe), l'ensemble vE est dense en soi (et totalement non-connexe). Si E est dense en soi, l'ensemble VE est dense.

$\Sigma'\Phi$ converge vers a, on s'assure que l'ensemble ainsi obtenu est ordonné et "coïncide" avec l'ensemble lE. (Cf. La Note des C. R. 198, 1934; p. 882). On prouve facilement ce théorème: *Pour que E soit non-lacunaire, il faut et il suffit que chaîne fondamentale d'intervalles de E soit convergente.*

Lemme 21. L'ensemble E est partout dense sur lE, uE vE et wE.

Soit j une des lettres l, u, v, w, considérons jE. Si $E=jE$, il n'y a rien à démontrer; supposons donc que $E \subset jE$. Soient alors m un point de $jE-E$ et J un intervalle de jE contenant le point m; il s'agit de prouver que $EJ \supset 0$. Nous nous contenterons de le prouver dans le cas où $j=w$. Considérons seulement le cas où m n'est pas une extrémité de wE. En posant $A=(.,m)_E$, $B=(m,.)_E$, on aura $E=A+B$, $A<B$, $A \supset 0$, $B \supset 0$. Par conséquent, *ou bien* A aura un dernier point, a, non-isolé du coté droit, *ou bien* B aura un premier point, soit b, non-isolé du coté gauche. Examinons le premier cas. Désignons par d l'extrémité droite de l'intervalle J. Si d n'existe pas, cela veut dire que J est un intervalle droit de wE et par conséquent $EJ \supset B$. Si d existe et appartient à E, on voit que $O \subset (a,d)_E \subset J$; si $d \varepsilon wE-E$, on posera $A_1=(.,d)_E$, $B_1=(d,.)_E$. On obtient ainsi une nouvelle coupure de E différente de la précédente et on voit que $O \subset A_1-A_2 \subset J$.

Le second cas où B a un premier point pouvant être traité d'une manière analogue, on a bien démontré que E est partout dense sur wE.

Corollaire. L'ensemble $jE-E$, $(j=l,u,v,w)$, est ou bien vide ou bien composé de points d'accumulation de jE (voir le lemme 11).

Lemme 22. Pour qu'un point $a \varepsilon E$ soit un point d'accumulation, *relativement à* jE, $(j=l,u)$, d'un $F \subseteq jE$, il faut et il suffit que a soit un point d'accumulation, *relativement* à E, de l'ensemble EF.[9])

Lemme 23. Tout ensemble ordonné partout dense sur E est encore partout dense sur l'ensemble ordonné $uE+vE$.[10])

Lemme 24. Tout point a de E est un point isolé de l'ensemble wE.

---

[9]) On dira, pour abréger, que jE contient E avec *son organisation relative de points.*

[10]) $uE+vE$ désigne l'ensemble ordonné de la réunion des ensembles uE et vE.

La démonstration des lemmes 22, 23 et 24 ne présentant, aucune espèce de difficulté, on va prouver ce

Théorème II. α) *lE est le plus petit sur-ensemble non-lacunaire de E s'est-à-dire il n'y a aucun ensemble non-lacunaire M tel que $E \subset M \subset lE$.*

β) *$uE+vE$ est le plus grand ensemble ordonné H contenant E, avec son organisation respective de points,*[9]) *comme une une partie de H partout dense sur H.*

γ) *$uE+wE$ est le plus grand ensemble ordonné sur lequel E est partout dense.*

Nous nous contenterons de prouver la partie β du théorème II.

Tout d'abord, d'après le lemme 22, l'ensemble $uE+vE$ contient E avec son organisation respective[9]) de points; de plus, à la suite du lemme 21, l'ensemble E est partout dense sur $uE+vE$.

Supposons, d'autre part, l'existence d'un ensemble ordonné M tel que 1° $M \supset uE+vE$, 2° E est partout dense sur M, 3° M contient E avec son organisation respective. m étant alors un élément de $M-uE-vE$, posons $A=(.,m)_E$, $B=(m,.)_E$. On voit que A, B sont portions d'une lacune intérieure de E. On a les quatre cas:

I) A a un dernier point a, B a un premier point b. Ce cas n'est pas possible parce que $(a, b)_M$ contiendrait au moins le point m de M sans contenir aucun point de E, contrairement à l'hypothèse que E est partout dense sur M.

II) A a un dernier point a, B n'a pas un premier point bien que $B \supset 0$. Autrement dit, le point a serait un point d'accumulation, relativement à E,de l'ensemble B sans qu'il soit un point d'accuumlation, relativement à M, du segment droit m de M bien que $E.[m,.)_M=B$, ce qui est contraire à l'hypothèse que M contient E avec son organisation respective de points (voit[9]) et le lemme 22).

III) A n'a pas un dernier point bien que $A \supset 0$, B a un premier point b. Ce cas est traité comme le cas précédent.

IV) A n'a pas un dernier point bien que $A \supset 0$, B n'a pas un premier point bien que $B \supset 0$. En vertu de sa définition, l'ensemble uE contient deux points p, q, entre A et B. En considérant alors l'ensemble composé des points m, p, q, on s'aperçoit qu'au moins un de ceux-ci serait isolé dans M, ce qui est absurde.

Ainsi le Théorème II est complètement démontré.

Remarque. On peut prouver sans peine que tout ensemble ordonné peut être déduit à partir d'une paire ordonnée P par des combinaisons (finies ou transfinies) des procédés l, L, s, S, u, v, V et w. Par exemple, $1+\lambda+1$ est le type ordinal de sP; η étant le type ordinal des nombres rationnels, on a $\eta = SsP$, etc.

§ 4. Familles monotones d'ensembles.

La relation d'inclusion $\supset$ (ou $\subset$) entre ensembles étant une relation d'ordre, le but de ce § sera de comparer les relations $\supset$ et $<$.

1. Une famille d'ensembles sera dite *monotone* si ses éléments sont deux à deux toujours en relation $\supset$ [ce qui revient au même toujours en relation $\subset$]; la famille vide sera, ausi bien que chaque famille composée d'un seul ensemble, considérée comme monotone[1]).

Dans ce § la lettre $\mathcal{F}$ désignera une famille monotone d'ensembles *ordonnés par rapport à la relation* $\supset$ qu'on lira „contient au sens strict" et c'est sous cette convention qu'on emploiera le langage, établi dans les § précédents, des ensembles ordonnés. Toutefois, remarquons que, dans le cas actuel, l'ensemble vide jouera un rôle concret et s'il appartient à $\mathcal{F}$, succèdera à tout autre élément de $\mathcal{F}$.[2])

---

1) Autrement dit, pour qu'une famille d'ensembles soit monotone, il faut et il suffit qu'elle soit ordonnée par rapport à l'un des signes $\supset$ ou $\subset$. On voit maintenent pourquoi on convient que $\subset$ signifie „contenu au sens strict dans" au lieu de „contenu dans" parce que dans le dernier cas, $\subset$ ne serait pas une relation d'ordre, (Voir la notion de familles ramifiées d'ensembles dans le § 8 B). Pour la théorie des familles monotones, voir C. Kuratowski, Fund. Math., 2, 1921 p. 161—172 et Fraenkel loc. cit.

2) Cette remarque aura, dans la suite, une grande importance. En parçulier, si $\mathcal{F}$ contient l'ensemble vide $\{O\}$ comme un élément, on aura

2. L'ensemble $\sum \mathcal{F}$ sera désigné par $M_{\mathcal{F}}$ ou M et appelé *base de* $\mathcal{F}$. La famille de tous les sous-ensembles de M (l'ensemble vide y compris) sera désigné par UM.

Si $a \varepsilon M_{\mathcal{F}}$, $b \varepsilon M_{\mathcal{F}}$,

(*P*) le signe $a < b$ voudra dire l'existence d'un $X \varepsilon \mathcal{F}$ tel que a non εX, $b \varepsilon X$,

(*Q*) le signe $a \sim b$ voudra dire que tout élément de $\mathcal{F}$ contenant a contient b et tout élément de $\mathcal{F}$ contenant b contient aussi a; alors on a aussi $b \sim a$.

On observe qu'on a dans tous les cas $a < b$ ou $b < a$ ou $a \sim b$.

$\mathcal{F}$ sera dit un *ordre de* M si $a \sim b$ n'est vrai pour aucun couple de points différents de M. Si $pM = 0$ ou 1, $\mathcal{F}$ sera dit encore ordre de M.

3. $\mathcal{F}$ étant une famille monotone, le signe $\bar{\mathcal{F}}$ désignera la famille des ensemble $\sum f$, Πf, f parcourant la classe de sous-familles non-vides de $\mathcal{F}$.

Un saut de $\mathcal{F}$ sera dit *large* si l'ensemble-différence de l'extrémité gauche et de l'extrémité droite du saut est composé d'au moins deux points. De plus, si $\mathcal{F}$ a un dernier élément B de puissance > 1, le couple BO sera encore appelé un saut large de $\mathcal{F}$.

On désignera par $\sigma\mathcal{F}$ une famille d'ensembles qu'on obtient en adjoignant à la famille $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles non vides X tels que: 1° tout X est entre les extrémités d'un saut large de $\mathcal{F}$, et 2° pour tout saut large de $\mathcal{F}$, il y a un seul X entre ses extrémités (*Remplissage de sauts larges de* $\mathcal{F}$. Voir la déf. 3·5).

4. Une famille monotone $\mathcal{F}$ sera dite *saturée* s'il n'existe aucune famille monotone $\mathfrak{G}$ telle que $\mathfrak{G} \supset F$ et $\sum \mathfrak{G} = \sum \mathcal{F}$.

$\mathcal{F} + \{O\} = \mathcal{F}$. (On écrira quelquefois $\{O\}$ au lieu de O pour marquer que $\{O\}$ est obtenu par de certaines constructions et joue, par conséquent, un rôle qui diffère du rôle joué par O qui est le type abstrait de tous les ensembles vides).

Lemme 1. Φ étant une classe de familles monotones d'ensembles dont les bases forment une famille monotone, la famille $\sum' \Phi$ est monotone (voir la note 1·2).

Théorème 1. $\mathcal{F}$ étant donnée, $\bar{\mathcal{F}}$ est une famille monotone non-lacunaire contenant $\mathcal{F}$ comme une partie portout dense. On a $\bar{\bar{\mathcal{F}}} = \bar{\mathcal{F}}$.[3])

Le théorème 1 sera démontré quand on aura fait la démonstration des lemmes 2—6.

Lemme 2. $\bar{\mathcal{F}}$ est une sur-famille monotone de $\mathcal{F}$.

Que $\mathcal{F} \subseteq \bar{\mathcal{F}}$, c'est manifeste; prouvons que $\bar{\mathcal{F}}$ est monotone c'est-à-dire que, A, B étant deux éléments différents de $\bar{\mathcal{F}}$, on ait ou bien $A \subset B$ ou bien $A \supset B$.

Logiquement, quatre cas sont à envisager:

1° $A = \sum f$, $B = \sum g$, f, g étant deux sous-familles non-vides de $\mathcal{F}$.

En désignant par F, G un élément variable respectivement de f, g, on a cette disjonction: ou bien pour *chaque* F il y a *un* G tel que $F \subseteq G$ et alors $A \subset B$ ou bien il y a *un* F tel que F non $\subseteq G$ donc $F \supset G$ pour chaque G, et alors $A \supset B$.

2° $A = \sum f$, $B = \prod g$. Ou bien il y a *un* F et *un* G tels que $F \supseteq G$ et alors $A \supset B$ ou bien pour *chaque* F et pour *chaque* G on a F non $\supseteq G$ donc $F \subset G$ et alors $A \subset B$.

3° $A = \prod f$, $B = \sum g$. Voir le cas précédent.

4° $A = \prod f$, $B = \prod g$.

Tout d'abord, on s'aperçoit que pour F quelconque, on a ou bien $F \subseteq B$ ou bien $F \supset B$. Ceci étant, ou bien pour *chaque* F, on a $F \supset B$ et alors $A \supset B$ ou bien il y a un F tel que $F \subseteq B$ et alors $A \subset B$.

Lemme 3. $\bar{\mathcal{F}}$ est partout dense sur $\mathcal{F}$.

Si $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}$, il n'y a rien à démontrer. Supposons l'existence d'un $A \in \bar{\mathcal{F}} - \mathcal{F}$. On voit qu'au moins un des deux cas a lieu:

---

[3]) Par définition, $\bar{\bar{\mathcal{F}}} = \bar{\mathrm{H}}$, $\mathrm{H} = \bar{\mathcal{F}}$.

$A = \Pi(.\,, A)_{\mathcal{F}}, A = \sum(A\,, .)_{\mathcal{F}}$ (voir la definition 1·5).

On voit aussi que dans le premier cas par exemple, tout intervalle de $\overline{\mathcal{F}}$ contenant A contient au moins un élément de la famille $(.\,, A)_{\mathcal{F}}$; par conséquent, A est alors un point d'accumulation de $\mathcal{F}$, etc.

Lemme 4. $\overline{\mathcal{F}}$ est non-lacunaire.

Tout d'abord, on voit que $\overline{\mathcal{F}}$ est limité D'autre part, supposons l'existence d'une lacune intérieure A B de $\overline{\mathcal{F}}$. En posant $A_0 = A\mathcal{F}$, , $B_0 = B\mathcal{F}$, A_0 est (puisque $\mathcal{F}$ est partout dense sur $\overline{\mathcal{F}}$) une sous-famille *non-vide* de $\mathcal{F}$; donc $A = \Pi A_0$, $A \varepsilon \overline{\mathcal{F}}$. On a ou bien $A \varepsilon A$ ou bien $A \varepsilon B$. On voit que si $A \varepsilon A$ ($A \varepsilon B$), A sera le dernier (premier) élément de A(B) et, par conséquent, la coupure AB n'ouvrirait pas une lacune de $\overline{\mathcal{F}}$, contrairement à la supposition.

Lemme 5. La famille $\overline{\mathcal{F}}$ est la plus grande sous-famille monotone de $UM_{\mathcal{F}}$ sur laquelle $\mathcal{F}$ est partout dense.

Supposons l'existence d'une famille monotone $\mathfrak{G}$ telle que $\mathcal{F} \subset \mathfrak{G} \subseteq UM_{\mathcal{F}}$ et sur laquelle $\mathcal{F}$ serait partout dense. Si $G \varepsilon \mathfrak{G} - \overline{\mathcal{F}}$, on voit que G ne peut pas être une extrémité de $\mathfrak{G}$. Par conséquent, en posant $A = \Pi(.\,, G)_{\mathcal{F}}$, $B = \sum(G\,, .)_{\mathcal{F}}$, on a $A \varepsilon \overline{\mathcal{F}}$, $B \varepsilon \overline{\mathcal{F}}$. Ainsi, l'intervalle AB de $\mathfrak{G}$ contiendrait au moins l'élément G de $\mathfrak{G}$ sans contenir aucun élément de $\mathcal{F}$ contrairement à l'hypothèse que $\mathcal{F}$ est partout dense sur $\mathfrak{G}$.

Lemme 6. $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = \overline{\mathcal{F}}$ [3])

Tout d'abord, d'après les lemmes 3 et 4, $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$ est une surfamille monotone de $\mathcal{F}$ sur laquelle $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$ est partout dense; $\mathcal{F}$ étant partout dense sur $\overline{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}$ est partout dense sur $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$ aussi. Alors, à la suite de lemme 6, on ne peut pas avoir $\overline{\overline{\mathcal{F}}} \supset \mathcal{F}$.

Théorème 2. Les quatre hypothèses suivantes sur une famille monotone $\mathcal{F}$ sont logiquement équivalentes:

α) $\mathcal{F}$ est saturée;

β) 1° $\{0\} \varepsilon \mathcal{F}$, 2° $\mathcal{F}$ n'a aucun saut large, 3° $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$;

γ) Pour chaque coupure AB de $\mathcal{F}$, on a: 1° $\Pi A \varepsilon \mathcal{F}$, 2° $\sum B \varepsilon \mathcal{F}$, 3° $p(\Pi A - \sum B) = 0$ ou 1;

δ) 1° $\mathcal{F}$ est un ordre de $M_{\mathcal{F}}$, 2° pour chaque coupure AB de $\mathcal{F}$, on a $\Pi A \varepsilon \mathcal{F}$ et $\sum B \varepsilon \mathcal{F}$.

On va prouver cette chaîne de conclusions: $\alpha \to \beta \to \gamma \to \delta \to \alpha$.

$\alpha \to \beta$. L'ensemble vide étant contenu (voir la note 1·1) dans tout ensemble, la conclusion $\alpha \to \beta 1$ est évidente; il en est de même, vu le théorème précédent, de la conclusion $\alpha \to \beta\, 3$. Pour prouver que $\alpha \to \beta\, 2$, on voit qu'il suffit de montrer ce

Lemme 7. Pour chaque famille monotone $\mathcal{F}$, $\sigma \mathcal{F}$ est une sur-famille monotone de $\mathcal{F}$. Pour que $\mathcal{F} = \sigma \mathcal{F}$, il faut et il suffit que $\mathcal{F}$ n'ait aucun saut large.

$\beta \to \gamma$. A étant une portion gauche quelconque de $\mathcal{F}$, on a ou bien $A = 0$ et alors $\Pi A \varepsilon \mathcal{F}$ à cause de l'hypothèse $\beta 1$ ou bien $0 \subset A \subset \mathcal{F}$ et alors $\Pi A \varepsilon \mathcal{F}$ à cause de $\beta 3$. On a donc $\beta \to \gamma 1$. De la même façon, on prouve que $\beta \to \gamma 2$. Il nous reste à prouver que $\beta \to \gamma 3$. En posant $A = \Pi A$, $B = \sum (\mathcal{F} - A)$, on voit que A, B sont deux éléments *consécutifs* de $\mathcal{F}$ et, par conséquent, si la condition $\gamma 3$ n'était pas réalisée, A, B, seraient les extrémités d'un saut large de $\mathcal{F}$ contrairement à $\beta 2$.

$\gamma \to \delta$. Il s'agit de montrer que $\gamma \to \delta 1$. Le cas où $pM_{\mathcal{F}} \leq 1$ étant évident, supposons que $pM_{\mathcal{F}} > 1$. Il s'agit donc de prouver que, a, b, étant deux points différents quelconques de M, on ait ou bien $a < b$ ou bien $a > b$ (voir le définition (P)).

En supposant que $b < a$ n'est pas vrai prouvons que

$$(1) \qquad a < b$$

Remarquons, tout d'abord, que sous l'hypothèse γ, on peut démontrer sans peine que

$$(2) \qquad \{0\} \varepsilon \mathcal{F}, \ \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}.$$

Ceci étant, soit $\mathfrak{G}$ la famille de tous les $X \varepsilon \mathcal{F}$ contenant le point b. Si $\mathfrak{G}$ contient un élément ne contenant pas le point a, la relation (1) serait vérifiée. Supposons donc que $a \varepsilon G = \Pi \mathfrak{G}$. En posant

$$(3) \qquad G_a = G \quad a, \text{ on aura } a \text{ non } \varepsilon\, G, \ b \varepsilon G_a.$$

En posant $B = \sum (G, .)_{\mathcal{F}}$, on a, à cause de (2), $B \varepsilon \mathcal{F}$ et $B \subset G_a + a$, donc $B \subseteq G_a$. Si l'on avait $B \subset G_a$, on aurait $p(G - B) > 1$ ce qui est impossible à cause de l'hypothèse $\gamma 3$ et du fait que $B = \sum \mathrm{B}$ et $G = \Pi(\mathcal{F} - \mathrm{B})$, $\mathrm{B} = (G, .)_{\mathcal{F}}$ On a donc $B = G_a$ et, par conséquent, $G_a \varepsilon \mathcal{F}$, ce qui, d'après (P), ensemble avec (3). veut dire que $a < b$.

$\delta \to \varepsilon$. Supposons, par impossible, l'existence d'une famille monotone $\mathfrak{G}$ telle que $\mathfrak{G} \supset \mathcal{F}$ et $\sum \mathfrak{G} = \sum \mathcal{F}$ (voir la définition 4). G étant un élément de $\mathfrak{G} - \mathcal{F}$, posons

$$A = \Pi (., G)_{\mathcal{F}}, \ B = \sum (G, .)_{\mathcal{F}}$$

D'après la condition $\delta 2$, on a $A \varepsilon \mathcal{F}$, $B \varepsilon \mathcal{F}$. D'autre part, il est clair que $A \supset G \supset B$ et par suite $p(A - B) > 1$. Autrement dit A, B, seraient les extrémités d'un saut large de $\mathcal{F}$ ce qui est en la contradiction avec la condition $\delta 1$ et le

Lemme 8. Aucune famille monotone $\mathcal{F}$ qui est un ordre de sa base ne contient aucun saut large.

Soient, en effet, m, n deux points différents de $A - B$. Par hypothèse, on a ou bien $m < n$ ou bien $n < m$. Supposons que $m < n$. Cela voudrait dire l'existence d'un ensemble $D \varepsilon \mathcal{F}$ tel que m non εD, $n \varepsilon D$. Or, on voit que D serait entre A et B et par conséquent, A, B ne seraient pas consécutifs dans $\mathcal{F}$, contrairement à la supposition. Ainsi le théorème 2 est complétement démontré.

Lemme 9. Si $\mathcal{F}$ est un ordre de sa base $M_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}$ est une famille de portions droites de $M_{\mathcal{F}}$ ordonnée par le procédé (P).

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait deux points a, b de M et un $X \varepsilon \mathcal{F}$ tels que: $a < b$, $a \varepsilon X$ et b non εX. Le signe $a < b$ voulant dire l'existence d'un $Y \varepsilon \mathcal{F}$ tel que a non εY, $b \varepsilon Y$, les ensembles X, Y seraient deux éléments distincts de $\mathcal{F}$ pour lesquels on n'a ni $X \subset Y$ ni $Y \subset X$ contrairement à la monotonie de $\mathcal{F}$.

Théorème 3. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille monotone $\mathcal{F}$ soit un ordre de sa base, est que la famille $\overline{\mathcal{F}} + \{0\}$ soit saturée.*[2])

La condition est nécessaire. $\mathcal{F}$ étant un ordre de $M_{\mathcal{F}}$, on voit que, à la suite des lemmes 6 et 9, la famille monotone $\overline{\mathcal{F}} + \{0\}$ vérifie l'hypothèse β du théorème 2, et l'inclusion $\beta \to \alpha$ du même théorème veut dire que $\overline{\mathcal{F}} + \{0\}$ est saturée.

La condition est suffisante: $\overline{\mathcal{F}} + \{0\}$ étant une famille monotone saturée, prouver que $\mathcal{F}$ est un ordre de $M_{\overline{\mathcal{F}}} = M_{\mathcal{F}}$. En employant les notations de la démonstration de l'inclusion $\gamma \to \delta$ ci-dessus, on s'assure, sans peine, que G et G_a sont deux éléments *consécutifs* de $\mathcal{F}$. On a alors deux cas:

1° $G_a \varepsilon \mathcal{F}$, donc a non εG_a, $b \varepsilon G_a$ et d'après (P), on aurait $a < b$.

2° G_a non $\varepsilon \mathcal{F}$. Nous savons (voir le lemme 3) que G_a est un élément d'accumulation de $\mathcal{F}$ et cela du côté droit parce que entre G et G_a, il n'y a aucun élément de $\mathcal{F}$. Autrement dit, il existe une famille $f \subset \mathcal{F}$ telle que $\sum f = G_a$ donc aussi un $X \varepsilon f$ tel que $b \varepsilon X \varepsilon \mathcal{F}$. Cela veut dire précisément que $a < b$.

Comme une conséquence facile du lemme 9 et du théorème précédent, on a ce

Théorème 4[4]). Chaque famille monotone saturée $\mathcal{F}$ est le plus grand ordre de sa base et coïncide avec la famille des portions droites de l'ensemble $M_{\mathcal{F}}$ ordonné par le procédé (P); et vice versa: la famille des portions droites d'un ensemble ordonné quelconque est monotone et saturée.

5. $\mathcal{F}$ étant une famille monotone donnée, on désignera par $\mathcal{F}^1$ la famille des $M_{\mathcal{F}} - X$, X parcourant $\mathcal{F}$. Le signe $\mathcal{F}_J$ désignera la famille de tous les éléments non-vides $X \varepsilon \mathcal{F}$ vérifiant cette condition: il y a un point $a \varepsilon M_{\mathcal{F}} - X$ tel que l'ensemble $X + a \varepsilon \mathcal{F}$[5]). Le signe $\mathcal{F}_J \times \mathcal{F}_J{}^1$ désignera la famille des $X X^1$ non-vides, X, X^1 parcourant respectivement $\mathcal{F}_J$, $\mathcal{F}_J{}^1$. Enfin, la famille-réunion $\mathcal{F}_J + \mathcal{F}_J \times \mathcal{F}_J{}^1 + \mathcal{F}^1$ sera désignée par $J_{\mathcal{F}}$.

On prouve facilement ce

Théorème 5. $\mathcal{F}$ étant une famille monotone (et saturée), la famille $\mathcal{F}^1$ l'est aussi.

Si $\mathcal{F}$ est monotone et saturée, la famille $\mathcal{F}_J (\mathcal{F}_J{}^1)$ coïncide avec la famille des intervalles droits (gauches) non-vide de l'ensemble $M_{\mathcal{F}}$ ordonné par le procédé (P) tandis que la famille $J_{\mathcal{F}}$ coïncide avec la famille des intervalles non-vides de $M_{\mathcal{F}}$ ordonné par (P).

En rappelant que tE désigne le type ordinal de E, on peut prouver ce

Théorème 6. $\mathcal{F}$ étant un ordre saturé de M[6]), on a $tM_{\mathcal{F}} + 1 \leq t\mathcal{F}$. Pour que les deux ensembles ordonnés $\mathcal{F}$ et $M_{\mathcal{F}} + 1$ soient semblables, il faut et il suffit que $\mathcal{F}$ soit bien ordonnée (par rapport à la relation $\supset$[7]).

---

[4]) Ce théorème est dû à M. C. Kuratowski, loc. cit.

[5]) On voit facilement que, si a existe, il est unique.

[6]) La terminologie s'entend d'elle même.

[7]) Voir la définition 1·14. Plus tard, on dira „...que $\mathcal{F}$ soit un table monoton saturé" (voir le chap. II). Il est facile d'exprimer $tM_{\mathcal{F}}$ en fonction de $t\mathcal{F}$ au moyen des procédés, r, V, S et w (voir la section VI du § précédent).

En définitive, on peut dire que la théorie de familles monotones d'ensembles se ramène à la théorie des ensembles ordonnés de points; et réciproquement [7'].

6. La question se pose: M étant un ensemble de points, existe-t-il une famille monotone saturée de sous-ensembles de M? ou ce qui revient au même: peut on indiquer une relation d'ordre entre les points de M? ou encore: $\mathcal{F}$ étant une famille monotone d'ensembles, peut-on indiquer un procédé de construire une famille monotone et *saturée* $\mathcal{F}_s$ telle que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_s$ et $\sum \mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_s$?

$\mathcal{F}$ étant une famille monotone d'ensembles, posons

$$(1) \qquad \mathcal{F}_0 = \overline{\mathcal{F}} + \{0\} \text{ [2]}$$

Supposons que, α étant un nombre ordinal donné, les $\mathcal{F}_\xi$ sont définis pour tout ordinal $\xi < \alpha$. On posera

(II) $\mathcal{F}_\alpha = \overline{\mathrm{H}}_{\alpha-1}, \mathrm{H}_{\alpha-1} = \sigma\mathcal{F}_{\alpha-1}$ si α est de première espèce et

(III) $\mathcal{F}_\alpha = \overline{\mathrm{H}}_\alpha$, $\mathrm{H}_\alpha = \sum_{\xi<\alpha}' \mathcal{F}_\xi$ si α est de seconde espèce

(voir la note 1·2). Ainsi, en vertu du principe de l'induction complète, $\mathcal{F}_\alpha$ est défini pour *tout* ordinal α. On voit que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \mathcal{F}^\alpha \subseteq \cdots$ et que $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_{\alpha+\xi}$ pour tout ξ si $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_{\alpha+1}$.

En admettant le principe de M. Zermelo, il est clair qu'il existe un nombre γ tel que $\mathcal{F}_\gamma = \mathcal{F}_{\gamma+1}$. En posant alors

$$(\mathrm{IV}) \qquad \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}^s$$

α étant le premier nombre ordinal ξ tel que $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}_{\xi+1}$, on a ce

Théorème 7. La famille $\mathcal{F}$ définie par (I)—(IV) est une famille monotone saturée telle que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_s$ et $\sum \mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_s$. Pour que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_s$, il faut et il suffit que $\mathcal{F}$ soit saturée.

Eu égard les lemmes 1, 2, 3, 4, et 7, la famille $\mathcal{F}_s$ est monotone, contient $\mathcal{F}$ et a la même base que la famille $\mathcal{F}$.

[7'] En particulier, la relation $<$ est exprimable en termes de la relation $\subset$. Il en est de même de la relation d'ordre cyclique, de celle définissant le mot „entre", aussi bien que de la „relation de séparation de couples", chacune de ces trois relations étant, en vertu d'un théorème récent de M. Huntington (Voir: Trans. Amer. Math. Soc., 1935, 38, pp. 1—9), définissable en termes de la relation $<$.

D'autre part, on voit que $\mathcal{F}_s$ vérifie l'hypothèse β du théorème 2, et, en vertu du même théorème, $\mathcal{F}_s$ est saturée.

Que l'égalité $\mathcal{F}=\mathcal{F}_s$ soit caractéristique pour les $\mathcal{F}$ saturées, c'est bien manifeste.

Si, en particulier, M étant un ensemble de points, on pose $\{M\}=\mathcal{F}$,[8]) le procédé précédent permet de construire une famille monotone saturée ayant M pour base, et en vertu du théorème 3 ou 4, l'ensemble M peut être ordonné.

En regardant comme légitime la construction de la famille

$$\mathcal{F}_s=\sum_{\alpha}{}' \mathcal{F}_\alpha \quad \text{(voir la note 1·2)}$$

la sommation s'étendant sur tous les ordinaux α [10]), on pourrait encore démontrer sans l'axiome de M. Zermelo, le théorème précédent. On en déduirait, en particulier que tout ensemble peut être bien ordonné.

Vu l'importance de la notion d'ordre d'une part et l'idée très claire que nous en avons d'autre part, résultat de notre acquisition héréditaire, on peut poser ce

Problème. L'hypothèse que chaque ensemble peut être *ordonné*, entraine-t-elle l'axiome de choix de Zermelo?[11])

La réponse affirmative attenuerait un assez grand nombre d'objections qu'on fait à l'axiome de choix, bien que, étant

[8]) $\{M\}$ veut dire la famille composée de l'ensemble M.

[9]) C'était M. E. Zermelo qui, en 1905, a. le premier, démontré que, en postulant l'axiome de choix, toute ensemble peut être *bien* ordonnée. Trois ans après, il a démontré le même théorème en se servant d'un procédé qui est l'origine de la théorie de familles monotones d'ensembles. Voir E. Zermelo, Math. An. 59, 1905, p, 514—516 et Math. An. 65, 1908, p. 107—128.

[10]) Ce „pasage à la limite générale" peut être consiréré comme une adjonction utile aussi bien que l'est le passage à la limite classique (l'infini potentiel); il est justiifé, au point de vue logique, dans la même mesure que l'est le dernier parce qu'ils sont, les deux, un résultat du même principe de l'induction complète. Au point de vue pratique, ou même de constructions effectives, il y a même des entiers qui n'existent pas, étant donné l'évolution sans grand sauts de l'humanité d'une part et la durée bornée de tous phénomènes et objets naturels d'autre part, donc de L'Univers lui même.

[11]) On sait que, si l'on remplace, dans le texte, le mot „ordonné" par „bien ordonné" le problème admet une réponse affirmative (voir la note 2·8).

donné l'indépendance[12]) de celui-ci des autres axiomes (de Zermelo) de la théorie des ensembles, elles n'ont pas, au point de vue logique, une importance décisive.

Remarquons que la réponse serait affirmative si l'on pouvait prouver, sans l'aide de l'axiome de choix, cette proposition:

E étant un ensemble ordonné infini quelconque on a $(pE)^2 = pE$ [13])

§ 5. Systèmes de complexes de points.

Dans ce §, on concretisera encore davantage la théorie des ensembles ordonnés.

Les notions introduites dans ce § joueront un rôle considérable dans la suite de l'exposé.

Les signes, α, E désigneront respectivement un nombre ordinal et un ensemble ordonné quelconques.

1. α étant donné, tout signe A de la forme $(a_0, a_1, \ldots a_\xi \ldots)$, $\xi < \alpha$, sera appelé *complexe de rang* α *dont le rang* ξ *est occupé par* a_ξ, a_ξ étant un point (élément) quelconque; on écrira aussi $A = (a_0, \ldots a_\xi \ldots)_{\xi < \alpha}$.

L'ensemble vide sera considéré comme le seul complexe de rang 0.[1])

Deux complexes $A^1 = (a_0^1 \ldots a_\xi^1 \ldots)_{\xi < \alpha^1}$, $A^2 = (a_0^2, \ldots a_\xi^2 \ldots)_{\xi < \alpha^2}$ seront dits *différents*, en signe $A^1 \neq A^2$, si l'on n'a pas en général $a_\xi^1 = a_\xi^2$ quel que soit ξ.

Alors, on voit qu'il existe un indice ν tel que $a_\xi^1 = a_\xi^2$ pour tout $\xi < \nu$ et $a_\nu^1 \neq a_\nu^2$. Le premier nombre ν jouissant de cette propriété sera désigné par

---

12) Voir A. Fraenkel Sitz. Ber. Akad. Berlin. 1922 p. 253-257.

13) En effet, d'après M. A. Tarski, l'axiome de choix est équivalent à l'hypothèse: „Pour tout ensemble infini E, on a $(pE)^2 = pE$" (voir. Fund. Math., 5, 1924, p. 147—154). Noter que, pour tout α, on a $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$.

1) Quelquefois, il est avantageux de considérer un ensemble de puissance quelconque d'éléments jouant le rôle du zéro dans le cas courant.

$$\varphi(A^1, A^2) \text{ ou } \varphi(A^2, A^2)$$

En particulier, deux complexes de rangs différents seront différents.

Convention 1. Tout complexe $A = (a_0, \ldots a_\xi \ldots)_{\xi < \alpha}$ sera considéré comme un ensemble ordonné par ce procédé

(1) On posera $a_\xi \lesseqgtr a_{\xi'}$, dans A suivant que $\xi \lesseqgtr \xi'$.

Par conséquent, on pourra employer, ici encore, la terminologie des ensembles ordonnés; en particulier, le complexe $(a_0, \ldots a_\eta \ldots)_{\eta < \xi}$, $\xi < \alpha$, sera appelé intervalle gauche ξ de A et désigné par $(\ldots, \xi)_A$. Les égalités

$$A = ((\ldots, \xi)_A\, a_\xi \ldots a_\zeta \ldots)_{\zeta < \alpha} = ((\ldots, \xi)_A\, [\xi, \ldots)_A), \text{ etc.}$$

s'entendront alors d'elles mêmes. (*Juxtapositions de complexes*).

2. E, α étant donnés, on désignera, avec M. Hausdorff,[2]) par $E^{\alpha *}$ l'ensemble de tous les complexes $A = (a_0, \ldots a_\xi \ldots)_{\xi < \alpha}$ les a_ξ parcourant indépendamment l'ensemble, E les A étant ordonnés alphabétiquement (par le principe de premières différences): A^i $(a_0{}^i \ldots a_\xi{}^i \ldots)_{\xi < \alpha^i}$, $(i = 1, 2)$, étant deux éléments différents de E, on posera, φ désignant le nombre $\varphi(A^1, A^2)$,

(2) $A^1 \lesseqgtr A^2$ dans $E^{\alpha *}$ suivant que $a_\varphi{}^1 \lesseqgtr a_\varphi{}^2$ dans E.

On s'assure aisément que $E^{\alpha *}$ est ordonné par la procédé (2), son type sera désigné par $\mu^{\alpha *}$ si celui de E est μ. On posera, par convention, $\mu^0 = 1$ si $\mu > 0$.

Lemme 1. A, B, C étant trois éléments différents de $E^{\alpha *}$, on a $\varphi(A, C) \geqslant \min(\varphi(B, A), \varphi(C, B))$. Si, de plus, $A < B < C$, le nombre $\varphi(A, C)$ est le plus petit des ordinaux $\varphi(B, A)$, $\varphi(C, B)$.

---

2) G. M. 150. Noter que α^* est le type inverse de α. Voir encore F. Hausdorff, Ber. Math. Phys. Kl. d. Wiss. zu Leipzig, 58, 1906, p. 106 et suiv.

3. $B=(b_0, \ldots b_\xi \ldots)_{\xi<\alpha}$ étant un complexe donné, on désignera par $\{B\}_E$ l'ensemble de tous les complexes $A=(a_0 \ldots a_\xi \ldots)_{\xi<\alpha}$ tels qu'il existe un indice ν (variable avec A) tel que les a_ξ, $\xi<\nu$, parcourent indépendammant l'ensemble E tandis que $a_\xi=b_\xi$ pour $\nu \leqslant \xi<\alpha$.

G étant un complexe de rang γ, $\gamma<\alpha$, on désignera par $[G]_{E^{\alpha*}}$ ou simplement $[G]$ l'ensemble de tous les complexes $(Ga_\gamma \ldots a_\xi \ldots)_{\gamma\leq\xi<\alpha}$, les a parcourant independamment l'ensemble E (il est évident que $[G]=G$ si $\gamma=\alpha$).

Remarquons, une fois pour toutes, que $\{B\}_E$ ou $[G]_{E^{\alpha*}}$ seront considérés toujours comme déjà ordonnés par le procédé (2) s'ils sont susceptibles de l'être [3]).

Lemme 2. B étant un élément quelconque de $E^{\alpha*}$, l'ensemble $\{B\}_E$ est partout dense sur $E^{\alpha*}$.

Tout d'abord, si α est de première espèce, en voit que $\{B\}_E=E^{\alpha*}$. Supposons donc que α est de seconde espèce; on voit que $\{B\}_E \subset E^{\alpha*}$. Il s'agit alors de montrer que toute intervalle non-vide (A^1, A^2) de $E^{\alpha*}$ contient un point de $\{B\}$, c'est-à-dire qu'il existe un complexe C tel que

$$C \in \{B\}_E \,.\, (A^1, A^2)_{E^{\alpha*}}. \tag{3}$$

En posant $A^i=(a^i_0, a^i_\xi \ldots)_{\xi<\alpha^i}$, $(i=1, 2)$, on peut supposer $A^1<A^2$ c'est-à-dire $a^1\varphi<a^2\varphi$, $\varphi=\varphi(A^1, A^2)$. Ceci étant, on a deux cas:

I. Il y a un point $a \in (a^1\varphi, a^2\varphi)_E$; si alors C désigne lr complexe $((\ldots, \varphi)_{A^1}\ a(\varphi, \ldots)_{A^2})$, on voit que la relation (3) est vérifiée.

II. $a^1\varphi$, $a^2\varphi$ sont deux éléments consécutifs de E. En désignant par A^i_φ l'ensemble $[(a^i_0 \ldots, a^i\varphi)]_{E^{\alpha*}}$, $(i=1, 2)$, on a ces éventualités:[4])

---

3) En effet, si l'ensemble-réunion $b_\xi + E$ n'est pas ordonné par exemple, il est clair que l'ensemble $[B]$ ne peut pas être ordonné par le procédé (2).

4) Bien entendu, l'ensemble $A_\varphi{}^1$ précède l'ensemble $A_\varphi{}^2$ parce qu'on a supposé que $A^1<A^2$.

1°. $A^1\varphi$ n'a pas un dernier point. Si alors X est un point de $A^1\varphi$ tel que $A^1\varphi < X$, il suffit de considérer le complexe $((.\,,\varphi_1]_X\,(\varphi_1\,,.)_B)$, $\varphi_1 = \varphi(XA^1)$ pour voir qu'il vérifie la relation (3).

2°. $A^2\varphi$ n'a pas un premier point. Ce cas est traité comme le cas précédent.

3°. $A^1\varphi$ a un dernier point P, $A^2\varphi$ a un premier point Q.

Tout d'abord, on voit facilement qu'alors l'ensemble E est limité et que P, Q sont deux éléments consécutifs de E^{α^*} et de la forme

$$P = (a^1{}_0\,.\,.\,a^1\varphi s\,.\,.\,s\,.\,.),\quad Q = (a^2{}_0\,.\,.\,a^2\varphi r\,.\,.\,r\,.\,.),$$

r, s désignant respectivement le premier et le dernier point de E.

Si au moins un des intervalles (A^1, P), (Q, A^2) n'est pas vide, on construit très facilement un complexe C vérifiant la relations (3). Le cas où $A^1 = P$, $Q = A^2$ étant inadmissible à cause de la supposition que A^1, A^2 ne sont pas consécutifs, il nous reste encore deux possibilités:

a) A^1, P sont deux éléments consécutifs de E^{α^*}. En posant $\varphi_1 = \varphi(A^1, P)$, on voit que $A^1 = ((.\,,\varphi_1)_P\, a^1\varphi_1 s\,.\,.\,s)$, $a^1\varphi_1$ étant le prédécesseur immédiat de s dans E; en posant alors $X = ((.\,,\varphi_1)_P\, s\, r\,.\,.\,r\,.\,.)$, on voit que X est entre A^1 et P, contrairement à la supposition.

b) Q, A^2 sont deux éléments consécutifs de E En répétant le raisonnement de tout à l'heure, on s'assure que cette supposition aboutit aussi à une contradiction. Ainsi le lemme 2 est démontré.

Corollaire I. Si E fini ou dénombrable, l'ensemble ordonné E^{ω^*} est séparable [5]).

En effet, si $B \in E^{\omega^*}$, on voit que $[B]_E$ est dénombrable.

4. On désignera par kE^{α^*} l'ensemble ordonné alphabétiquement des éléments de la réunion $E^{\alpha^*} + \sum_B \{B\}_E$, la sommation

---

5) C'est-à-dire E^{ω} a un sous-ensemble dénombrable partout dense E. A. p. 186).

s'etendant sur les complexes de rang α $B=(b\,..\,b\,..)$, les b parcourant les éléments de l'ensemble lE (voir la definition 3·5).

Ceci étant, on va prouver ce

Théorème 1.

a. L'ensemble E^{α^*}est partout dense sur l'ensemble kE^{α^*}.

b. L'ensemble kE^{α^*} est non-lacunaire.

c. Si E est dense, on a $kE^{\alpha^*}=lE^{\alpha^*}$.

Dans ce qui suit, r, s, désigneront respectivement le premier et le dernier élément de lE; pour abréger, on posera $kE^{\alpha^*}=\mathfrak{E}$.

Le théorème 1a se démontre en imitant la démonstration du lemme 2; prouvons la partie b du théorème. On voit tout d'abord que $\mathfrak{E}$ est limité par $R=(r,\,..\,r\,..)$ et $S=(s\,..\,s\,..)$. Supposons, d'autre part, l'existence d'une lacune intérieure MN de $\mathfrak{E}$. ξ étant un ordinal $<\alpha$, on voit qu'il existe au plus un complexe de rang ξ, $M_\xi=(m_0\,..\,m_\eta)_{\eta<\xi}$ tel que $[M_\xi]_{\mathfrak{E}}$ ait un élément en commun avec M et un élement en commun avec N.

De plus, on voit que $M_{\xi_1}=(.\,,\,\xi_1)_{M_{\xi_2}}$ si $\xi_1<\xi_2$ dans le cas où M_{ξ_2} existe.

On a deux cas:

1-er cas: M existe pour tout $\xi<\alpha$. Si l'on pose $\mathfrak{M}=(m_0\,,\,..\,m_\xi\,..)_{\xi<\alpha}$, on s'aperçoit aisément que pour tout ξ, $m_\xi\in E$ et, par conséquent, $\mathfrak{M}\in E^{\alpha^*}$. Autrement dit, le complexe $\mathfrak{M}$ appartiendrait ou bien à M où il serait alors le dernier élément, ou bien à N où il serait alors le premier élément, se qui est incompatible aves la supposition que M, N sont les composants d'une lacune intérieure de $\mathfrak{E}$.

2-me cas: il y a un nombre β, et soit β le plus petit nombre tel que M_β n'existe pas. On a deux éventualités:

a) β *est de première espèce.* Puisque $[M_0]_{\mathfrak{E}}=\mathfrak{E}$, on a $\beta>0$. En désignant par A l'ensemble des points $a\in E$ tels que $[M_{\beta-1}a]_{\mathfrak{E}}\subset M$ et en posant $B=E-A$, on voit que $A<B$, $A\supset O$ et $B\supset O$. Si A a un dernier élément e, le complexe $(M_{\beta-1}es\,..\,s)$

est le dernier point de M; si B a un premier point f, le complexe $(M_{\beta-1}\, f\, n\, .\, .\, n\, .\, .)$ est le premier élément de N; si aucun des derniers cas n'a lieu, soit g l'élément unique de lE entre A et B. On voit que le complexe $\mathfrak{M} = (M_{\beta-1}\, g\, .\, .\, g\, .\, .)$ appartient à $\mathfrak{E}$ et est ou bien le dernier point de M ou bien le premier point de N.

b) β *est de seconde espèce.* En considérant l'ensemble $[M_\beta]_{\mathfrak{E}}$, on voit qu'il appartient ou bien à M et alors le complexe $(M_\beta\, s\, .\, .\, .\, s)$ serait le dernier point de M, *ou bien* à N et alors $(M_\beta\, n\, .\, .\, n\, .\, .)$ serait le premier point de N, contrairement à l'hypothèse.

On a donc démontré que $\mathfrak{E}$ est non-lacunaire.

Passons à la démonstration du théorème 1c. E étant dense, on prouve, en répétant le raisonnement précédent, que chaque lacune (éventuelle) de $E^{\alpha*}$ est comblée par un et *un seul* élément de $kE^{\alpha*} - E^{\alpha*}$. Il s'agit alors de prouver la réciproque: $G = (g_0\, .\, .\, , g_\xi\, .\, .)_{\xi<\alpha}$ étant un élément de $kE^{\alpha*} - E^{\alpha*}$, en posant $M = E^{\alpha*}(\, .\, , G)_{\mathfrak{E}}$, $N = E^{\alpha*}(G, .)_{\mathfrak{E}}$, la coupure MN de $E^{\alpha*}$ ouvre une lacune de $E^{\alpha*}$.

Supposons, par impossible, que M ait un dernier point $\mathfrak{M} = (m_0\, .\, .\, m_\xi\, .\, .)_{\xi<\alpha}$. En posant $\varphi = \varphi(\mathfrak{M}, G)$, considérons les points m_φ, g_φ. Si $g_\varphi \varepsilon E$, il suffit de prendre un point quelconque de l'intervalle (m_φ, g_φ) de E, le substituer à la place de m_φ dans $\mathfrak{M}$, pour obtenir un point de M entre $\mathfrak{M}$ et G, ce qui est absurde.

Si g_φ non εE, il est clair que $g_\xi = g_\varphi$ pour tout $\varphi \leq \xi < \alpha$. On a trois cas:

1° g_φ est le premier point r de lE. On aurait $m_\varphi < r$, ce qui est absurde.

2° g_φ est le dernier point s de lE. Il suffit de remplacer, dans $\mathfrak{M}$, le point m_φ par un point de $(m_\varphi\, , .)_E$ pour obtenir un complexe succédant à $\mathfrak{M}$.

3^0 g_φ est un élément de $lE-E$ entre r et s. Ce cas est traité comme le cas précédent. Ainsi, le théorème 1 est complètement démontré. —

D'ailleurs, on voit que $lE^{\alpha*} \subseteq kE^{\alpha*}$; voilà un cas où $lE^{\alpha*} \subset kE^{\alpha*}$.

Lemme 3. ι, λ désignant respectivement le type ordinal de l'ensemble des nombres irationnels et de l'ensemble des nombres réels, on a ces identités

1^0 $(\omega^*+\omega)^{\omega^*} = \iota$

2^0 $l(\omega^*+\omega)^{\omega^*} = 1+\lambda+1$

3^0 $k(\omega^*+\omega)^{\omega^*} = u(\omega^*+\omega)^{\omega^*} = \Theta = 2^{\omega^*}$

Θ désignant le type ordinal de l'ensemble ordonné qu'on obtient du segment $[0,1]$ des nombres réels en remplaçant tout nombre *rationnel de l'intervalle* $(0,1)$ par une paire ordonnée de points (voir la définition 3·6).

Pour faciliter le langage, E désignera l'ensemble des entiers rationnels (le zéro compris).

Pour démontrer le lemme 3_1, il suffit, d'après le théorème de Cantor du § 12 D', de prouver que $E^{\omega*}$ est anti-limité, dense, partout lacunaire et séparable, ce qu'on vérifie immédiatement. D'après le même théorème, on voit que le type de $lE^{\omega*}$ est $1+\lambda+1$.

Si, enfin, r, s désignent respectivement le premier et le dernier élément de lE, et si l'on pose $R=(r,r\,..)$, $S=(s,s,..)$, on voit que les types de $\{R\}_E$, $\{S\}_E$ sont respectivement $1+\eta$ et $\eta+1$, η désignant le type ordinal de l'ensemble des nombres rationnels. Il est clair que $kE^{\omega*} = E^{\omega*} + \{R\}_E + \{S\}_E$. Or, si $(a_0\,..\,a_n\,,a_{n+1}\,r\,r\,..)$ est un élément de $\{R\}_E - R$, on voit que l'élément $(a_0..\,a_n\,,\,a_{n+1}-1,s,s\,..)$ de $\{S\}_E - S$ le précède immédiatement dans $kE^{\omega*}$ ce qui prouve que $kE^{\omega*} = \Theta - uE^{\omega*}$.

De plus, on prouve sans peine que $2^{\omega*} = \Theta$.

Lemme 4. μ étant un type continu, le type $\mu^{\alpha*}$, $\alpha > 0$, l'est aussi.

Lemme 5. Pour les α différents, les types $\vartheta^{\alpha *}$, $\vartheta = 1+\lambda+1$, sont différents deux à deux[6]).

5. E étant l'ensemble ordonné composé de trois éléments l, m, n tels que $l<m<n$, on posera, pour α quelconque

$(l+m+n)^{\alpha *} = \{M\}_E$, M désignant le complexe de rang α, $(m,..m..)$.

En particulier, ξ étant régulier, on posera $H_\xi = (l+m+n)^{\omega_\xi^*}$ (Voir la remarque 8 B 1)[7]).

ξ étant régulier, on a ce

Théorème 2. a. L'ensemble H_ξ est confinal (coïnitial) avec ω_ξ (ω_ξ^*) et semblable avec chacun de ses intervalles. On a $pH_\xi = \sum_{\zeta<\omega_\xi} 2^{p\zeta}$.

b. Tout ensemble ordonné ayant la puissance $\leq \aleph_\xi$ est semblable avec un sous-ensemble de H_ξ.[8])

Corollaire 1. Pour tout nombre ordinal α, on a

$$p\,H_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha} \text{ (voir le théorème 2·6).}$$

Le théorème 2 b nous montre que, en admettant l'axiome de M. Zermelo[9]), la théorie des ensembles ordonnés se réduit à la théorie des ensembles H_0, H_1,. . . H_ξ . . , ξ parcourant les ordinaux réguliers, et de leurs sous-ensembles, résultat qui, en vue de simplicité, ne laisse rien à désirer.

---

6) Voir le chap. II du Mémoire précité de M. Hausdorff.

7) Voir G. M. p. 179. Noter que $(l+m+n)^{\alpha^*}$ et E^{α^*} sont deux ensembles différents.

8) Ce théorème est dû à M. Hausdorff (G. M. p. 172— 85). On voit que H_0 est semblable avec l'ensemble des nombres rationnels.

9) Pour assurer que pour toute puissance k, il existe un aleph $\aleph_\alpha$ tel que $k \leq \aleph_\alpha$,

β). Tout sous-ensemble infini de E a un point d'accumulation maximée dans E;[1])

γ). $\mathcal{F}$ étant une famille monotone non-vide quelconque de sous-ensembles *fermés* non-vides de E, on a $\Pi\mathcal{F} \supset 0$ (voir le théorème 3·5);

δ). E possède la propriété de Borel-Lebesgue[1]) (voir le théorème 3·6).[3])

En combinant l'inclusion $\delta \to \alpha$ du théorème précédent avec le théorème 3·4 on obtient ce

Théorème 3. Pour qu'un ensemble ordonné non-vide possède la propriété de Borel-Lebesgue, il faut et il suffit qu'il possède la propriété de Lebesgue-Khintchine et qu'il soit limité (Déf. 1·7 et 3·2).

Théorème 4. Pour qu'un espace (V) de M. Fréchet E, puisse être considéré comme un ensemble ordonné sans altérer l'opération de dérivation des sous-ensembles de E, il faut et il suffit qu'il existe une famille monotone saturée d'ensembles, $\mathcal{F}$, telle que $\sum\mathcal{F} = E$ est jouissant de la propriété que la famille $J_{\mathcal{F}}$ soit une famille de voisinages définissant E, en considérant tout élément de $J_{\mathcal{F}}$ comme voisinage de tout point qui lui appartient.[4])

Ce théorème est une conséquence immédiate des définitions 1·9 et des théorèmes 4·4 et 4·5).

Théorème 5. Pour qu'un espace ordonné E soit homéomorphe d'une classe (L) de M. Fréchet, il faut et il suffit que tout point de E ait un caractère au plus dénombrable [5]). Tout ensemble ordonné qui est une classe (L) est aussi une classe (S) [1]).

---

[3]) Le théorème 2 est dû à M. P. Alexandroff et Urysohn (loc. cit. (2·5) p. 8 et suiv.).

[4]) Pour la terminologie, consulter le § 4.

[5]) Un point a de E sera dit avoir un caractère au plus dénombrable, s'il existe une famille au plus dénombrable $\mathcal{F}$ d'intervalles de E telle que $\Pi\mathcal{F} = a$.

En omettant la démonstration du théorème 5 parce qu'elle ne présente aucune espèce de difficultés, remarquons que c'était justement à partir de la notion de grandeur qu'a pris naissance la notion de limite qui peut être considérée comme fondamentale en Analyse. D'autre part, le théorème 5 nous montre que la classe des ensembles ordonnés qui sont une classe (L) de M. Fréchet est bien restreinte, et alors, il serait très naturel d'envisager des classes (L) généralisées où la puissance de suites de points déclarées comme divergeantes ou convergentes ne jouerait aucun rôle. On verrait alors que tout ensemble ordonné serait une classe (S) généralisée, celles-ci étant définies comme des classes (L) généralisées dont tout ensemble dérivé est fermé[6]).

λ désignant le type ordinal de l'ensemble des nombres réels, on a ce

Théorème 6. Les quatre types ordinaux λ, $1+\lambda$, $\lambda+1$ et $\vartheta \equiv 1+\lambda+1$, sont les seuls types ordinaux connexes distanciables [7]).

Si E est connexe, distanciable et limité, il est, d'après l'inclusion $\alpha \to \beta$ du théorème 2, compact en soi, donc aussi séparable.[8])

Alors, d'après le théorème de Cantor (voir § 12D), le type de E est ϑ. De même, on voit que si E est anti-limité connexe et distanciable, son type ordinal est λ; etc.

Lemme 1. μ étant un type ordinal quelconque, le type $\lambda\mu$ est distanciable.

Par définition, $\lambda\mu$ est le type ordinal de l'ensemble E des complexes (m, x) ordonnés alphabétiquement (définition 1·15), m, x parcourant respectivement un ensemble M de type μ et l'intervalle (0,1) des nombres réels. Alors, $C^i=(m^i, x^i)$, $(i=1, 2)$, étant deux complexes différents de E on s'aperçoit qu'il suffit de poser

$$\varrho(C^1, C^2)=1 \text{ si } m^1 \neq m^2 \text{ et } \varrho(C^1, C^2)=|x^1-x^1| \text{ si } m^1=m^2,$$

6) voir E. A. p. 164.

7) Une classe distanciable veut dire une classe $(\mathfrak{D})$ de M. Fréchet.

8) Tout ensemble distanciable compact est séparable (E. A. p. 72).

pour obtenir un ensemble ordonné distancié[9]) de type ordinal $\lambda\mu$.—

α étant un ordinal quelconque, on va prouver ce

Lemme 2. Pour qu'un type ordinal de la forme $\lambda^{\alpha *}$ soit distanciable, il faut et il suffit que α soit ou bien de première espèce ou bien tel que $\tau\alpha = \omega$ (voir la déf. 2.2 et 5·2).

Tout d'abord, α étant de seconde espèce et tel que $\tau\alpha > \omega$, on prouve sans peine que chaque intervalle gauche de $\lambda^{\alpha *}$ est confinal avec le nombre régulier $\tau\alpha$, et par conséquent, aucun point de $\lambda^{\alpha *}$ ne serait à un caractère au plus dénombrable[5]). Or, $\lambda^{\alpha *}$ étant supposé distanciable, aucun point de $\lambda^{\alpha *}$ n'a un caractère non dénombrable comme on le vérifie sans peine. Autrement dit, si $\lambda^{\alpha *}$ est distanciable, α n'est pas un nombre de seconde espèce tel que $\tau\alpha > \omega$.

Prouvons la réciproque: si α est de première espèce, ou de seconde espèce tel que $\tau\alpha = \omega$, le type $\lambda^{\alpha *}$ est distanciable. On se contentera de la prouver pour le cas où $\tau\alpha = \omega$. Soit

$$(1) \qquad \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < \ldots \to \alpha$$

une suite d'ordinaux croissant $< \alpha$ et ayant α pour borne supérieure.

Il s'agit alors de distancier l'ensemble E des complexes $(a_0, \ldots a_\xi \ldots)_{\xi < \alpha}$, les a_ξ parcourant l'intervalle (0,1). On posera, pour tout $A \varepsilon E^{\alpha *}$, $\varrho(A, A) = 0$. Ensuite, A^1, A^2 étant deux élément différents de E, on posera $\varrho(A^1, A^2) = \frac{1}{n}$, n étant le premier indice ν tel que $\varphi(A^1, A^2) \leq \beta_\nu$ (voir la définition 5.1).

On voit aisément que l'ensemble ordonné $E^{\alpha *}$ devient un espace distancié, E_α, et que de plus la condition triangulaire de M. Fréchet, prend cette forme particulière:

$$(\varrho) \qquad \varrho(A^1, A^2) \leq \max. (\varrho(A^2, A^3), \varrho(A^3, A^1));$$

(voir le lemme 5.1)

Il s'agit de prouver que $E^{\alpha *}$ et E_α sont homéomorphes; pour cela, il suffit de prouver ces deux points:[10])

---

[9]) $\varrho(A, B)$ veut dire „distance AB".

[10]) E. A. p. 173.

1-er. $A=(a_0 .. a_\xi ..)_{\xi<\alpha}$ étant un point quelconque de $E^{\alpha *}$, tout intervalle $(A^1 A^2)$ de $E^{\alpha *}$ contient une sphère $S(A, r)$ de E_α[11].

n étant un entier tel que le nombre ordinal β_n de la suite (1) soit supérieure au plus grand des nombres ordinaux $\varphi(A^1 A^2)$, $\varphi(A A^1)$ et $\varphi(A A^2)$, considérons la sphère $S\left(A, \frac{1}{n+1}\right)$; on voit qu'elle coïncide avec l'ensemble $[a_0 .. a_{\beta_n}]_{E^{\alpha *}}$ et qu'elle fait partie de l'intervalle $(A^1 A^2)$ de $E^{\alpha *}$ (voir la déf. 5·3).

2-me. $A=(a_0 .. a_\xi ..)_{\xi<\alpha}$ étant un point quelconque de E_α, la sphère $S\left(A, \frac{1}{n+1}\right)$ de E_α contient un intervalle de $E^{\alpha *}$ contenant le point A.

En effet, $a^i_{\beta_{n+1}}$, $(i=1, 2)$, étant deux nombres réels entre 0 et 1 tels que $a^1_{\beta_{n+1}} < a_{\beta_{n+1}} < a^2_{\beta_{n+1}}$, désignons par A^i, $(i=1, 2)$, les complexes qu'on obtient en remplaçant dans le complexe A, le nombre $a_{\beta_{n+1}}$ par les nombres $a^i_{\beta_{n+1}}$ respectivement. Il est clair que $A^1 < A < A^2$ et que l'intervalle $(A^1 A^2)$ de $E^{\alpha *}$ fait partie de la sphère $S\left(A, \frac{1}{n+1}\right)$ de E_α.

Remarquons, enfin, que, par un raisonnement analogue, on peut prouver que le type $(\omega^* + \omega)\omega^*$ (voir le lemme 5.3) est celui d'un ensemble ordonné E qui peut être distancié en posant respectivement $\varrho(A A) = 0$, $\varrho(A^1, A^2) = \frac{1}{\varphi(A^1 A^2)+1}$, pour tout point A de E et tout couple de points différents A^1, A^2 de E. C'est la définition de la distance déjà connue dans le cas de *l'espace à zéro dimensions* G_0 de R. Baire[12]. Celui-ci est sem-

---

[11]) La sphère $S(A, r)$ de E_α ayant A pour centre et r pour rayon est l'ensemble de tous les points X de E_α tels que $\rho(A, X) < r$.

[12]) Voilà la définition de l'espace G_0 de Baire. M étant un ensemble dénombrable *quelconque* (ordonné ou non-ordonné), soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble des suites (ou complexes de rang ω) $m_1, m_2 \ldots m_i \ldots$, les m_i parcourant indépendamment M. On posera, M^1, M^2 étant deux points différents de $\mathfrak{N}$: $\rho'(M^1, M^2) = \frac{1}{\varphi(M^1, M^2)}$ et $\rho(N, N) = 0$, pour tout $N \varepsilon \mathfrak{N}$. (voir R. Baire, Acta

blable au type $(\omega^*+\omega)^{\omega^*}$, un résultat qui se déduit aussi du lemme 5·3 et du fait que l'espace G_0 de Baire est homéomorphe de l'ensemble des nombres irrationnels.

Remarquons que le type ω^{ω^*} n'est pas homéomorphe de l'espace G_0. En effet, on prouve aisément que $\omega^{\omega^*} = 1+\lambda$.[13])

Enfin, on prouve facilement que le type $(1+\lambda)\,\omega_1$ est connexe, localement distanciable[14]) (donc aussi un espace (E) de M. Fréchet[1]) sans être distanciable.

Problème. Caractériser la classe des types ordinaux distanciables.

Dimension des ensembles ordonnées.

Les symboles $dim\ E$, dE désigneront respectivement la dimension d'Urysohn-Menger[15]) de E et le type de dimension de M. Fréchet ou le type topologique de E.[16]) De même, x étant un point de E, on désignera par $dim_x\ E$ la dimension d'Urysohn-Menger de E dans le point x.[17])

E étant un ensemble non-vide, on a ce

Théorème 6. *a.* $dim\,E=0$ ou 1 c'est-à-dire $dim\ E<2$.

b. Pour que $dim\ E=0$, il faut et il suffit que E soit totalement non-connexe (voir la déf. 1·12).

c. Pour que $dim_x\ E=1$ pour tout $x \varepsilon E$, il faut et il suffit qu'aucun intervalle non-vide de E ne soit totalement non-connexe.

Math. 32, p. 97—175 et M. Fréchet E. A, p. 118). C'est dans l'espace G_0 (ou dans un modèle de G_0) et non dans l'ensemble des nombres réels que M. N. Lusin expose ses recherches sur les ensembles analytiques, projectifs etc. (N. Lusin, Ensembles Analytiques, Paris, 1930).

13) Voir G. M. p. 151.

14) Un espace abstrait est dit localement distancié si pour tout son point a il y a un voisinage de a qui est un espace distancié.

15) Pour la terminologie, voir C. Kuratowski, Topologie I, Warszawa, 1933 p. 116 et suiv.

16) Voir E. A. p. 30 et suiv. aussi: Kuratowski, Ibid. p. 72.

17) Kuratowski, ibid. p. 116.

La partie a du théorème 6 est une conséquence immédiate de la définition de $dim\ E$ et du lemme 3·12; pour montrer les parties b, c du théorème, il est clair qu'il faut et il suffit de prouver ce

Lemme 4. x étant un point de E, pour que $dim_x E = 1$, il faut et il suffit que x soit contenu dans une portion connexe de E (voir la convention 1·2).

Prouvons le lemme 4. On peut, évidemment, supposer que x ne soit pas une extrémité de E. La supposition que l'ensemble $(.,x]_E$ ne soit confinal avec aucune portion *connexe* de E bien que, par hypothèse, $dim_x E = 1$, veut dire que (voir le théorème 3·8) pour *tout point* $a \varepsilon (.,x)_E$, il existe une portion droite P_1 de $[a,x]_E$ telle qu'elle soit le composant supérieur soit d'une lacune soit d'un saut de $[a,x]_E$.

De même, sous la supposition qu'il n'existe aucune portion connexe de E coïnitiale avec $[x,.)$, on démontre, *pour tout* $b \varepsilon (x,.)$, l'existence d'une portion $P_2 \subseteq [x, b]$ telle qu'elle serait le composant inférieur soit d'une lacune soit d'un saut de $[x, b]_E$. Autrement dit, l'ensemble $P_1 + P_2 \subset (a, b)$ serait une portion à la fois fermée et ouverte de E contenant le point x. L'intervalle (ab) de E étant quelconque, cela voudrait dire exactement que $dim_x E = 0$, contrairement à l'hypothèse.

Pour montrer que la condition de lemme 4 est suffisante, il est manifeste qu'il suffit de prouver le

Lemme 5. Pour tout point x d'un ensemble ordonné connexe E, on a $dim_x E = 1$.

Ce lemme est évident parce que, A étant un intervalle quelconque de E tel que $x \varepsilon A$, il est manifeste que l'ensemble $\overline{A} - A$ est composé soit d'un point soit de deux points de E (voir le lemme 3·12).

Remarquons que $dim\ \lambda^{\alpha *} = 0$ pour tout ordinal α de seconde espèce. En effet, on prouve facilement que les $\lambda^{\alpha *}$, α étant de seconde espèce, sont partout lacunaire.[18])

---

[18]) En effet, on a ce théorème: E, α étant respectivement un ensemble ordonné anti-limité non-vide et un nombre ordinal de seconde espèce, l'ensemble $E^{\alpha *}$ est partout lacunaire.

Que $dim\ \lambda^{\alpha*}=0$ pour les α tels que $\tau\alpha=\omega$, c'est également une conséquence de la forme particulière (ϱ) de la condition triangulaire de M. Fréchet.[19])

D'après le théorème précédent, le symbole $dim\ E$, E étant un ensemble ordonné quelconque, ne pourrait avoir qu'une des trois valeurs: $-1, 0$ et 1. Il en est tout autrement du symbole dE. En effet, I désignant le segment $[0,1]$ des nombres réels, on sait (voir le lemme 5·5) que les $dI^{\alpha*}$, α parcourant des ordinaux, sont deux à deux différents. Malheureusement, ils sont, en général, incomparables entre eux. Si l'on désigne par $dE_1 \parallel dE_2$ le fait que dE_1, dE_2 sont incomparables, on voit, par exemple, que $dI \parallel dI^{\omega*}$.—

Considérons, enfin, le symbole tE (voir la définition 1·14). On prouve facilement que $tI^{\alpha*} < tI^{\beta*}$ si $\alpha<\beta$ sont deux ordinaux quelconques et, par conséquent, on pourrait poser $tI^{\alpha*}=\alpha$. Mais pour les α finis, les $tE^{\alpha*}$ ne coïncident aucunement avec la dimension dR_α de l'espace euclidien à α dimension (voir E. A. p. 56 et suiv.)

Par conséquent, l'ensemble des tE différents est extrêmement riche. Il y en a qui sont incomparables, par exemple $t\omega_1$ et λ. On voit aussi que $t\lambda = t(1+\lambda+1)$ sans qu'ils soient semblables c'est-à-dire tels que $t\lambda = t(1+\lambda+1)$. Mais, d'après M. Banach[20]), si G, H sont deux ensembles ordonnés tels que $tG = t_a^* H$, alors $G = G_1 + G_2$, $G_1 G_2 = 0$, $H = H_1 + H_2$, $H_1 H_2 = 0$ et $tG_i = tH_i$, $(i=1, 2)$. (voir la définition 1·14).

Problème: Soient G_1, G_2, H_1, H_2 quatre sous-ensembles d'un ensemble ordonné jouissant des propriétés suivantes: $G_1 G_2 = 0$, $H_1 H_2 = 0$ et $tG_i = tH_i$, $(i=1, 2)$; en posant $G = G_1 + G_2$ et $H =$

---

19) D'ailleurs, on peut prouver ce théorème: Si pour tout triple de points A^i $(i=1, 2, 3)$ d'un espace distancié E, l'ensemble des distances $\rho(A^1 A^2)$, $\rho(A^2 A^3)$, $\rho(A^3 A^1)$, ne se compose qu'au plus de deux nombres différents, alors $dim\ E=0$. Cela a lieu, en particulier, si l'équation triangulaire de M. Fréchet est de la forme

$$\rho(A^1, A^2) \leq \text{Max.}\ (\rho(A^2 A^3), \rho(A^3 A^1)).$$

20) Fund. Math. 6, p. 236.

$=H_1+H_2$, est-ce que les types ordinaux tG et tH sont *comparables*? et en particulier sont-ils égaux?[21])

§ 7. Sur quelques puissances se rattachant à un ensemble ordonné.

Pour la commodité du raisonnement, on admettra, dans ce §, l'axiome de Zermelo, ou ce qui revient au même, l'hypothèse qu'il n'y ait pas de puissances incomparables. E désignera, comme toujours, un ensemble ordonné et pE sa puissance.

Il est commode de poser cette définition: Une famille d'ensembles sera dite *disjoctive*[1]) si les ensembles dont elle est composée, sont, deux à deux, disjoints; de plus, la famille vide aussi bien que chaque famille composée d'un seul élément sera dite *disjonctive*.

1. Le signe p_0E désignera la borne supérieure des pF, F parcourant la famille des sous-ensembles bien ordonnés ou inversement bien ordonnés de E. (voir la définition 1 8); p_1F désignera la borne inférieure des pF, F parcourant la famille des sous-ensembles de E partout denses sur E.

p_4E (p_2E) désignera la borne supérieure des $p\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ parcourant la classe des familles disjoctives de segments (d'intervalles non vides) de E.

p_3E désignera la borne supérieure des $p\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ parcourant la classe des familles de segments de E n'impiétant pas les uns sur les autres; p_5E désignera la borne inférieure des $p\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ parcourant la classe des familles d'intervalles déterminant l'espace ordonné E.

Lemme 1. Les nombres p_iE, $(i=0,1,\ldots 5)$, sont parfaitement déterminés et tels que $p_iE \leq pE$.

Que les p_iE soient bien déterminés, c'est la conséquence du fait que „l'ensemble" des nombres cardinaux est bien ordonné.

---

[21]) Le même problème se pose en considérant les types dimensionnels de M. Fréchet des ensembles appartenant à une certaine classe d'espaces abstraits (par example espaces distanciés, accessibles, etc). Le problème semble assez difficile (cf. l'énoncé original du lemme de M. Banach et le problème: *si la réciproque du lemme de Banach lui-même est vraie*?)

[1]) Cette expression si suggestive est due à M. Fréchet. Dans la suite, on en déduira d'autres.

Théorème 1.[2]) a. $p_i l E = p^i E$, $(i = 0, 1, .. 5)$

b. $p_i v E = p_i E$, $(i = 0, 1, 2)$; $p_j v E = p E$, $(j = 3, 4, 5)$;

c. $p_0 w E = p_0 E$, $p_i w E = p E$, $(i = 1, 2, .. 5)$.

Démonstration. L'égalité $p_0 E = p_0 j E$. $(j = u, l, w)$, étant évidente, considérons les autres cas. Le théorème étant banal pour les E finis, on supposera que E est infini.

L'égalité $p_1 l E = p_1 E$ est une conséquence immédiate du lemme 3·21. Que $p_j w E = p E$, $(j = 1, .. 5)$, c'est une conséquence de ce que E coïncide avec l'ensemble des points isolés de l'ensemble $w E$ (voir le théorème 3·11). Les égalités $p_i j E = p_i E$, $(i = 1, 2; j = l, v)$, proviennent de ce que, A étant un intervalle non-vide quelconque de jE, on a $A E \supset 0$ comme on le vérifie sans aucune peine. Il nous reste encore à prouver que $p_i l E = p E$ et $p_i v E = p E$, pour $i = 3, 4, 5$.

A ce but, prouvons tout d'abord ces deux lemmes:

Lemme 2. E étant infini, on a $p_3 E = p_4 E$.

Lemme 3. Si E n'a aucun point d'accumulation bilatérale, on a $p_4 E = p E$.

Le dernier lemme étant évident, démontrons le premier. Soit alors $\mathcal{F}$ une famille infinie de segments S de E n'impiétant pas les uns sur les autres. S étant un élément de $\mathcal{F}$, soient S^1 l'élément (éventuel) de $\mathcal{F}$ contenant l'extrémité gauche de S, et S^2 l'élément (eventuel) de $\mathcal{F}$ contenant l'extrémité droite de S. Ceci étant, soient

$$(1) \qquad S_0, S_1, .. S\varphi, .. \varphi < \omega_\beta, p\,\omega_\beta = p\,\mathcal{F},$$

les éléments de $\mathcal{F}$. Désignons par $\mathcal{F}_0$ la famille des s_ψ déterminés de la façon suivante: on posera $s_0 = S_0$; les s_ξ étant déterminés pour tout $\xi < \alpha$, s_α désignera le terme du plus faible indice dans la suite (1) ne coïncidant avec aucun des $s_\xi, s^1_\xi, s^2_\xi, \xi < \alpha$. Il est clair que $\mathcal{F}_0$ est une famille de $\mathcal{F}$ telle gue $p\mathcal{F} \leq 3 . p\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0$.

---

[2]) Pour la terminologie et les notations, voir la section VI du § 3.

Donc $p\mathcal{F} = p\mathcal{F}_0$. Or, les éléments de $\mathcal{F}_0$ sont de segments deux à deux disjoints de E. On en tire, l'inégalite $p_3 E > p_4 E$ étant absurde, que $p_3 E = p_4 E$.

A la suite du lemme 3, on a $p_4 v E = pE$ parce que, d'une part, $p v E = pE$, et d'autre vE n'a aucun point d'accumulation part, bilatérale. A la suite du lemme 2, on a $p_3 v E = p_4 v E$, ou, à la suite de $p_4 v E = pE$, $p_3 v E = p E$.

Prouvons que $p_5 w E = pE$. Tout d'abord, les points de E étant isolés dans wE; on a $p E \leq p_5 w E \leq p w E$. Or, on voit que $p w E = p E$, et, par conséquent, $p_5 w E = pE$.

Il s'agit encore de montrer que $p_5 l E = p_5 E$. Rappelons ce résultat qu'on vérifie aisément: $\mathcal{F}$ étant une famille d'intervalles déterminant E, la famille $\mathfrak{G}$ de tous les intervalles non-vides de lE dont l'ensemble des extrémités est égal à celui des éléments de $\mathcal{F}$, est une famille d'intervalles déterminant l'espace lE. Or on voit que $p\mathfrak{G} = p\mathcal{F}$. Si, en particulier, $p\mathcal{F} = p_1 E$ (une telle famille existe, comme on s'en apperçoit), on en conclut que $p_5 l E \leq p_5 E$, donc $p_5 l E = p_5 E$.

Ainsi, le théorème 1 est complètement démontré.

Lemme 4. p désignant la puissance de l'ensemble des sauts de E, on a $p_i s E = p_i E + \aleph_0 \cdot p$, $(i = 0, .. 5)$. (voir la déf. 3·5).

Corollaire a. Pour que $p_0 s E > p_0 E$, il faut et il suffit que $1 < pE < \aleph_0$.

b. Pour que $p_i s E > p_i E$, il faut et il suffit que $p_i E < p$, $(i = 1, 2, .. 5)$.

Lemme 4.' E étant infini et sans aucun saut de seconde espèce, on a $p_i s E = p_i E$, $(i = 0, 1, .. 5)$.

On se contentera de prouver que $p_1 s E = p_1 E$.

p étant la puissance de l'ensemble des sauts de E, il suffit de prouver, d'après le lemme précédent, que $p_1 E \geqslant p$. Il est clair que, q désignant la puissance de l'ensemble Q de points de E qui ne sont pas de points d'accumulation bilatérale de E, on a $p \leq q$. Prouvons que $p_1 E \geqslant q$. Soient donc, F un sous-ensemble de E partout dense sur lui et ayant la puissance $p_1 E$

et a un point quelconque de l'ensemble Q. Si a est isolé, posons $a'=a$; il est clair que $a' \varepsilon F$. Si a n'est pas isolé dans E, et s'il n'est pas une extrémité de E, soit a' le point de E qui précède immédiatement le point a si a n'est pas isolé du côté droit, et qui succède immédiatement à a si a est un point d'accumulation de E du côté gauche. L'ensemble E étant supposé sans aucun saut de seconde espèce, on voit que le point a' est isolé et par conséquent appartient à F. Autrement dit, à tout point a de Q correspond un seul point de F, un point de F pouvant correspondre au plus à trois points différents de Q. On a donc $3pF \geqslant q$ c'est-à-dire $p_1 F \geqslant q$.

Lemme 5. On a $p_i SE \leqslant p_i E$. Si SE est infini, alors $p_i SE = p_i E$, $(i=0, 1, \ldots 5)$. (voir la définition 3·5)

On se contentera de prouver que si $pSE \geqslant \aleph_0$, alors $p_4 SE = p_4 E$.

Tout d'abord, on voit qu'on peut supposer que $p_4 E > \aleph_0$. De plus, à cause de l'égalité $p_4 lE = p_4 E$, on peut supposer que E donc aussi SE est non-lacunaire.

Ceci étant, soit $\mathcal{F}$ une famille non-dénombrable de segments $[a,b]$ de E n'impiétant pas les uns sur les autres. En supposant que $a<b$, désignons par $\mathcal{F}_0$ la famille des segments $[a', b']$ de SE construits de la façon suivante: a' est le dernier point de $(., a]_{SE}$,[3]), b' est le premier point de $[b, .)_{SE}$. L'ensemble E étant non-lacunaire, SE l'est encore et par conséquent, les points a', b' existent (sauf, peut-être, dans le cas où a ou b sont des extrémités de E). Puisque $p_4 \lambda = \aleph_0$, tout élément de $\mathcal{F}_0$ correspond à une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$; autrement dit, $p\mathcal{F} \leqslant \aleph_0 . p\mathcal{F}_0$ donc $p\mathcal{F} = p\mathcal{F}_0$. Or, les éléments de $\mathcal{F}_0$ sont de segments de SE n'impiétant pas les uns sur les autres. On en conclut que $p_4 SE = p_4 E$.

Lemme 6. $p_0 E \leqslant p_1 E$.

C'est bien évident parce que, pour tout ensemble F bien ordonné ou inversement bien ordonné, on a $p_0 F = p_1 E = pE$ (voir le lemme 3).

---

[3]) Le sigue $(., a]_{SE}$ représente l'ensemble de tous le points de SE qui ne succèdent pas, dans E, au point a.

Lemme 7. Pour chaque E infini n'ayant aucun saut de seconde espèce, on a $p_2E=p_3E$.

Tout d'abord, il est clair que $p_2E \leqq p_4E$ donc, à la suite du lemme 2, aussi $p_2E \leqslant p_3E$. Prouvons que $p_2E \geqslant p_3E$. Soit $\mathcal{F}$ une famille infinie quelconque de segments $[a, b]_E$ deux à deux disjoints. $S=[a, b]$, $a<b$, étant un élément de $\mathcal{F}$, désignons par S^1 l'élément (éventuel) de $\mathcal{F}$ contenant le dernier point (éventuel) de $(\,.\,, a)_E$, et par S^2 l'élément (éventuel) de $\mathcal{F}$ contenant le premier point (éventuel) de $(a, .\,)_E$.

Si alors

$$(2) \qquad S_0, S_1, \ldots S_\varphi, \ldots \quad (\varphi < \omega_\beta,\ p\,\omega_\beta = p\,\mathcal{F}),$$

sont les éléments de $\mathcal{F}$, soit $\mathcal{F}_0$ la famille des s_ξ construits comme suit:

Si au moins un des segments $S_0 = [a, b]$, $a<b$, S_0^1, S_0^2 n'est pas un saut de E, soit s_0 l'ensemble des points entre ses extrémités; s'ils sont, tous, de sauts de E, s_0 sera l'intervalle composé du point a si b n'est pas isolé (évidemment du côté droit), du point b si a n'est pas isolé (évidemment du côté gauche et égal à S si a, b sont isolés.

Les s_ξ, $\xi<\alpha$, étant construits, soit S_γ le premier terme de la suite (2) qui n'était pas pris en considération lors de la construction des s_ξ, pour les $\xi<\alpha$.

Alors, s_α sera construit, à partir de S_γ, exactement de la même façon que l'on a défini s_0 à partir de S_0,

On s'assure que les s_ξ ainsi construits sont d'intervalles non-vides de E, deux à deux disjoints, et que leur famille $\mathcal{F}_0$ a la même puissance que la famille $\mathcal{F}$.

On en conclut que $p_2E \geqslant p_3E$ et finalement $p_2E=p_3E$.

Lemme 8. Pour tout ensemble ordonné infini, on a $p_2E \leqq p_3E$. Pour que $p_2E < p_3E$, il faut et il suffit que l'ensemble Δ des sauts de seconde espèce de E soit tel que $p\Delta > p_2E$. On a alors $p\Delta = p_2E$.

a. Par hypothèse, on a $pE \geqslant \aleph_0$, $p_2E < p_3E$. Supposons que $p\Delta \leqq p_2E$.

En désignant par M l'ensemble ordonné qu'on obtient en intercalant dans tout saut de seconde espèce de E un ensemble de type ordinal λ, on a, d'après le lemme précédent, $p_2 M = p_3 M$. D'autre part, $p_2 M = p_2 E + \aleph_0 p\Delta = p_2 E$, parce que par supposition $p\Delta \leq p_2 E$. Ensuite, $p_3 M = p_3 E + \aleph_0 . p\Delta = p_3 E$.

On aurait alors $p_3 E = p_3 M = p_2 E$ et finalement $p_3 E = p_2 E$ contrairement à l'hypothèse. On a donc non pas $p\Delta \leq p_2 E$ mais $p\Delta > p_2 E$ [4]).

b. Par hypothèse, $p\Delta < p_2 E$, $pE \geqslant \aleph_0$.

M ayant la même signification que tout à l'heure, on a

$$p_2 M = p_2 E + \aleph_0 . p\Delta = p\Delta; \; p_3 M = \aleph_0 . p_3 E = p_3 E.$$

A cause de $p_2 M = p_3 M$, on en tire l'égalité voulue $p_3 E = p\Delta$.

Lemme 9. Pour tout E infini, on a $p_5 E = p_1 E + p_4 E$.

D désignant l'ensemble des sauts de seconde espèce de E, on va prouver tout d'abord que $p_5 E = p_1 E + pD$. En effet, soient F un sous-ensemble de E partout dense sur lui et de puissance $p_1 E$, G l'ensemble des extrémités de D, H la réunion de F et G, $\mathcal{F}$ la famille de tous les intervalles non-vides de E dont les extrémités appartiennent à H, alors il est facile de prouver que $\mathcal{F}$ est telle que, a étant un point et J un intervalle quelconque de E contenant a, il existe un intervalle I de E tel que $I \subseteq J$ et $a \varepsilon I \varepsilon \mathcal{F}$. Or, $p\mathcal{F} = pF + pD$.

Donc $p\mathcal{F} = p_1 E + pD$. On en conclut que $p_5 E \leq p_1 E + pD$.

Or, il est évident que $p_5 E \geqslant p_1 E$ et $p_5 E \geqslant pD$. Finalement, $p_5 E = p_1 E + pD$.

D'autre part, il est clair que $pD \leq p_4 E$. Par conséquent $p_5 E \leq p_1 E + p_4 E$ donc $p_5 E = p_1 E + p_4 E$.

2. Il nous reste encore à trouver une relation plus étroite entre $p_c E$ et pE, d'une part, et entre $p_1 E$, $p_2 E$ d'autre part ce qu'on fera dans le chapitre II.

Toutefois, on va démontrer ce

[4]) Si l'on n'admettait pas l'axiome de Zermelo, la dernière conclusion ne serait pas permise (voir la note 2·8).

Lemme 10. Si $p_1 E = p_2 E$ pour tout ensemble ordonné *continu* E, alors $p_1 E = p_2 E$ pour chaque ensemble ordonné E.

Il s'agit donc de prouver que l'égalité

$$(1) \qquad p_1 E = p_2 E$$

est vraie pour tout ensemble ordonné E si elle est vraie pour tout E *continu*.

L'égalité (1) étant évidente pour des E *finis*, supposons que E est *infini*. De plus, à cause des égalités $p_i\, l\, V E = p_i E$ pour $i = 1, 2$,[5]) d'une part, et du fait que l'ensemble $l\, V E$ est non-lacunaire et sans aucun saut de seconde espèce, d'autre part, on peut se borner à l'étude des E *infinis*, *non-lacunaires* et sans aucun *saut de seconde espèce*. Soit donc E un ensemble ordonné infini, non-lacunaire et *sans aucun saut de seconde espèce*. A la suite des lemmes 2 et 7, on aura $p_2 E = p_4 E$ et $p_2 s E = p_4 s E$.

L'ensemble E étant sans aucun saut de seconde espèce, on a, d'après le lemme 4', ces égalités:

$$(2) \qquad p_1 E = p_1 s E \text{ et } p_4 E = p_4 s E$$

On en conclut que $p_2 E = p_4 s E$

D'autre part, $s E$ étant continu, on a, par hypothèse, $p_1 s E = p_2 s E$. A la suite des relations précédentes, on a donc $p_1 s E = p_2 s E = p_4 s E = p_4 E = p_2 E$ et en particulier $p_1 s E = p_2 E$.

La dernière relation, vu la relation (2), nous donne finalement l'égalité cherchée.

Lemme 10'. Si la borne supérieure $p_2 E$ est atteinte pour tout E continu, elle est atteinte pour tout ensemble ordonné E.

Soit E un ensemble quelconque; en désignant par I l'ensemble des points isolé de E, on a deux cas:

Premier cas: $p\, I \geqslant p_2 E$; il est clair alors que la borne $p_2 E$ est atteinte parce qu'il suffit de considérer les éléments de I comme intervalles non-vides de E.

---

[5]) Il va sans dire que le signe lVE veut dire $l(VE)$.

Second cas. $p\,I < p_2 E$. En posant $F = E - I$, on voit que l'ensemble $S\,F$ est dense, et par conséquent, l'ensemble $I\,V(F)$ est continu. Par hypothèse, il y a une famille $\mathcal{F}$ d'intervalles non-vides de $I\,V\,F$ telle que $p_2\,I\,V\,F = p\,\mathcal{F}$. D'autre part, on conclut de proche en proche, que $p_2\,I\,V\,F = p_2\,V\,F = p_2\,F = p_2\,E$.

Or, chaque intervalle M de $I\,V\,F$ contient un intervalle non-vide M_0 de l'ensemble F; si l'on désigne par M_2 l'intervalle de E ayant les mêmes extrémités que l'intervalle M_0 de F et si l'on désigne par $\mathcal{F}_2$ la famille des M_2, M parcourant les éléments de $\mathcal{F}$, on voit que $\mathcal{F}_2$ est une famille *disjonctive* d'intervalles non-vides de E telle que $p\,\mathcal{F}_2 = p\,\mathcal{F}$ et à la suite des égalités précédentes: $p\,\mathcal{F}_2 = p_2\,E$.

Les deux lemmes précédents donnent ce

Théorème 2. Si, quel que soit l'ensemble ordonné *continu* E, il existe une famille *disjonctive* $\mathcal{F}$ d'intervalles extraits de E tels que $p\,\mathcal{F} = p_1\,E$, il en est de même quel que soit l'ensemble ordonné.

Le problème si, pour des E continus, la borne supérieure $p_2 E$ est atteinte et si elle est égale à $p_1\,E$, se réduit, comme on le voit, à cette question: soient E un ensemble ordonné continu et $\mathcal{F}$ une famille d'intervalles déterminant E; existe-t-il nécessairement une sous-famille *disjonctive* de $\mathcal{F}$ ayant la puissance $p_1\,E$? *(Problème sur la structure cellulaire de continus. Cf. la note 11 du Complément).*

Cette épineuse question nous occupera dans la suite de ce travail.

CHAPITRE II

ENSEMBLES ET TABLEAUX RAMIFIES.

En généralisant la notion de *relation d'ordre* introduite par G. Cantor, on va définir la notion de *relation de ramification* en s'inspirant de l'idée de subdivision (bipartition, tripartition, etc.) qui intervient dans un grand nombre de démonstrations classiques. On en déduira la notion d'ensembles et tableaux ramifiés.

§ 8. Généralités.

A. Définition des ensembles et tableaux ramifiés.

1. *Relation de comparabilité* $\approx$. Soient $<$ une relation d'ordre quelconque[1]) et $>$ la relation d'ordre inverse de $<$; comme d'habitude, $=$ sera le symbole pour la relation de l'identité. Par conséquent, si $a = b$, les éléments a, b joueront partout le même rôle et chacun d'eux sera toujours remplaçable par l'autre; si, par exemple $a = b$, $b \lesseqgtr c$, alors on aura $a \lesseqgtr c$.

Remarquons que les relations $<$, $>$, $=$ sont deux à deux *incompatibles.* [2])

---

[1]) Pour la terminologie, voir le § 1.

[2]) Deux relations binaires R_1, R_2 sont dites *incompatibles* si l'on n'a jamais $a R_1 b$ et $a R_2 b$.

Ceci étant, la *relation de comparabilité* — qu'on désignera par $\approx$ — sera la *somme logique*[3]) des relations $<, >, =$; autrement dit, le signe $a \approx b$ voudra dire que ou bien $a < b$ ou bien $a > b$ ou bien $a = b$; on écrira: $\approx = (< + > + =)$.

On voit que la relation $\approx$ est symétrique c'est-à-dire: si $a \approx b$ alors $b \approx a$. Par conséquent, le signe $a \approx b$ pourra être lu „*a et b sont comparables (entre eux)*".

On voit aussi que $\approx$ est une relation réflexive; seulement elle n'est pas nécessairement *transitive* (Cf. le lemme 2).

Cela posé, on voit que le chapitre précédent était consacré, au fond, non pas à l'étude de la relation d'ordre $<$, mais à la relation de comparabilité et aux ensembles ordonnés, ceux-ci étant définis comme des ensembles E dont tout couple de points était comparable c'est-à-dire tels que: si $a \varepsilon E$, $b \varepsilon E$, alors $a \approx b$.

2. *Relation de disjonction* $\|$. Une relation binaire symétrique et anti-réflexive sera appelée *relation de disjonction* ou *relation disjonctive* et désignée par le symbole $\|$ (deux traits verticaux). A cause de sa symétrie, le signe $a \| b$ pourra être lu „a et b sont disjoints", „séparés", „incomparables" etc.

Par exemple, la négation de la relation d'identité est une relation disjonctive. Si A, B sont deux ensembles et si la phrase „$AB = 0$ sans que $A = B = 0$" est désignée par $A \| B$, on obtient de nouveau une relation de disjonction[4]).

Remarquons que les relations $=$ et $\|$ sont entre elles incompatibles.[2])

3. *Relation de ramification* $*$. Soient $\approx = (< + > + =)$ une relation de comparabilité et $\|$ une relation de disjonction quelconques satisfaisant à la condition d'être *incompatibles entre soi;* cela veut dire que les relations $<$ et $\|$ sont, entre elles, incompatibles. Alors la somme logique des relations $\approx$ et $\|$ sera dite *relation de ramification* et désignée par $*$ *si la condition suivante*

---

[3]) Soit $\mathcal{F}$ une famille de relations binaires; *la somme logique* des relations appartenant a $\mathcal{F}$ sera la relation R définie comme suit: le signe aRb voudra dire qu'il y a *au moins une* relation ρ appartenant a $\mathcal{F}$ telle que $a\rho b$. On voit que si $\mathcal{F}$ est composée des relations deux à deux incompatibles, les mots „au moins une" dans la phrase précédente sont remplacés par „une et une seule".—

[4]) D'où l'expression „relation disjonctive" (voir la note 7·1).

est vérifiée: C : Si $a < c$ et $b < c$ alors $a \approx b$ c'est-à-dire: si $a < c$ et $b < c$, alors ou bien $a = b$ ou bien $a < b$ ou bien $a > b$; ou en paroles: deux éléments, ou points, *précédant* un même point sont *comparables entre eux.*

Pour marquer la dépendance de la relation de ramification $*$ des relations élémentaires $=, <, >, \|$ dont elle est composée, on écrira $* = (=, <, >, \|)$.

Une relation de ramification sera dite relation de ramification *dégénérée* si la condition suivante est verifiée:

$\overline{C}$: Si $c < a$, $c < b$ alors $a \approx b$; c'est-à-dire: deux points *succédant* à un même point sont *comparables.*

Par exemple, chacune des relations $=, <, >$ et $\|$ est une relation de remification *dégénérée.*

Remarque 1. Si l'on désigne par $\sim$ une *relation de classification* quelconque (voir le § 1) et si l'on considère la somme logique des relations $\sim, <, >$ et $\|$, celles-ci étant supposées deux à deux incompatibles et liées entre elles par des conditions simples et naturelles, on obtient la notion de la relation de ramification générale. Dans un travail particulier, on en montrera la structure logique.

4. *Ensembles ramifiés.* Un ensemble de points, E, sera dit ramifié relativement à une relation de ramification $* = (=, <, >, \|)$ *ou rangé* par rapport à la même relation de ramification $*$, si, quel que soit le couple d'éléments a, b de E, on a $a * b$. Dans la suite, on dira simplement que E est ramifié et on sous-entendra toujours qu'il est ramifié *par rapport à la relation* $*$ définie si-dessus (cf. la Note 1 du Complément).

Exemple: A étant un arbre généalogique, si $a \in A$ et $b \in A$, désignons, respectivement, par $a \approx b$ et $a \| b$ les faits que a, b sont respectivement en parenté directe ou collatérale; on voit qu'alors A est un ensemble (et même un *tableau* [voir ci-après]) ramifié; toutefois, on convient que, dans A, il n'y pas de relation „être époux" c'est-à-dire que tout élément de A peut, de lui-même, avoir des descendants.

Dans la suite de ce §, *la lettre E désignera un ensemble ramifié quelconque.*

On dira que E est un ensemble ramifié *dégénéré* si la relation $*$ par rapport à laquelle l'ensemble E est ramifié est dégénérée; par exemple, tout ensemble ordonné est un ensemble ra-

mifié dégénéré. En particulier, on pourra parler des *sous-ensembles ramifiés et des sous-ensembles ramifiés dégénérés d'un ensemble ramifié* E: ceux-ci sont des sous-ensembles F de E pour les points a, b, c, d, desquels la relation $*$ vérifie aussi la condition $\overline{C}$. Les sous-ensembles F de E ne contenant *aucun couple de points incomparables* seront dits *monotones* (ou ordonnés). Un sous-ensemble F de E sera dit *disjonctif* (voir la note 7·1) si pour aucun couple de points a, b de F on n'a $a<b$ (ou $a>b$): on a, par conséquent, soit $a=b$ soit $a \parallel b$; en particulier, un ensemble de points sera dit *disjonctif* si pour chaque couple de ses points a, b on a ou bien $a=b$ ou bien $a \parallel b$.

Il s'en suit que chaque ensemble monotone ou disjonctif est ramifié et dégenéré; en particulier, l'ensemble vide et chaque ensemble composé d'un seul point sont monotones, disjonctifs et ramifiés et dégénérés.

La notion de sous-ensembles dégénérés d'un E jouera, dans la suite, un rôle important.

Lemme 1. Si $a \parallel b$, $a \leq c$, $b \leq d$, alors $c \parallel d$.[5])

Il est évident qu'on peut se contenter de prouver que: si $a \parallel b$, $a<c$, $b<d$, alors $c \parallel d$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. On aura $c * d$ donc soit $c=d$ soit $c<d$ soit $c>d$.

A cause de la condition C, chacun de ces trois cas amène à une contradiction comme on le voit aisément.

Lemme 2. Pour qu'un E soit *dégénéré*, il faut et il suffit que la relation de comparabilité $\approx$ soit *transitive.*

5. *Définition fondamentale.* a étant un point d'un ensemble ramifié E, *la portion* a *de* E sera l'ensemble de tous les points x de E tels que x non a, autrement dit c'est l'ensemble de tous les points b, c de E tels que $b \leq a \leq c$; la portion a de E sera désignée par $[a]_E$ ou $[a]$. Il s'en suit que $a \in [a]_E$.

Lemme 3. *Pour qu'un ensemble ramifié E soit dégénéré, il faut et il suffit que, quel que soit le point a de E, la portion $[a]$ de E soit monotone.*

---

[5]) Remarquons que $a \leq c$ veut dire soit $a<c$ soit $a \equiv c$.

Dans la définition primitive de la relation de ramification $*$, le lemme 1 était une condition imposée à $*$; la simplification précédente est due à M. J. Karamata.

E étant dégénéré, supposons qu'il existe un point a de E tel que $[a]$ n'est pas *monotone* c'est-à-dire qu'il existe deux points m, n appartenant à $[a]$ et tels que $m \mid n$. Il est clair que a ne peut coïncider ni avec m ni avec n. Alors, quatre éventualités sont à envisager:

1° $m < a$, $n < a$ donc m non $\parallel n$ à cause de la condition C,

2° $a > m$, $a < n$ donc m non $\parallel n$ à cause de la condition $\overline{C}$,

3° $m < a$, $a < n$ donc $m < n$ à cause de la transitivité de $<$,

4° $n < a$, $a < m$ donc $n < m$ à cause de la transitivité de $<$.

On n'a donc jamais $m \parallel n$ contrairement à la supposition.

D'autre part, E étant ramifié et tel que $[a]_E$ soit monotone pour tout point a de E, on voit aisément que la condition $\overline{C}$ est vérifiée.

Lemme 4. a, b étant deux points d'un E dégénéré, alors $[a]_E \equiv [b]_E$ ou $[a]_E \parallel [b]_E$ suivant que a non $\parallel b$ ou $a \parallel b$.[6])

On en déduit ce lemme qui nous montre la structure des E dégénérés:

Lemme 5. *Chaque ensemble ramifié dégénéré est composé d'une famille d'ensembles monotones deux à deux incomparables.*[6])

6. *Intervalles, segments, portions, noeuds.*

a étant un point de E, les symboles $(\,.\,,a)_E$, $(\,.\,,a]_E$, $(a\,,.)_E$ et $[a\,,.)_E$ sont définis exactement comme dans le § 1; ils porteront le même nom qu'auparavant. En particulier, *l'intervalle gauche a de E* c'est-à-dire l'ensemble $(\,.\,,a)_E$ est l'ensemble de tous les points x de E tels que $x < a$; le *segment droit a de E* est l'ensemble de tous les points b de E tels que $a \leq b$.

On voit que $[a]_E = (\,.\,,a)_E + [a\,,.)_E$.

La notion de portions droites et gauches de E est définie comme dans le § 1.

Toutefois, il faut préciser le champ de validité de la notion d'intervalles de E et, par conséquent, aussi celle de portions de E.

---

[6]) Deux sous-ensembles M, N d'un ensemble ramifié E sont dits *incomparables*, ce qu'on peut désigner par $M \parallel N$, si, quel que soit le point m de M et quel que soit le point n de N, on a $m \parallel n$.

L'intervalle ab ou ba de E qu'on désignera par $(a, b)_E$ ou $(b\ a)_E$ sera l'ensemble de tous les points x de E tels que $a < x < b$ si $a < b$ et $a > x > b$ si $a > b$.

On voit alors que la notion d'intervalle de E ne sera définie que pour des points éventuels a, b de E tels que soit $a < b$ soit $a > b$.

La notion de portion de E, les symboles $[a, b)_E$, $[a, b]_E$ et $(a, b]_E$ sont définis comme dans le § 1.

Les intervalles gauches et droits de E et les intervalles proprement dits de E peuvent être appelés, en commun, intervalles de E.

On aura fréquemment besoin de la notion d'un noeud de E: soit a un point de E: l'ensemble de tous les points x de E tels que $(., x)_E = (., a)_E$ sera appelé *noeud a de E et désigné par* $|a|_E$.

Lemme 6. a. Chaque intervalle (segment) de E est un sous-ensemble *monotone* de E,

b. Chaque noeud de E est un sous-ensemble *disjonctif* de E.

7. *Espaces ramifiés.* Nous nous contentons de définir seulement des *espaces-tableaux ramifiés:* la définition des espaces ramifiés parraîtra ailleurs. Soit T un tableau ramifié quelconque (voir ci-dessous); à tout point a de T on fera correspondre la famille $\mathcal{F}_a$ de *ses voisinages* ceux-ci étant des ensembles $\sum_z [z, .)_T - (a, .)_T$, z parcourant $(x, a]_T$, x étant un point quelconque de T tel que $x \leq a$; en particulier, si $(., a)_T = 0$, la famille $\mathcal{F}_a$ sera composée du seul point a. La détermination des $\mathcal{F}_a$ pour les a de T implique la définition des points d'accumulation des sous-ensembles de T; on obtient ainsi un espace bien déterminé qu'on désignera par eT.[7])

8. *La notion de première rangée de E.* On dira que E a une *première rangée de points* si, quel que soit le point a de E, l'ensemble ordonné $(., a]_E$ a un premier point; alors, la première rangée de E, qu'on désignera toujours par $R_0 E$, sera l'ensemble des premiers points des segments $(., a]_E$, a parcourant les points de E.

---

[7]) Pour la définition exacte de la dérivation des ensembles à partir de voisinages, voir E. A., p. 172. Quant à la définition de eT cf: la définition originelle de Baire de son espace G_0 (voir la note 6·12), aussi bien que la définition des espaces bien ordonnés.

L e m m e 7. Si E a une rangée $R_0 E$ d'éléments, premièr celle-ci est caractérisée comme un sous-ensemble *disjonctif* de E tel que tout point de l'ensemble $E-F$ soit *précédé* par un (et par conséquent un seul) point de F [8]).

D'une façon analogue, on introduit *la notion de dernière rangée de E*: on dira que E a une *dernière rangée de points* s'il existe un sous-ensemble *disjonctif* F de E tel que tout point éventuel de $E-F$ précède *au moins un point de F*. Cependant, on n'en aura pas besoin dans ce qui suit: nous la mentionnons uniquement parce qu'elle nous permet d'introduire la notion des bornes supérieure et inférieure d'un sous-ensemble non-vide de E et, à partir de celle-ci, la notion de lacune de E; etc (la définition d'une coupure de E est la même que dans le cas des ensembles ordonnés) [9]).

9. *Tableux ramifiés. Rang.* Un ensemble ramifié ou rangé sera dit *tableau ramifié* ou *ensemble bien rangé* si *chacun de ses sous-ensembles non-vides a une première rangée d'éléments;* l'ensemble vide sera considéré aussi comme un tabl au ramifié.

Exemple: tout arbre généalogique est un *tableau* ramifié (voir la section 4).

L e m m e 8. *Pour qu'un ensemble ramifié soit un tableau ramifié, il faut et il suffit que chacun de ses sous-ensembles ordonnés soit bien ordonné.*[10])

Dorénavant, on ne s'occupera que des tableaux ramifiés; *la lettre T designera un tableau ramifié quelconque.*

---

[8]) C'était notre définition primitive de $R_0 E$: la définition du texte est due à M. Fréchet.

[9]) Voici par ex., la définition de la borne supérieure relativement à E d'un sous-ensemble non-vide F de E; soit tout d'abord G_1 l'ensemble de tous les points de F qui ne sont *suivis* par aucun point de F; soit ensuite G_2 l'ensemble de tous les points $a \in E-F$ tels que $(\,.\,,a)_F \supset 0$ et que, quel que soit le point x de $(\,.\,,a)_E$, on ait $(x,a)_F \supset 0$; alors, la première rangée G de la réunion G_1+G_2 sera dite *borne supérieure de F*; celle-ci sera dite *complète* si $F \subseteq \sum_a (\,.\,,a]_E$, a parcourant les points de G. Il est clair qu'on peut avoir $G=0$, et alors, E sera *lacunaire*. Il est à remarquer qu'un sous-ensemble, même monotone, de E, peut avoir une borne supérieure ayant une puissance quelconque. Au contraire, la borne inférieure de tout sous-ensemble monotone de E est composée d'au plus un point de E.

[10]) La seconde moitié de ce lemme est due à M. Fréchet qui l'emploie comme définition des tableux ramifiés.

Remarquons que $R_0 T$ désigne, d'après la définition, la première rangée d'éléments de T. Voici un procédé pour *bien ranger* un tableau ramifié T:

La rangé O de T, qu'on désignera par $R_0 T$, sera la première rangée de T; supposons que les ensembles $R_\xi T$ sont détérminés pour tout $\xi < \alpha$ et que T contient au moins un point qui n'est contenu dans aucun des ensembles $R_\xi T$, $\xi < \alpha$; alors *la rangés α de T* qu'on désignera par $R_\alpha T$ sera la première rangée de $T - \sum_{\xi<\alpha} R_\xi T$ c'est-à-dire $R_\alpha T = R_0 (T - \sum_{\xi<\alpha} R_\xi T)$.

Le type ordinal (et non pas la borne supérieure) de l'ensemble des nombres ordinaux α tels que $R_\alpha T \supset 0$, sera dit rang de T et désigné par γT ou γ.

Noter que tout sous-ensemble monotone de T est *bien ordonné;* par conséquent, les phrases „tableau monotone de rang α" et „ensemble bien-ordonné dont le type ordinal est α" veulent dire la même chose.

Lemme 9. Chacune des rangées de T est un sous-ensemble *disjonctif* de T; si a est un point de $R_\alpha T$, $\alpha < \gamma T$, l'intervalle $(\cdot, a)_T$ est un ensemble bien-ordonné de type ordinal α ayant avec chacune des rangées $R_\xi T$, $(\xi < \alpha)$, un et un seul point en commun. Tous les points d'un noeud quelconque de T appartiennent à une même rangée de points de T.

10. *Longueur et largeur de T.* Les nombres cardinaux $p\gamma T$ et $p\tau\gamma T$ (voir le § 2) seront appelés respectivement *longueur* et *longueur réduite de T.* Pour abréger, on désignera $p R_\alpha T$ par $m_\alpha T$ ou même par m_α. La borne supérieure des puissances $m_\alpha T$ sera appelée *largeur de T* et désignée par mT ou m. Exemple: Désignons par T l'ensemble des types ordinaux des sous-ensembles proprement dits de l'ensemble des entiers (positifs et négatifs), les signes $=, <, >$, ayant la signification habituelle (voir la déf.: 1·14); on a $\gamma T = \omega + 1$, $m_\alpha T = 1$ pour tout $\alpha < \omega$; la rangée $R_\omega T$ est composée de ω et ω^*. (Cet exemple est dû à M. Fréchet; voir son *Arithmetique de l'infini* (Actualités Sci. et industrielles, 144, 1934 p. 25.).

Il est à peine nécessaire de rappeler que pT désignera la puissance de T; on a donc $pT = \sum_{\alpha<\gamma T} m_\alpha T$. Si $pT \geqslant \aleph_0$, T sera dit *infini*; autrement, il sera *fini*.

Lemme 10. Quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \gamma$, le rang γT est la borne supérieure des rangs des portions $|a]_T$, a parcourant les éléments de $R_\alpha T$.

Lemme 11. Quel que soit le tableau ramifié infini T, on a $pT = mT.p\gamma T$.

11. *Classification des T.* Le plus grand nombre ordinal de *seconde espèce* ne dépassant pas le rang γ de T sera appelé *pseudo-rang* de T et désigné par $\gamma' T$ ou γ'. Autrement dit, le nombre γ' est défini par l'équation $\gamma = \omega\gamma' + n$, n étant $< \omega$.

Si, en particulier, γ est de seconde espèce, on aura $\gamma' = \gamma$.

T sera dit *large* s'il y a un $\alpha < \gamma$ tel que $m_\alpha \geqslant p\tau\gamma'$.

T sera dit *étroit* si $mT < p\tau\gamma'$ et si, de plus, $mT < \aleph_\beta$ dans le cas où $\tau\gamma' = \omega_{\beta+1}$, β étant un ordinal quelconque.

Si T n'est ni étroit ni large, il sera dit *ambigu*.

Le tableau vide peut être considéré comme large. Du reste, ce paradoxe ne nous occupera pas dans la suite. (Avec l'ensemble vide on peut faire, d'ailleurs, tout ce qu'on veut), On vérifie que tout tableau fini est large; de même, si $\gamma T < \omega$, T est large.

Lemme 12. Pour tout tableau infini *non-large* T, on a $pT = p\gamma T$ (voir le lemme précédent).

Lemme 13. T étant un tableau étroit, il y a un $\alpha < \gamma T$ tel que $mT < p\alpha$.

Théorème 1. Pour qu'un tableau ramifié T soit *ambigu*, il faut et il suffit que $mT = \aleph_\beta$ si $\tau\gamma' = \omega_{\beta+1}$ et $mT = p\tau\gamma'$, $m_\alpha T < mT$ pour tout $\alpha < \gamma T$ si $\tau\gamma'$ est un nombre inaccessible (voir le § 2).

Que la condition soit suffisante c'est évident; prouvons donc qu'elle est nécessaire.

Autant que T est non-large, on a $m_\alpha T < p\tau\gamma'$ pour tout $\alpha < \gamma$ donc $mT \leq p\tau\gamma'$; d'autre part, T étant non-étroit, on a $mT \geqslant p\tau\gamma'$. Si $\tau\gamma'$ est innaccessible, on en conclut que $m_\alpha < m$

et $m = p\tau\gamma'$. Si $\tau\gamma'$ n'est pas inaccessible c'est-à-dire si $\tau\gamma' = \omega_{\beta+1}$, $(\beta \geqslant 0)$, on voit que $m \geqslant \aleph_\beta$ et par suite $m = \aleph_\beta$, sans quoi on aurait $m \geqslant \aleph_{\beta+1}$ donc aussi $m_\alpha T \geqslant \aleph_{\beta+1}$ pour au moins un $\alpha < \gamma$, ce qui est absurde, T étant non-large.

La classification des tableaux ramifiés en tableaux larges, étroits et ambigus se montrera très utile et naturelle.

12. *Suites ramifiés.* Un tableau ramifié T sera dit *suite ramifiée* si quel que soit le point a de T, la portion $[a]$ de T a le même rang que le tableau T lui même; c'est-à-dire si $\gamma[a]_T = \gamma T$ pour tout $a \varepsilon T$.

Lemme 14. Pour qu'un *tableau* ramifié T soit une *suite* ramifiée, il faut et il suffit que, quelle que soit la rangée R de T, on ait $T = \sum_a [a]_T$, a parcourant tous les points de R.

Dans la suite, on aura besoin de ce

Théorème 2. T étant non large, T contient une *suite* ramifiée non-large S ayant le même rang que le tableau T lui-même; si, en particulier, T est étroit, la suite S l'est aussi.

Il est clair qu'on peut supposer que le rang γ de T soit un ordinal de seconde espèce c'est-à-dire qu'on ait $\gamma' = \gamma$. Chaque rangée R de T contient un point a tel que $\gamma[a]_T = \gamma$. En effet, d'après le lemme 5, on a $\gamma T =$ borne sup. $\gamma[a]_T$, a parcourant les points de R. D'autre part, T étant non-large, on a $pR < p\tau\gamma$; par conséquent, on ne peut pas avoir $\gamma[a]_T < \gamma T$ pour tout point a de R, parce qu'alors γT serait la borne supérieure d'une suite de type $< \tau\gamma$ de nombres ordinaux $< \gamma$ ce qui est absurde.

Ceci étant, soit S l'ensemble des points a de T tels que $\gamma[a]_T = \gamma T$; on vient de prouver que $0 \subset R_\alpha S \subseteq R_\alpha T$ pour tout $\alpha < \gamma T$; par conséquent, $\gamma S = \gamma T$.

Il s'en suit que S est un tableau non-large et, en particulier, étroit si T est étroit. Il s'agit encore de voir que S est une *suite* ramifiée c'est-à-dire que $\gamma[a]_S = \gamma S$ pour tout point a de S.

Supposons, par impossible, qu'il existe un point a de S tel que $\gamma[a]_S < \gamma S = \gamma T$; cela voudrait dire qu'il existe un nombre $\alpha < \gamma T$ tel que $R_\alpha T$ ne contient aucun point de $[a]_S$ bien que $\gamma[a]_T = \gamma T$. Or, il est clair que, de plus, le tableau $[a]_T$ est non-large et, par conséquent, $R_\alpha[a]_T$ contient au moins un point b de $[a]_T$ tel que $\gamma[b]_D = \gamma D$, $D = [a]_T$; le point b appartiendrait à S donc $b \in R_\alpha[a]_S$ contrairement à la supposition que $R_\alpha[a]_S = 0$ c. q. f. d.

13. *Noeuds de première et de seconde espèce. Suites totalement et complètemont ramifiées.* On sait qu'un noeud quelconque de T appartient à une même rangée de T; il est alors commode de poser cette définition: Soit N un noeud quelconque de T; on dira qu'il est de *première ou de seconde espèce* suivant que le nombre ordinal α tel que $N \subseteq R_\alpha T$ est de première ou de seconde espèce.

Une suite ramifiée sera *dite complètement* (*totalement*) *ramifiée* si *chacun* de ses noeuds (de *première* espèce) est composée d'au moins deux points distincts.[11])

Remarque 2. Les points de T peuvent, par la même convention, être déclarés comme étant soit de première, soit de seconde espèce.

On voit que pour qu'un $T \supset 0$ soit totalement ramifié, il faut et il suffit que quel que soit le point a de T, on ait ou bien $R_0(a,.)_T = 0$ ou bien $p\,R_0(a,.)_T > 1$.

Lemme 15. Quelle que soit *la suite* totalement ramifiée T, on a $pR_\alpha T \geqq p\alpha$ pour tout $\alpha < \gamma T$.

En effet, a étant un point de $R_\alpha T$, désignons par a_ξ le point (unique) de $R_\xi T$ tel que $a_\xi < a$ pour tout $\xi < \alpha$; soit $a'_{\xi+1}$ un point quelconque de $R_{\xi+1} T$ tel que $a_\xi < a'_{\xi+1}$ et $a'_{\xi+1} \parallel a_{\xi+1}$

---

11) Si chaque noeud de seconde espèce de T est composé d'un seul point, on voit que la borne supérieure de chaque sous-ensemble *monotone* non-vide de T est composée d'un point de T au plus. D'ailleurs, on peut prouver cette proposition: E étant un ensemble ramifié, il existe un ensemble ramifié non-lacunaire $\bar{E}$ contenant E comme une partie partout dense sur $\bar{E}$ et jouissant de la propriété que la borne supérieure de chaque sous-ensemble monotone non-vide de $\bar{E}$ est composée d'au plus un point de $\bar{E}$. Par exemple, tout continu cyclique plan, cas réduit, de M. A. Denjoy est un ensemble ramifié dense et non-lacunaire et tel que la borne supérieure de chacun de ses sous-ensembles ordonnés non-vides est un point bien déterminé (voir C. R. 197, 1933, p. 570).

Il clair que $a'_{\xi_1+1} \parallel a'_{\xi_2+1}$ si $\alpha > \xi_1 \leqq \xi_2 < \alpha$. Or, T est une *suite* ramifiée, et, par conséquent, pour tout $\xi < \alpha$, il y a un point $b_{\xi+1}$ de $R_\alpha T$ tel que $a'_{\xi+1} < b_{\xi+1}$. Puisque les $a'_{\xi+1}$ sont, deux à deux, incomparables, les $b_{\xi+1}$ le sont aussi.

Si α est infini, il est clair que la puissance de l'ensemble B des points $b_{\xi+1}$, $\xi < \alpha$, est égale à $p\alpha$; étant donné que $B \subseteq R_\alpha T$, on en conclut que $p\alpha \leqq pR_\alpha T$. La dernière relation étant évidente si α est fini, le lemme est complètement démontré.

Théorème 3. *a.* Chaque suite (totalement) ramifiée dont le rang est *fini* est large; en particulier, chaque *suite finie* (totalement) ramifiée est large.

b. Il n'existe aucune suite étroite totalement ramifiée.

c. Quelle que soit la suite ambigüe totalement ramifiée S, le rang γ de S est un nombre régulier c'est-à-dire tel que $\tau\gamma = \gamma$.

Les trois cas a, b et c peuvent être énoncés de la manière suivante:

Quelle que soit la suite totalement ramifiée S dont le rang est un nombre de seconde espèce, elle est ou bien large ou bien ambigüe; dans le second cas, le rang de S est un nombre initial régulier. Le cas *a* étant évident, le cas *b* étant une conséquence immédiate des lemmes 8 et 11, prouvons le cas *c* du théorème c'est-à-dire que, S étant une suite ambigüe totalement ramifiée telle que $\gamma' = \gamma$, le rang γ est régulier.

Supposons que $\tau\gamma < \gamma$; on aurait $pR_{\tau\gamma} S \geqq p\tau\gamma$, ce qui est impossible, la suite S étant non-large.

On aura besoin de ce

Théorème 4. *Quelle que soit la suite étroite ramifiée S dont le rang γ est un nombre de seconde espèce, il y a un nombre $\alpha < \gamma$ tel que, pour tout point a de $R_\alpha S$, la portion $[a]$ de S soit monotone; ce qu'on peut exprimer encore en disant que la suite donnée S ne se ramifie plus du tout à partir de la rangée $R_\alpha S$.*

Soit S une suite étroite ayant pour rang un nombre ordinal γ de seconde espèce.

Pour aboutir à une contradiction, supposons que *pour tout* $\alpha < \gamma$, il y a un point $a \in R_\alpha S$ tel que la portion $[a]_S$ ne soit monotone c'est-à-dire telle que $m[a]_S > 1$.

Premier cas: γ *est régulier*: Désignons par $R_0 T$ l'ensemble de tous les points a de $R_0 S$ tels que $m[a]_S > 1$. Supposons que les ensembles $R_\xi T$ sont déterminés pour tout $\xi < \alpha$, α étant un ordinal quelconque $< \gamma$. On va déterminer l'ensemble $R_\alpha T$ de la façon suivante: si α est de première espèce, on posera $R_\alpha T = \sum_a R_{\alpha_a} [a]_S$, a parcourant les points de $R_{\alpha-1} T$, α_a désignant, pour un a donné, le plus petit nombre éventuel ξ tel que $m_\xi [a]_S > 1$.

Si α est de seconde espèce, soit α' la borne supérieure des nombres η tels que $R_\eta S$ contient au moins un point de l'ensemble $\sum_{\xi<\alpha} R_\xi T$. Puisque S est une suite étroite et γ régulier, il est clair que $\alpha' < \gamma$. Alors, $R_\alpha T$ désignera l'ensemble de tous les points a de $R_{\alpha'} S$ tels que $m[a]_S > 1$.

Il est clair que, dans les deux cas, pour tout $\alpha < \gamma$, on a $R_\alpha T \supset 0$. En posant $T = \sum_{\alpha<\gamma} R_\alpha T$, on voit que T est un tableau ramifié dont la rangée α est $R_\alpha T$ pour tout $\alpha < \gamma$. De plus, on voit que, a étant un point quelconque de T, on a ou bien $(a, .)_T = 0$ ou bien $m_0 (a, .)_T > 1$. On voit aussi que T est étroit parce que, d'une part, $\gamma T = \gamma S$ et, de l'autre, pour tout $\alpha < \gamma$, il y a un nombre α_0 tel que $\alpha \leqslant \alpha_0 < \gamma$ et $m_\alpha T \leqslant m_{\alpha_0} S$.

Or, soit β un nombre quelconque tel que $m S < p \beta < p \gamma$; on peut supposer que β est de seconde espèce (voir le lemme 8·8); b étant un point quelconque de $R_\beta T$, soit, pour tout $\xi < \beta$, a_ξ le point (déterminé d'une manière unique) de $R_\xi T$ tel que $a_\xi < b$. Il est clair que $a_\xi < a_{\xi+1}$ c'est-à-dire $(a_\xi, .) \supset 0$ et, par conséquent, $m_0 (a_\xi, .)_T > 1$.

Soit, alors, pour tout $\xi < \beta$ donné, b_ξ un point de $R_0 (a_\xi, .)_T$, *distinct de* $a_{\xi+1}$. Il est claire que l'ensemble E des points b_ξ, $\xi < \alpha$, est disjonctif et que $p E = p \beta > m S$. Soit α la borne supérieure des nombres η tels que $R_\eta S$ contient au moins un point de E; puisque $p E < m S < p \gamma$, on aura $\alpha < \gamma$

(γ étant régulier). Or, S étant une *suite* ramifiée, il est clair que, quel que soit le point b_ξ de E il y a un point d_ξ de $R_{\alpha+1} S$ tel que $b_\xi < d_\xi$. Les points b_ξ étant deux à deux incomparables, les points d_ξ le sont aussi et on aurait $m_{\alpha+1} S \geqslant pE$ donc $m_{\alpha+1} S > m S$ ce qui est absurde.

Autrement dit, la supposition que pour tout $\alpha < \gamma$, il y ait un point $a \in R_\alpha S$ tel que $m[a]_S > 1$ est impossible.

Second cas. γ *est singulier* c'est-à-dire tel que $\tau\gamma < \gamma$. Si alors $\alpha_0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_\xi < \ldots, \xi < \tau\gamma$, est une suite de nombres ordinaux croissants $< \gamma$ ayant γ pour borne supérieure, on considère tout d'abord la suite $S^0 = \sum_{\xi<\tau\gamma} R_{\alpha_\xi} S$ qui vérifie les conditions du cas précédent.

Si alors α_μ est un des nombres α_ξ tels que $[a]_{S^0}$ est monotone pour tout point a de $R_{\alpha_\xi} S^0$, il est clair qu'on a auss $m[a]_S = 1$ pour tout point a de $R_{\alpha_\xi} S$.

Théorème 5. *Chaque suite ramifiée étroite a la même puissance qu'un de ses sous-ensembles ordonnés (monotones).*

S étant une suite étroite, on a, tout d'abord, $pS = p\gamma S$ (voir le lemme 8·12). D'autre part, il y a un $a \in S$ tel que la portion $[a]_S$ soit monotone. En effet, si γS est un ordinal de première espèce, a peut être n' importe quel point de la rangée $R_{\gamma-1} S$; si le rang de S est de seconde espèce, l'existence de a résulte du théorème précédent.

Ceci étant, il est clair que $p[a]_S = pS$ et le sous-ensemble ordonné $[a]_S$ répond aux conditions du théorème.

Théorème 5bis. Chaque tableau ramifié étroit a la même puissance qu'un de ses sous-ensembles *ordonnés*. (C'est une conséquence des théorèmes 2 et 5).

B. Familles et tableaux ramifiés d' ensembles.

Dans se qui précède, on a défini les ensembles et tableaux ramifiés d'éléments quelconques. Si les éléments d'un ensemble

ramifié sont eux-mêmes des ensembles, et si alors les relations $<, >$ et $\|$ veulent dire respectivement $\supset$ („contient au sens strict"), $\subset$ („contenu au sens strict"), et „être deux ensembles disjoints sans être vide tous les deux", on obtient la définition de *familles ramifiées d'ensembles* et, ensuite, celle de tableaux ramifiés d'ensembles. En même temps, on voit que la condition C est, dans ce cas, remplie automatiquement. Voici la définition précise:

1. Une famille d'ensembles sera dite *ramifiée* si les éléments dont elle est composée sont *ou bien* deux à deux disjoints *ou bien* tels que l'un d'eux contiendra l'autre comme sous-ensemble proprement dit; ensuite, chaque famille d'ensembles composée d'un élément au plus, sera dite ramifiée.

On voit que les familles *monotones* et *disjonctives* d'ensembles sont deux cas particuliers des familles ramifiées d'ensembles.

Pour arriver à la notion de *tableaux* ramifiés d'ensembles, il faut définir la notion de *première rangée d'ensembles:* on dira qu'une famille ramifiée $\mathcal{F}$ d'ensembles a une *première rangée d'ensembles* s'il existe une (et par conséquent une seule) sous-famille *disjonctive* f de $\mathcal{F}$ telle que tout élément éventuel de $\mathcal{F}-f$ est contenu dans un (et donc un seul) ensemble appartenant à f.

Alors, la définition d'un tableau ramifié d'ensembles est exactement la même que celle des tableaux ramifiés quelconques. Si, par exemple, T désigne un tableau ramifié de points, la famille des ensembles $(a,.)_T$ et $[a,.)_T$, a parcourant T est un tableau ramifié d'ensembles. Si $\mathfrak{T}$ désigne un tableau ramifié d'ensembles, les signes $\gamma\mathfrak{T}$, $R_\alpha\mathfrak{T}$, $(A,.)_{\mathfrak{T}}$ si $A \varepsilon \mathfrak{T}$, $\sum R_0(A,.)_{\mathfrak{T}}$ si $A \varepsilon \mathfrak{T}$, etc. sont bien définis; par exemple A étant un ensemble appartenant à $\mathfrak{T}$, le signe $(A,.)$ représente la famille de tous les éléments X de $\mathfrak{T}$ tels que $A \supset X$. Alors, il est clair que, quel que soit l'élément A de $\mathfrak{T}$, on a $A \supseteq \sum (A,.)_{\mathfrak{T}}$ et, en particulier $A \supseteq \sum R_0(A,.)_{\mathfrak{T}}$; de même $\Pi(.,A)_{\mathfrak{T}} \supseteq A$.

2. *Définition des tableaux ramifiés complets d'ensembles:*

Un tableau ramifié $\mathfrak{T}$ d'ensembles sera dit *complet* si ces trois conditions sont vérifiées:

I. La réunion des ensembles de $\mathfrak{T}$ est un élément de $\mathfrak{T}$ c'est-à-dire $\sum \mathfrak{T} \varepsilon \mathfrak{T}$;

II. Quel que soit l'ensemble A appartenant à $\mathfrak{T}$ et ayant au moins deux points, on a $A = \sum R_0 (A, .)_{\mathfrak{T}}$;

III Quelle que soit la sous-famille *monotone* f de $\mathfrak{T}$, la partie commune des ensembles de f est un élément de $\mathfrak{T}$ c'est-à-dire $\Pi f \varepsilon \mathfrak{T}$ (sauf éventuellement si $\Pi f = 0$).

Remarque 3. On voit que dans la condition II, on peut supprimer la lettre R_0.

$\mathfrak{T}$ étant complet, on voit que la première rangée de $\mathfrak{T}$ est constituée d'un seul ensemble, à savoir $\sum \mathfrak{T}$: l'ensemble vide est, en général, un élément de $\mathfrak{T}$; on voit aussi que, quel que soit l'élément A de *seconde espèce* de $\mathfrak{T}$ c'est-à-dire tel que le nombre α vérifiant $A \varepsilon R_\alpha \mathfrak{T}$ et $\alpha > 0$ est de *seconde espèce*, on a $\Pi(., A)_{\mathfrak{T}} = A$; c'est une propriété utile parce qu'il s'en suit l'unicité de la borne supérieure (éventuelle) des sous-familles monotones de $\mathfrak{T}$ (voir la note 11).[12])

Lemme 16. *$\mathfrak{T}$ étant un tableau ramifié complet d'ensembles chaque point de l'ensemble $\sum \mathfrak{T}$ est un élément de $\mathfrak{T}$.*

Il est clair qu'on peut supposer que l'ensemble $\sum \mathfrak{T}$ est composé d'au moins deux points; alors a étant un point de $\sum \mathfrak{T}$, il est clair que la famille $\mathcal{F}$ des éléments X de $\mathcal{F}$ tels que $a \varepsilon X$ est non-vide et monotone, et que, à la suite de la condition III, l'ensemble $F = \Pi \mathcal{F}$ est un élément de $\mathfrak{T}$ tel que $a \varepsilon F$. Si $pF = 1$, cela veut dire que $a \varepsilon \mathfrak{T}$ et tout serait démontré. Supposons que $pF > 1$; alors, à la suite de la condition II, la sous-famille *disjonctive* $R_0 (F, .)_{\mathfrak{T}}$ de $\mathfrak{T}$ contiendrait un ensemble A tel que $a \varepsilon A$ et $A \subset F$. Par conséquent, A serait un élément de la famille $\mathcal{F}$ définie ci-dessus et on aurait

---

[12]) Voir N. Lusin (Travaux de l'Institut Stekloff, tome V pp. 139-147 où un tableau d'ensembles, ou mieux encore, un tableau ramifié de *cribles* est donné (cf. „le problème des cribles" ibid. p. 147).

$F \subset A$ ce qui est absurde. On a donc $pF = 1$ et par conséquent $a \in \mathfrak{F}$.

Le lemme précédent nous donne un moyen simple de construire un tableau famifié complet contenant un tableau ramifié donné. En effet, soit $\mathfrak{F}$ un tableau ramifié d'ensembles quelconque: désignons par $\overline{\mathfrak{F}}$ la famille-réunion d'ensembles obtenus de la façon suivante:

α) Quelle que soit la sous-famille *monotone* f de $\mathfrak{F}$, l'ensemble Πf sera un élément de $\overline{\mathfrak{F}}$ (il s'en suit que $\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathfrak{F}}$);

β) L'ensemble $\sum \mathfrak{F}$ aussi bien que tout point de l'ensemble $\sum \mathfrak{F}$ sera un élément de $\overline{\mathfrak{F}}$.

Alors, on vérifie facilement que $\overline{\mathfrak{F}}$ est un tableau ramifié complet d'ensembles tel que $\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathfrak{F}}$; en particulier, si $\mathfrak{F}$ est déjà complet, alors $\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$.[13])

3. Voilà un procédé pour avoir un tableau ramifié complet d'ensembles. Soit M un ensemble donné quelconque de points; A étant un sous-ensemble quelconque de M tel que $pA > 1$, on désignera par $f(A)$ une famille *disjonctive* quelconque de *vrais* sous-ensembles de A tels que $\sum f(A) = A$. Ceci étant, désignons par $R_0 \mathfrak{F}$ la famille composée du seul ensemble M comme élément. Supposons que les familles disjonctives $R_\xi \mathfrak{F}$ sont définies pour tout $\xi < \alpha$ et qu'il y ait au moins un point a de M qui n'est un élément d'aucun $R_\xi \mathfrak{F}$, $\xi < \alpha$: il s'agit de définir la famille $R_\alpha \mathfrak{F}$. Si α est de première espèce, $R_\alpha \mathfrak{F}$ sera la famille-réunion des familles $f(A)$, A parcourant les éléments de $R_{\alpha-1} \mathfrak{F}$ tels que $pA > 1$. Si α est de seconde espèce, $R_\alpha \mathfrak{F}$ désignera la famille des ensembles non-vides de la forme $\prod_{\xi < \alpha} A_\xi \cdots A_\xi$, les A_ξ appartenant

---

13) Dans le procédé α), on reconnait le procédé bien connu d'adjonction d'éléments idéaux à une collection d'objets donnés; il était employé aussi dans la note 4-7 pour combler les lacunes d'un ensemble ordonné lacunaire; dans la théorie des espaces et ensembles distanciés, le même procédé fournit un moyen de *compléter* respectivement un espace ou un ensemble distancié (voir G. M. p. 318 et M. Fréchet, Amer. J. of Math. 50, 1928 p. 66).

à $R_\xi \mathfrak{T}$ et étant tels que $A_\xi \subseteq \prod_{\eta<\xi} A_0 \cdot\cdot A_\eta$, quel que soit l'ordinal $\xi < \alpha$.

Alors, en désignant par $\mathfrak{T}$ la famille-réunion de toutes les familles disjonctives *non-vides* $R_\alpha \mathfrak{T}$ construites par le procédé précédent, on s'assure très facilement que $\mathfrak{T}$ est un tableau ramifié complet d'ensembles extraits de M.

Remarque **4.** Dans le cas où la famille $f(A)$, pour tout $A \subseteq M$ tel que $pA > 1$ est composée de deux éléments dont l'un se réduit à *un point* de M, on voit que le tableau $\mathfrak{T}^0$ contenant l'ensemble vide et tous les $A \varepsilon \mathfrak{T}$ tels que $pA > 1$ aussi bien que la partie commune de tous les $A \varepsilon \mathfrak{T}$ tels que $pA > 1$, est une famille monotone saturée de sous-ensembles de M considérée par M. E. Zermelo dans sa célèbre démonstration que tout ensemble de points peut être bien ordonné (voir le § 4 et E. Zermelo, Math. 65, 1908 p. 107).

C. Systèmes de complexes. Représentation de tableaux ramifiés d'ensembles.

On sait que (cf. le § 5), α étant un ordinal, tout symbole de la forme $(a_0 \cdot\cdot a_\xi)_{\xi<\alpha}$ est appelé *complexe de rang* α (a_ξ sont des éléments quelconques); soient $A^i = (a_0^i \cdot\cdot a_\xi^i \cdot\cdot)_{\xi<\alpha^i}$, $(i = 1, 2)$, deux complexes *différents* c'est-à-dire tels que soit $\alpha^1 \neq \alpha^2$, soit que $\alpha^1 = \alpha^2$ mais on n'a pas $a_\xi^1 = a_\xi^2$ pour tout $\xi < \alpha^1 = \alpha^2$. Si A^1 est une partie initiale de A^2 sans que A^2 soit une partie initiale de A^1, on écrira $A^1 \subset A^2$ ou encore $A^2 \supset A^1$; si l'on n'a ni $A^1 = A^2$ ni $A^1 \subset A^2$ ni $A^2 \subset A^1$, on écrira $A^1 \parallel A^2$. Alors, la somme logique des relations $=$, $\subset$, $\supset$ et $\parallel$ vérifie la condition C et est une relation de ramification; autrement dit, tout système S de complexes est un ensemble, ramifié et même un *tableau* ramifié; on voit que la première rangée de S est constituée de tous les complexes de S ne contenant, comme partie initiale, aucun autre complexe de S.

1. Ceci étant, soit $\mathfrak{T}$ un tableau ramifié *d'ensembles;* pour des raisons de simplicité, on supposera que $\mathfrak{T}$ ne contient pas l'ensemble vide et que $\mathfrak{T}$ est complet (ou tout au moins qu'il n'y ait pas d'ensembles disjoints X, Y appartenant à une rangée $R_\alpha \mathfrak{T}$, α étant de seconde espèce, tels que $(., X)_{\mathfrak{T}} = (., Y)_{\mathfrak{T}}$);

on va donner, généralisant un procédé de M. Lebesgue,[14]) une *représentation* des ensembles de $\mathfrak{E}$ qui se montrera très utile. On peut supposer que $\mathfrak{E}$ a au moins deux points; autrement, une représentation serait inutile, celle-ci ayant pour but de *distinguer les éléments les uns des autres* et de les rendre, si possible, plus accessibles aux recherches poursuivies.

γ désignera le rang de $\mathfrak{E}$; α étant un ordinal quelconque $<\gamma$, désignons par A_α un *ensemble de points quelconque* ayant la même puissance que la famille $R_{\alpha+1}\mathfrak{E}$; soit $\varphi_{\alpha+1}$ une correspondance biunivoque entre les éléments de A_α et ceux de $R_{\alpha+1}\mathfrak{E}$. Si les familles $R_{\alpha+1}\mathfrak{E}$, $(\alpha<\gamma\mathfrak{E})$, ont, toutes, la même puissance, on peut prendre $A_0 \equiv A_1 \equiv \cdots \equiv A_\alpha \equiv$ pour tout $\alpha<\gamma$.

Pour commencer, l'ensemble $G=\sum\mathfrak{E}$ — qui est, d'après la condition I de la définition $B2$, un élément de $\mathfrak{E}$ et par conséquent l'élément unique de $R_0\mathfrak{E}$ — ne sera affecté d'aucun indice, ou, pour employer un autre langage: „le complexe de rang 0 sera l'indice de l'ensemble $G=\sum\mathfrak{E}$ de $\mathfrak{E}$. Supposons que les éléments de $R_\xi\mathfrak{E}$ sont représentés par la notation $G_{\alpha_0\cdots\alpha_\eta\cdots}$, $(\eta<\xi)$, pour tout $\xi<\alpha$ et cela de façon que $(a^1{}_0..a^1{}_\eta..)_{\eta<\xi^1} \subseteq (a^2{}_0..a^2{}_\zeta..)_{\zeta<\xi^2}$ suivant que $G_{\alpha^1{}_0\ldots\alpha^1{}_\eta\cdots} \subseteq G_{a^2{}_0\ldots a^2{}_\zeta\ldots}$, $(\eta<\xi^1,\ \zeta<\xi^2)$, pour tout $\alpha>\xi^1\leq\xi^2<\alpha$.

Si $\alpha=\gamma$, l'application du procédé est terminé; supposons que $\alpha<\gamma$ et soit X un élément de $R_\alpha\mathfrak{E}$. On a deux cas:

I. $\alpha=\alpha_0+1$. L'ensemble X sera désigné par $G_{a_0\ldots a_\xi\ldots a_{\alpha_0}}$, a_{α_0} étant le point de l'ensemble A_{α_0} qui, en raison de la correspondance φ_α entre A_{α_0}, $R_\alpha\mathfrak{E}$, correspond à l'ensemble envisagé X, et $G_{\alpha_0\ldots\alpha_\xi\ldots}$, $(\xi<\alpha_0)$, désignant l'ensemble unique

---

[14]) Voir Journal de Math., 1, 1905, p. 200. La „méthode de cortèges d'indices" de M. Lebesgue a fourni des résultats très précieux dans la théorie des fonctions réelles et des ensembles analytiques de Souslin-Lusin (voir R. Baire, loc. cit. 6·13) et surtout le livre cité de M. Lusin. Voir aussi un mémoire de M. M. L. Kantorovitch-E.Livenson, Fund. Math. 18, 1932 pp. 214-279 et la littérature qui y est citée; cf. la notion des fonctions-δs et fonctions-σd de M. M. Sierpinski-Hausdorff (ibidem).

de $R_{\alpha_0}\mathfrak{T}$ contenant l'ensemble X. Alors, on voit que a_{α_0} parcourant les points de A_{α_0}, le signe $G_{a_0 \ldots a_{0\xi} \ldots a_{\alpha_0}}$ parcourt les éléments de $R_\alpha \mathfrak{T}$; et vice versa.

II. α est de seconde espèce. On posera $X = G_{a^0_0 \ldots a^\xi_\xi \ldots}$, $(\xi < \alpha)$, le signe $G_{a^0_0 \ldots a^\xi_\xi}$ étant l'ensemble (unique) de $R_{\xi+1}\mathfrak{T}$ tel que $G_{a^0_0 \ldots a^\xi_\xi} \supset X$ pour tout $\xi = \alpha$.

On voit que $a^\xi_\xi = a^{\xi'}_\eta$ pour tout $\xi < \xi' \leq \eta < \alpha$.

Ainsi les éléments de $\mathfrak{T}$ sont mis sous la forme $G_{a_0 \ldots a_\xi \ldots}$, $(\xi < \alpha,\ \alpha < \gamma)$; en particulier, $G = G_{vide} = \sum \mathfrak{T}$. Désignons par $S(\mathfrak{T})$ le système des complexes (c'est-à-dire des indices) $(a_0 \ldots a_\xi \ldots)_{\xi<\alpha}$, $(\alpha < \gamma)$, qu'on vient de construire. On voit que chaque partie initiale, même la „partie initiale vide", de chaque élément de $S(\mathfrak{T})$ est un élément de $S(\mathfrak{T})$ et que les éléments de $S(\mathfrak{T})$ et ceux de $\mathfrak{T}$ sont dans une correspondance biunivoque vérifiant ces conditions:

Soient $X^i = G_{a^i_0 \ldots a^i_\xi \ldots}$, $(\xi < \alpha^i)$, deux ensembles différentes quelconques de $\mathfrak{T}$; alors

Si $X^1 \subsetneq X^2$, on a $(a^1_0 \ldots a^1_\xi \ldots)_{\xi<\alpha^1} \subsetneq (a^2_0 \ldots a^2_\xi)_{\xi<\alpha}$; et vice versa [15]).

Si $X^1 X^2 = 0$, on a $(a^1_0 \ldots a^1_\xi)_{\xi<\alpha^1} \| (a^2_0 \ldots a^2_\xi \ldots)_{\xi<\alpha^2}$; et vice versa.

La réciproque est encore vraie: si l'on a une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles qu'on peut mettre dans une correspondance biunivoque avec les éléments d'un système de complexes et cela de façon que les conditions écrites ci-dessus soient vérifiées, on prouve facilement que $\mathcal{F}$ est un tableau ramifié d'ensembles.

Le procédé le plus simple de faire correspondre à un système S de complexes A un tableau ramifié $\mathfrak{T}(S)$ d'ensembles est le suivant: En désignant par $(A, .)_S$ l'ensemble de tous les complexes K de S tels que $A \subset K$ et par $[A, .)_S$ l'ensemble $(A, .)_S$

---

15) Bien entendu, on convient que le complexe vide 0 est une portion initiale de tout complexe non-vide A et par conséquent $0 \subset A$.

augmenté de l'élément A, on voit que la famille $\mathfrak{T}(S)$ des ensembles $(A, .)_S$ et $[A, .)_S$, A parcourant les éléments de S, est un tableau ramifié d'ensembles.

Soit enfin T un tableau ramifié *de points* (donc d'éléments quelconques) tel qu'il fut défini dans la première partie de ce §; désignons par $S(T)$ l'ensemble des $(., a)_T$ et $(., a]_T$, a parcourant les points de T; alors on voit que $S(T)$ est un système de complexes jouissant de la propriété que, quel que soit le complexe $(a_0 \ldots a_\xi \ldots)_{\xi<\alpha}$ de $S(T)$, le complexe $(a_0 \ldots a_\eta \ldots)_{\eta<\xi}$ est aussi un élément de $S(T)$ pour tout $\xi<\alpha$.

D'autre part, désignons par $\mathfrak{T}(T)$ la famille des ensembles $(a, .)_T$ et $[a, .)_T$; on voit que $\mathfrak{T}(T)$ est un tableau ramifié *d'ensembles* qui est en rapport très simple avec le système $S(T)$.

En somme, on peut dire que la théorie des systèmes de complexes et la théorie des tableaux ramifiés d'éléments quelconques, et, en particulier, des tableaux d'ensembles, sont dans une liaison très étroite; dans la suite, les raisonnements sur des systèmes de complexes se montreront, quelques fois, avantageux parce que ceux-ci sont facilement maniables.

2. *Ordonnance naturelle de complexes.* Soit S un système de complexes; à cause de la simplicité on considérera seulement les systèmes S tels que chaque partie initiale de tout élément de S appartient encore à S. Il s'en suit que tout noeud de seconde espèce de S est composé d'un seul élément, tandis que les complexes constituant un noeud de première espèce de S ont, pour partie commune, un élément bien déterminé de S. On voit alors, ce qui n'influe aucunement la structure de S, que les éléments de chaque noeud de S, peuvent être supposés *ordonnés alphabétiquement* (voir le § 5); c'est ce qu'on supposera dans ce qui va suivre.

On prouve facilement que S *devient un ensemble ordonné* en convenant que, $A^i = (a_0^i \ldots a_\xi^i \ldots)_{\xi<\alpha_i}$, $(i = 1, 2)$, étant deux éléments distincts quelconques de S, on pose $A^1 < A^2$ ou $A^2 > A^1$ si *ou bien* $A^1 \subset A^2$ *ou bieu* $A^1 \parallel A^2$ et $a_\varphi^1 < a_\varphi^2$, φ étant le premier indice ξ tel que $a_\xi^1 \neq a_\xi^2$.

On voit que la *relation d'ordre ainsi obtenue* (tout en dépendant de l'ordre choisi dans chaque noeud) *est une extension de la relation d'ordre* $\subset$.

Ce mode d'ordonnance de S sera appelé *ordonnance naturelle de* S parce que, par exemple, les nombres réels, dans leur développement décimal, sont ordonnés de la même façon.[16])

On n'envisagera que des S tels que $R_0(A, .)_S$ *est infini* pour tout élément A de S et on supposera que les éléments de $R_0(A, .)_S$ sont ordonnés de telle manière que le noeud $R_0(A, .)_S$ *n'ait pas un premier élément.*

Ceci étant, soit α un nombre ordinal quelconque de *seconde espèce* entre O et γS; on va démontrer ce

Lemme 17. *a) Les ensembles ordonnés* $(., \alpha)_S$ *et* $(., \alpha]_S$ sont *denses et anti-limités*[16']).

b) L'intervale ordonné $(., \alpha)_S$ *est partout dense sur* $R_\alpha S$ *donc aussi sur le segment* $(., \alpha]_S$.[16'])

Prouvons, par exemple, que $(., \alpha)_S$ est dense: il s'agit de prouver que, $A^i = (a^i_0 \,.\,.\, a^i_\xi \,..)_{\xi<\alpha_i}$, $(i=1, 2)$, étant deux éléments distincts quelconques de $(., \alpha)_S$, il y a, entre A^1 et A^2, au moins un élément de $(., \alpha)_S$. On a ou bien $A^1 < A^2$ ou bien $A^2 < A^1$. Supposons que $A^1 < A^2$; cela veut dire que ou bien $A^1 \subset A^2$ ou bien $A^1 \parallel A^2$ et $a^1_\varphi < a^2_\varphi$, φ étant le premier ξ tel que $a^1_\xi \neq a^2_\xi$. Si $A^1 \subset A^2$, désignons par A un élément quelconque du noeud $R_0(A^1, .)_S$ précédant l'élément $(A^1\, a^2_{\alpha_1})$,[17]) donc aussi l'élément A^2; si $A^1 \parallel A^2$, $a^1_\varphi < a^2_\varphi$, désignons par A un élément quelconque de $R_0(A^1, .)_S$. Dans les deux cas, on voit que $A^1 < A < A^2$ et $A \in (., \alpha)_S$. c. q. f. d.

Notre but est de prouver ce

---

16) Ici l'ordre dans chaque noeud est naturellement supposé l'ordre naturel des nombres 0, 1, ... 9. Pour les nombres rationnels, on doit prendre quelques précautions à cause de l'ambiguité de leur développement décimal. S'il s'agit seulement du type ordinal de l'ensemble des nombres rationnels, il est représentable, par exemple, par le type du système H_0 qu'on définira dans la remarque 9·1.

16') L'ensemble $(., \alpha)_S \equiv \sum_{\xi<\alpha} R_\xi S$ est appelé *l'interval gauche* α *de* S; le segment gauche α de S est par définition $(., \alpha]_S = (., \alpha)_S + P_\alpha S$.

17) Rappelons que $(A^1\, a^2_\alpha)$ est le complexe de rang α_1+1 commençant par A^1 et finissant par $a^2_{\alpha_1}$ (voir le § 5).

Théorème 6. *Pour que, quel que soit l'ordinal α de seconde espèce entre O et γS, les ensembles ordonnés* $(\,.\,,\alpha)_S$ *et* $R_\alpha S$ *soient partout denses l'un sur l'autre, il faut et il suffit que S soit une suite ramifiée de complexes.*

On se contentera de prouver que la condition est nécessaire; il s'agit donc de prouver que, S satisfaisant aux conditions énoncées dans le théorème précédent, S est une *suite* ramifiée. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; il existe alors un complexe A de rang α de S et un ordinal α_0 entre α et γS tel qu'il n'y ait aucun complexe de rang α_0 appartenant à S et prolongeant le complexe A. On peut admettre que α_0 soit le premier nombre ordinal jouissant de cette propriété. On s'aperçoit aisément que α_0 ne peut pas être de première espèce; il s'en suit, par hypothèse, que l'ensemble ordonné $R_{\alpha_0} S$ est partout dense sur l'ensemble ordonné $(\,.\,,\alpha_0)_S$ lequel est, d'après le lemme précédent, dense. Désignons par $A^i = (A\,a^i_\alpha)$, $(i=1, 2)$ deux éléments distincts quelconques de l'ensemble $R_0(A, .)_S$; on a donc ou bien $A^1 < A^2$, c'est-à-dire $a^1_\alpha < a^2_\alpha$ ou bien $A^2 < A^1$ c'est-à-dire $a^2_\alpha < a^1_\alpha$. L'intervalle (A^1, A^2) de $(\,.\,,\alpha_0)_S$ ne pouvant pas être vide, on en conclut qu'entre A^1 et A^2 il y a un élément, A^0, de $R_{\alpha_0} S$. Si, par exemple, $A^1 < A^2$, on aura $A^1 < A^0 < A^2$ c'est-à-dire $(A\,a^1_\alpha) < A^0 < (A\,a^2_\alpha)$. On en déduit que A est une portion initiale de A^0. D'autre part, A^0 appartenant à $R_{\alpha_0} S$, A^0 est un complexe de rang α_0. On a donc construit un complexe, A^0, de rang α_0 et tel que $A \subset A^0$, contrairement à la supposition.

§ 9. Descentes monotones et disjonctives.

Dans ce §, on étudiera des sous-ensembles F d'une suite ramifiée quelconque S ayant avec chacune des rangées de S des points en commun. En particulier, si F a un seul point en commun avec chaque rangée de S, on dira que *F traverse S* ou que *S est traversée par F*. Si S peut être traversée par un sous-ensemble monotone (disjonctif), on dira que *S admet une descente monotone (disjonctive)*. Si S n'admet aucune descente monotone, on dira aussi que *le rang de S n'est pas atteint* (cf. la note 10·5).

1. Théorème 1. *Chaque suite ramifiée S peut être traversée par une suite ramifiée T ayant le même rang que la suite S elle-même.*

Si S admet une descente monotone, il n'y a rien à démontrer; ce cas a lieu, en particulier, si le rang γ de S est de première espèce. En effet, a étant un point quelconque de $R_{\gamma-1}S$, il est clair que $[a]_S$ est monotone, traverse S et a le même rang que S.

Reste le cas où γ est de seconde espèce et où *S n'admet aucune descente monotone.*

Premier cas: γ est régulier donc aussi *initial régulier.*

La suite T dont on parle dans le théorème sera construite comme suit: On prendra n'importe quel point a_0 de R_0S. Supposons que les points a_ξ sont définis pour tout $\xi<\alpha$, α étant un ordinal quelconque $<\gamma$; on va alors déterminer le point a_α: si α est de première espèce, a_α sera n'importe quel point de $R_\alpha S$ tel que $a_{\alpha-1}<a_\alpha$. Supposons que α est de seconde espèce; soit T_α le tableau des points a_ξ, $(\xi<\alpha)$. Désignons par β le plus petit des rangs $\gamma[a_\xi]_{T_\alpha}$, $(\xi<\alpha)$; soit alors a^α le point a_ξ de T_α ayant le plus faible indice et tel que $\gamma[a_\xi]_{T_\alpha}=\beta$. Il est clair que le point a^α est déterminé d'une manière unique. Soient ensuite α_0 n'importe quel nombre ordinal tel que $\alpha+\gamma T_\alpha<\alpha_0<\gamma S$ et a_{α_0} un point quelconque de $R_{\alpha_0}S$ tel que $a_\alpha<a_{\alpha_0}$. Ceci étant, le segment $[a_\alpha, a_{\alpha_0}]$ de S (c'est-à-dire l'ensemble de tous les points a de S tels que $a^\alpha\leq a\leq a_{\alpha_0}$) sera considéré comme appartenant à l'ensemble à définir T; on voit, en particulier, que les points a_η prolongeant les points a_ξ, $(\xi<\alpha)$, sont définis pour tout η tel que $\alpha\leq\eta\leq\alpha_0$, de manière que $a_\eta\in R_\eta S$ et $a_\eta\leq a_{\alpha_0}$. Alors, en désignant par T_{α_0} le tableau des points a_ξ, $(\xi\leq\alpha_0)$, on voit que le rang de T_{α_0} est supérieur à celui de T_α. En posant $T=\sum_{\alpha<\gamma} T_\alpha$, on vérifie aisément que T est une suite traversant S et ayant le même rang que S.

Deuxième cas: γ est singulier et initial; par conséquent $\tau\gamma<\gamma$. Soit alors $\Omega=\beta_0<\beta_1<\cdots<\beta_\xi<\cdots$, $(\xi<\tau\gamma)$, une suite

d'ordinaux $<\gamma$ et ayant γ pour la borne supérieure. En posant $S^0 = \sum_{\xi<\tau\gamma} R_{\alpha_\xi} S$, on voit que S^0 est une suite ramifiée dont le rang est $\tau\gamma$ et, par conséquent, on se trouve dans les conditions du cas précédent. Soit alors T^0 une suite ramifiée de rang $\tau\gamma$ traversant la suite S^0; on va déterminer une suite T dont on parle dans le théorème: en désignant par a_{β_ξ} les éléments de T^0 tels que $a_{\beta_\xi} \varepsilon R_\xi S^0$ c'est-à-dire $a_{\beta_\xi} \varepsilon R_{\beta_\xi} S$ pour tout $\xi<\tau\gamma$, on obtiendra la suite cherchée T en complétant la suite T^0 de la façon suivante: soit α un nombre quelconque $<\gamma$; alors il y a un et un seul ordinal $\xi<\tau\gamma$ tel que $\beta_\xi \leq \alpha < \beta_{\xi+1}$; si $\alpha = \beta_\xi$, tout est fait parce que le point a_{β_ξ} est déjà déterminé; supposons donc que $\beta_\xi < \alpha < \beta_{\xi+1}$; alors le point a_α sera déterminé de telle façon que $a_\alpha \varepsilon R_\alpha S$ et $a_\alpha < a_{\beta_{\xi+1}}$. En désignant par T l'ensemble des points a_α ainsi construits, on voit que T est une suite ramifiée traversant S et ayant le rang γ.

En modifiant légèrement le raisonnement précédent, on prouve ce

Théorème 2. *Chaque suite complètement ramifiée S n'admettant aucune descente monotone peut être traversée par une suite complètement ramifiée ayant le même rang que la suite S elle-même.*

2. Passons à la considération de descente monotone d'une suite ramifiée S.

Théorème 3. *Pour qu'une suite ramifiée S admette une descente monotone, il faut et il suffit qu'elle contienne un tableau étroit ayant le même rang que la suite S elle-même.*

Que la condition soit nécessaire, c'est manifeste; il s'agit de prouver qu'elle est encore suffisante. Soit donc S une suite ramifiée contenant un tableau étroit T de rang γS; il s'agit de prouver l'existence d'une descente monotone de S.

D'après le théorème 8·2, le tableau étroit T contient une *suite étroite* S^0 ayant le rang γT donc le même rang que la

suite S elle-même. Or, d'après le théorème 8·4, la suite S^0 contient un point a tel que la portion $[a]_{S^0}$ est monotone; par conséquent, l'ensemble $D^0 = [a]_{S^0}$ effectue une descente monotone dans S^0. En désignant par D le plus grand sous-ensemble monotone de S contenant l'ensemble D^0, on voit que D est une descente monotone de S (on voit que D est la réunion $\sum_a (.,a]_S$, a parcourant D^0).

Le théorème précédent justifie la notion des suites et tableaux étroits.

Théorème 4. *Pour qu'une suite ramifiée S admette une descente monotone, il suffit qu'une au moins des trois conditions suivantes soit réalisée: a) S est étroite; b) γS est de première espèce; c) $\tau\gamma S = \omega$.*

Prouvons le cas *c*). S étant une suite ramifiée telle que $\tau\gamma S = \omega$, soient: $\beta_0 < \beta_1 < \cdots \beta_n < \cdots$, $(n < \omega)$, une suite d'ordinaux $< \gamma S$ ayant γS pour borne supérieure, et a_{β_n} une suite de points tels que $a_{\beta_n} \varepsilon R_{\beta_n} S$ et $a_{\beta_n} < a_{\beta_{n+1}}$ pour tout $n < \omega$. En posant $D = \sum_{n<\omega} (.,a_{\beta_n}]_S$, on voit que D est une descente monotone de S.

3. *Suites prototypes.* Une suite ramifiée, S, sera dite *prototype* (c'est-à-dire *suite prototype de ramification*) si *tout noeud de S* est composé exactement de *deux* points distincts.

Théorème de réciprocité: *Pour qu'une suite prototype S admette une descente monotone (disjonctive), il faut et il suffit qu'elle admette une descente disjonctive (monotone); plus précisément: si D est une descente monotone (disjonctive) de S, l'ensemble $\overline{D}$ composé des points $\overline{a} = |a|_S - a$, a parcourant D, est une descente disjonctive (monotone) de S.*[1])

Supposons que D est une descente disjonctive de S et soient $a_\xi \varepsilon R_\xi S$, $(\xi < \gamma S)$, les éléments de D; il s'agit de prou-

[1]) Remarquons qu'on peut construire une suite-prototype n'admettant aucune descente monotone, et, par conséquent, aucune descente disjonctive non plus.

ver que l'ensemble des points $\bar{a}_\xi = |a_\xi|_S - a_\xi$, $(\xi < \gamma S)$, est une descente monotone de S. Pour le voir, il suffit de montrer que les points $\bar{a}_\xi$, $(\xi < \gamma S)$, sont deux à deux comparables ce qui résulte immédiatement de ce que, quel que soit $\alpha < \gamma S$, l'ensemble $R_0(S - \sum_{\xi < \alpha} [a_\xi, .)_S)$ est composé du seul point $\bar{a}_\alpha$.

D'autre part, S admettant une descente monotone, S admet aussi une descente disjonctive parce que, tout d'abord, S est complètement ramifiée et, puis, on a ce

Lemme 1. Toute suite complètement ramifiée admettant une descente monotone admet une descente disjonctive.

En effet, $a_0 \ldots a_\alpha \ldots$, $(\alpha < \gamma)$, étant les éléments d'une descente monotone de S tels que $a_\alpha \in R_\alpha S$ pour tout $\alpha < \gamma S$, désignons par a'_α un point quelconque de $|a_\alpha|_S - a_\alpha$; on vérifie que l'ensemble des points a'_α, $(\alpha < \gamma S)$, est une descente disjonctive de S.

4. Si S admet une descente disjonctive, cela veut dire que S contient un ensemble disjonctif de puissance $p\gamma S$ dont les points sont distribués, dans S, d'une manière très particulière; à savoir de manière à traverser S. D'autre part, on a ceci:

Sous l'hypothèse que *chaque suite complètement ramifiée T contient un sous ensemble disjonctif de puissance $p\gamma T$*[2]), on va prouver ce

Théorème 5: *Chaque suite complètement ramifiée ayant un noeud composé d'au moins trois points distincts, admet une descente disjonctive.* (Théorème sur la descente disjonctive).

Soient donc S une suite complètement ramifiée et a, b, c trois points distincts de S tels que $(., a)_S = (., b)_S = (., c)_S$; on a donc $a \parallel b$, $b \parallel c$ et $a \parallel c$.

---

[2]) Cette hypothèse est logiquement équivalente à chacune des hypothèses P_i, $(i=1, \ldots, 12)$ du „Complément". Puisque nous ne savons ni démontrer ni réfuter aucune de celles-ci, on pourrait croire qu'il serait plus logique de reporter les raisonnements de cette section au Complément (d'ailleurs on ne s'en servira plus au cours de ce Chapitre).

Qu'il soit remarqué que nous ne savons pas prouver ceci: Soit S une suite complètement ramifiée ayant un noeud composé d'au moins trois points distincts; si S contient un sous-ensemble disjonctif de puissance $p\gamma S$, la suite S admet une descente disjonctive.

D'après le lemme précédent, on peut admettre que le rang γ de S n'est pas atteint et est, par conséquent, de seconde espèce.

Ceci étant, il s'agit de déterminer un ensemble des points α_α deux à deux incomparables tels que $d_\alpha \varepsilon R_\alpha S$ pour tout $\alpha < \gamma$.

Soit φ le nombre ordinal tel que les points a, b, c soient des éléments de $R_\varphi S$; soit ensuite $\bar{b}$ un point quelconque de $R_{\varphi+\omega}[b]_S$; on posera $d_\varphi = a$, $d_{\varphi+\omega} = \bar{b}$ et pour tout autre nombre ξ inférieur à $\varphi+\omega$, d_ξ sera un point quelconque de l'ensemble $|b_\xi|_S - b_\xi$, b_ξ étant le point de $R_\xi S$ tel que $b_\xi < \bar{b}$. On a ainsi déterminé $d_0, .. d_\xi .. d_{\varphi+\omega}$; il nous reste à déterminer des d_α pour tout α tel que $\varphi+\omega < \alpha < \gamma S$.

$\bar{c}$ étant un point de $R_{\varphi+\omega}[c]_S$, soit $\bar{\gamma}$ le rang de $(\bar{c}, .)_S$. Alors, par hypothèse, la suite complètement ramifiée $(\bar{c}, .)_S$ contient un sous-ensemble *disjonctif* de puissance $p\gamma$; soient

$$(1) \qquad c_0, c_1, .. c_\alpha, .., (\alpha < \bar{\gamma}),$$

les points de celui-ci.

Pour tout $\alpha < \bar{\gamma}$, on définira $\nu(\alpha)$ par la relation $c_\alpha \varepsilon R_{\nu(\alpha)} S$; on a donc $\varphi+\omega < \nu(\alpha) < \gamma$. Soit γ_0 la borne supérieure des ordinaux $\nu(\alpha)$, $(\alpha < \bar{\gamma})$; il est clair que $\gamma_0 \leq \gamma$.

Premier cas: $\gamma_0 = \gamma$. Dans ce cas, on peut extraire de la suite (1) une suite de points

$$c_{\alpha_0}, c_{\alpha_1} \ldots c_{\alpha_\xi} ..$$

tels que $\nu(\alpha_\xi) < \nu(\alpha_{\xi+1})$ pour tout $\xi < \gamma^0$, γ^0 étant un ordinal $\leq \bar{\gamma}$ tel que les $\nu(\alpha_\xi)$ ont, pour $\xi < \gamma^0$, le nombre γ pour borne supérieure. Ceci étant, soient u un point de $R_{\varphi+\omega}[c]_S$ tel que $u \parallel \bar{c}$ et u_0 un point de $R_{\nu(\alpha_0)}[u]_S$. Si alors u^η est le point de $R_\eta[u]$ tel que $u^\eta < u_0$, d_η sera, pour tout η entre $\varphi+\omega$ et $\nu(\alpha_0)$ un point quelconque de $|u^\eta|_S - u^\eta$; on posera $d_{\nu(\alpha_0)} = u_0$.

D'une façon générale, soient ξ un nombre quelconque $< \gamma^0$ et $u_{\xi+1}$ un point quelconque de $R_{\nu(\alpha_{\xi+1})}[c_{\alpha_\xi}]_S$: si alors u^η, pour

un η entre $\nu(\alpha_\xi)$ et $\nu(\alpha_{\xi+1})$, est le point de $R_\eta S$ tel que $u^\eta < u_{\xi+1}$, on désignera par d_η un point quelconque de $|u^\eta|_S - u^\eta$; on posera $d_{\nu(\alpha_{\xi+1})} = u_{\xi+1}$. Les nombres $\nu(\alpha_\xi)$, $(\xi < \gamma^0)$, ayant γ pour borne supérieure, on voit que les points d_α sont définis pour tout $\alpha < \gamma$ et qu'ils constituent une descente disjonctive de S.

Second cas: $\gamma_0 < \gamma$. On a donc $\varphi + \omega < \gamma_0 < \gamma$.

Soient u un point de $R_{\alpha+\omega}\,[c]_S$ tel que $u \parallel c$ et u_0 un point de $R_{\gamma_0}\,[u]_S$. Si u^η est le point de $R_\eta S$ tel que $u^\eta < u_0$, on désignera, pour tout η entre $\varphi+\omega$ et γ_0, par d_η un point quelconque de $|u^\eta|_S - \eta^\eta$; on posera $d_{\gamma_0} = u_0$. Enfin, si α est entre γ_0 et γ, on désignera par d_α un point quelconque de $R_\alpha[c_\alpha]_S$.

On voit sans peine que les points d_α, $(\alpha < \gamma)$, qu'on vient de définir, effectuent une descente disjonctive de S.

5. *Suite ramifiée* σ_0. Soit H_0 un ensemble ordonné quelconque ayant le même type ordinal que l'ensemble des nombres rationnels, par exemple l'ensemble des nombres rationnels lui-même; *désignons par* σ_0 *la famille des sous-ensembles bien ordonnés, bornés et non-vides de* H_0. Les éléments de σ_0 pouvant être considérés comme des complexes, on a, en employant le langage du § précédent, ce

Lemme 2. σ_0 *est une suite ramifiée de rang non atteint* ω_1.

Tout d'abord, rappelons que, d'après un théorème classique de Cantor, quel que soit l'ordinal $\alpha < \omega_1$, chaque portion de H_0 ayant au moins deux points contient un sous-ensemble ordonné de type α; il s'en suit que σ_0 est une *suite* ramifiée de rang ω_1. Si σ_0 admettait une descente monotone c'est-à-dire si l'on avait une suite d'éléments $A_\alpha \varepsilon R_\alpha \sigma_0$ tels que $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$ pour tout $\alpha < \alpha' < \omega_1$, on aurait, puisque pour des α infinis, A_α est de la forme $(a^\alpha_0 \ldots a^\alpha_\xi \ldots)_{\xi<\alpha}$, un sous-ensemble non-dénombrable bien ordonné de H_0, $a^{\omega+1}_{\omega+1} < \cdots a^{\alpha+1}_{\alpha+1} < \cdots$, $(\omega < \alpha < \omega_1)$, contrairement à ce que tout sous-ensemble bien ordonné de H_0 est au plus dénombrable (on a, en effet, $p_0 H_0 = \aleph_0$).

Remarquons, en passant, que $m\sigma_0 = 2^{pH_0}$.

Théorème 6. *Il existe une suite ambigüe de rang non-atteint* ω_1.[3])

En effet, considérons la suite ramifiée σ_0 et faisons le procédé suivant: désignons par $R_0 S_0$ la rangée $R_0 \sigma_0$; supposons que les sous-ensembles $R_\xi S_0$ de σ_0 sont construits pour tout $\xi < \alpha$, α étant $< \omega_1$, et cela de façon que:

1° $pR_\xi S_0 = \aleph_0$ pour tout $\xi < \alpha$;

2° $\xi + 1$ étant un ordinal quelconque $< \alpha$ et A un élément quelconque de $R_\xi S_0$, l'ensemble $R_0(A, .)_{S_0}$ des éléments B de $R_{\xi+1} S_0$ tels que $A \subset B$ est un ensemble de puissance $\aleph_0$, ordonné et *n'ayant pas un premier élément.*

On déterminera $R_\alpha S_0$ comme suit: si α est de première espèce, $R_\alpha S_0$ sera la réunion des éléments des noeuds $R_0(A, .)_{\sigma_0}$, A parcourant les éléments de $R_{\alpha-1} S_0$; si α est de seconde espèce, $R_\alpha S_0$ sera n'importe quel sous-ensemble F de $R_\alpha \sigma_0$ jouissant de ces propriétés: 1° $pF = \aleph_0$; 2° Les ensembles ordonnés F et $(., \alpha)_{S_0} \equiv \sum_{\xi < \alpha} R_\xi S_0$ sont partout denses l'un sur l'autre. La puissance de l'ensemble $(., \alpha)_{S_0}$ étant $\aleph_0$, l'ensemble ordonné $R_\alpha \sigma_0$

---

[3]) Ce théorème est dû à M. N. Aronszajn qui a bien voulu me communiquer, vers la fin du mois de juin 1934, un exemple d'une suite ramifiée ambigüe de complexes construite par des considérations suivantes: $r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$ étant la suite de l'ensemble R de tous les nombres rationnels entre 0 et 1, posons $\varphi(r_n) = \frac{1}{n}$ pour tout n entre 0 et ω. On considère un système A de complexes $(a_0, \ldots a_\xi \ldots)_{\xi < \alpha}$, $(\alpha < \omega_1)$, satisfaisant aux conditions suivantes:

a) pour tout complexe $(a_0 \ldots a_\xi \ldots)_{\xi < \alpha}$ de A, les a_ξ appartiennent à R, sont deux à deux distincts et tels que $\sum_{\xi < \alpha} \varphi(a_\xi) < \infty$;

b) α, α' étant deux ordinaux quelconques tels que $0 \leq \alpha < \alpha' < \omega_1$, pour chaque élément $(a_0 \ldots a_\xi \ldots)_{\xi < \alpha}$ de A et si petit que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un complexe $(a'_0 \ldots a'_\xi \ldots)_{\xi < \alpha'}$ de A tel que $a'_\xi = a_\xi$ pour tout $\xi < \alpha$ et $\sum_{\alpha \leq \eta < \alpha'} \varphi(a'_\eta) < \varepsilon$;

c) pour tout $0 < \alpha < \omega_1$, l'ensemble des complexes $(a_0 \ldots a_\xi \ldots)$ de rang α de A est dénombrable.

Par le procédé de l'induction complète, on s'assure que la construction de A est possible. Il est clair que A n'admet aucune descente monotone.

étant, d'après la seconde moitié du théorème 8·6, partout dense sur l'ensemble ordonné $(.,\alpha)_{\sigma_0}$ donc aussi sur $(.,\alpha)_{S_0}$, l'ensemble $R_\alpha S_0$ existe.

Ainsi, de proche en proche, on détermine des ensembles $R_\xi S_0$ pour tout $\xi < \omega_1$. En posant $S_0 = \sum_{\xi<\omega_1} R_\xi S_0$, prouvons que S_0 *est une suite ramifiée ambigüe de rang non-atteint* ω_1. On se contentera de prouver que S_0 est une *suite* ramifiée. Or, S_0 est un système de complexes ordonnables naturellement et jouissant de la propriété que, quel que soit l'ordinal α de seconde espèce entre 0 et ω_1, les ensembles ordonnés $R_\alpha S_0$ et $(.,\alpha)_{S_0}$ sont partout denses l'un sur l'autre; d'après le théorème 8·6, S_0 est bien une suite ramifiée. c. q. f. d.

Remarque 1. Soient l, m, n trois points quelconques ordonnés de telle façon que $l < m < n$: désignons par H_β, β étant un ordinal quelconque, l'ensemble, *ordonné alphabétiquement*, des complexes de rang ω_β définis comme suit: les éléments de H_β sont de la forme $(a_0 \ldots a_\xi \ldots)_{\xi<\omega_\beta}$, les a_ξ parcourant les trois points l, m, n sous la seule condition qu'à partir d'un indice (variable) φ on a $a_\xi = m$ pour tout ξ tel que $\varphi \leq \xi < \omega_\beta$ (voir la fin du § 5); en particulier, le complexe de rang ω_β et de la forme $(m, .. m ..)$ appartient à H_β.

Comme on a construit σ_0, S_0 à partir de H_0, on construit, à partir de H_β, les suites ramifiées σ_β, S_β. Nous ne le ferons pas.

Remarque 2. Par des raisonnements analogues à ceux qui nous ont servi à la construction de S_0 à partir de σ_0, on démontre ceci: Chaque suite ramifiée S dont tout noeud de première espèce est infini contient une *suite ambigüe* s dont tout noeud de première espèce est infini et telle que $\gamma s = \gamma S$.

En particulier, on construit ainsi, à partir de la suite $(.,\omega_1)_{\sigma_1}$ une suite ambigüe s_1 de rang ω_1 qui est *uniformément atteint* ce qui veut dire que, quel que soit l'élément A de s_1, la suite $(A,.)_{s_1}$ admet une descente monotone.

§ 10. Types de ramification. Suites distinguées. Premier problème miraculeux.

1. Deux tableaux T_1, T_2 sont dits *semblables*, en signe $T_1 \simeq T_2$, si entre les points de T_1 et ceux de T_2 on peut établir une correspondance biunivoque conservant les relations respectives entre les points de T_1 et de T_2; la dernière phrase veut dire ceci: a_1, b_1 étant deux points quelconques de T_1 et a_2, b_2 les points de T_2 correspondant respectivement à a_1, b_1, alors, on aura $a_2 = b_2$, $a_2 < b_2$, $a_2 > b_2$ ou $a_2 \parallel b_2$ suivant que respectivement $a_1 = b_1$, $a_1 < b_1$, $a_1 > b_1$ ou $a_1 \parallel b_1$; et réciproquement.

Si $T_1 \simeq T_2$ et si h est une similitude quelconque transformant les points de T_1 en points de T_2, alors, quel que soit le point a de T_1, on désignera par $h(a)$ le point correspondant de T_2; de même, F étant un sous-ensemble de T_1, on désignera par $h(F)$ le sous-ensemble de T_2 transformé de F; en particulier on aura $h(T_1) = T_2$.

T étant un tableau ramifié, la propriété commune des tableaux semblables avec T, sera appelée *type de ramification et désignée par* rT.

Si alors T_1, T_2 sont deux tableaux quelconques, on comprendra la signification des symboles $rT_1 \leq rT_2$ (qui veut dire la même chose que $rT_2 \geqslant rT_1$), $rT_1 \geqslant rT_2$, $rT_1 = rT_2$ ou $rT_1 \parallel rT_2$ (voir la déf. 1·14 et la note (1·11)).

Remarque. Si T est un tableau disjonctif, on voit que rT coïncide avec pT; si T est monotone (c'est-à-dire bien ordonné), le type de ramification rT coïncide avec le nombre ordinal tT; par conséquent, la théorie des types de ramification contient, comme cas particulier, la théorie *des nombres ordinaux et cardinaux, à la fois.*

Lemme 1a. Deux tableaux ramifiés semblables ont même rang.

b. Soit h une similitude transformant T_1 en T_2; si alors N est un noeud quelconque de T_1 et si $N \subseteq R_\alpha T_1$, alors $h(N)$ est un noeud de T_2 tel que $h(N) \subseteq R_\alpha T_2$. Par conséquent, quel que soit l'ordinal $\alpha < \gamma T_1$, on aura $h(R_\alpha T_1) = R_\alpha T_2$.

Lemme 2. Soient T_1, T_2 deux tableaux *réguliers*[1]) quelconques; alors:

a. S'il existe une similitude h transformant l'intervalle $(.,\alpha)_{T_1}$ en intervalle $(.,\alpha)_{T_2}$, α étant un ordinal de *seconde espèce* inférieur à γT_1 et γT_2, la similitude h peut être prolongée *d'une façon au plus* jusqu'à une similitude des *segments* $(.,\alpha]_{T_1}$ et $(.,\alpha]_{T_2}$.

b. Soit α un ordinal quelconque inférieur à γT_1 et γT_2; s'il existe une similitude entre $R_\alpha T_1$ et $R_\alpha T_2$, celle-ci peut être élargie d'une façon au plus à une similitude entre les segments $(.,\alpha]_{T_1}$ et $(.,\alpha]_{T_2}$.

Le lemme précédent est une conséquence facile de cette proposition: *Soit h une similitude entre T_1 et T_2; a étant un point quelconque de T, la transformation h coïncide, dans $(.,a]_{T_1}$, avec la similitude des deux ensembles bien ordonnés $(.,a]_{T_1}$ et $(.,h(a)]_{T_2}$.*

2. *Procédé* σ. E étant un ensemble ordonné, le signe σE représentera le tableau ramifié de tous les sous-ensembles *bien ordonnés bornés non-vides de E*, ceux-ci étant interprétés comme complexes. On démontre facilement ce

Lemme 3. *E, F étant deux ensembles ordonnés semblables, les tableaux ramifiés σE, σF sont aussi semblables.*

Puisque l'ensemble des nombres rationnels est semblable avec chacune de ses portions droites, on en déduit ce

Lemme 4. La suite ramifiée $\sigma_0 = \sigma R$, R désignant l'ensemble des nombres rationnels,[2]) est homogène.[3])

3. *Suites ramifiées distinguées.* Une suite ramifiée S sera dite *distinguée* si ces quatre conditions sont simultanément vérifiées:

---

[1]) C'est-à-dire tels que chacun de leurs noeuds de seconde espèce n'a qu'un seul point.

[2]) Dans ce qui suit, σ_0 aura constamment la même signification.

[3]) On dira qu'un tableau (ou même un ensemble) ramifié T est *homogène* si, quel que soit le point a de T, on a $T \simeq (a,.)_T$.

1° γS est un ordinal initial et régulier;

2° S est ambigüe et n'admet aucune descente monotone;

3° Chaque noeud de S est infini;

4° Borne $\sup_{a \in S}$ $p\,|a|_S$ = borne $\sup_{\alpha < \gamma S}$ $p\,R_\alpha\,S$; en particulier, si $\gamma S = \omega_{\beta+1}$, tout noeud de S a la puissance $\aleph_\beta$.

Exemple: S_0 désignant la suite ambigüe considérée à la fin du § précédent, on voit que $\sum_{\alpha < \omega_1} R_{\alpha+1}\,S_0$ est une suite distinguée de rang ω_1.

Nous ne savons pas s'il existe une suite distinguée dont le rang serait un nombre inaccessible. Au contraire, quel que soit l'ordinal β, *on peut démontrer l'existence d'une suite distinguée de rang* $\omega_{\beta+1}$. On rencontrera à plusieurs reprises des suites distinguées.

4. Nous ne savons pas si *toute suite distinguée de rang* ω_1 *est nécessairement semblable à un sous ensemble de* σ_0.

Le problème précédent est très intéressant et important; en voilà un autre, plus difficile encore, qui occupe, à notre avis, une place particulière dans l'ensemble des problèmes mathématiques concernant la théorie des ensembles.

Problème miraculeux 1: Deux suites distinguées quelconques de rang ω_1 *sont-elles nécessairement semblables?* (cf. les notes (7) et (8) de l'Introduction et la fin de ce §).[3']

Comme on le démontre facilement, le problème précédent est équivalent à celui-ci: *Une suite distinguée quelconque de rang* ω_1 *étant donnée, est-elle nécessairement homogène?* [4])

Prouvons ceci: La réponse affirmative au problème miraculeux 1 entraîne la proposition que *toute suite distinguée de rang* ω_1 *admet une descente disjonctive.*

En effet, en se servant de la proposition évidente:

[3']) Voici le *Second problème miraculeux*: S_1, S_2 *étant deux suites distinguées quelconques de rang* ω_1, *est-ce que les espaces-tableaux* eS_1, eS_2 *est homéomorphes?* (cf. le § 8·A7). Remarquons que la réponse affirmative au Pr. miraculeux I en entraîne une au Pr. miraculeux II.

[4]) Voilà encore un problème: Démontrer l'existence d'une suite distinguée *homogène.*[3])

Si un tableau admet une descente disjonctive (monotone), tout tableau qui lui est semblable en admet encore une, il suffit de construire une suite distinguée particulière de rang ω_1 admettant une descente disjonctive.

Par un procédé, nommé *l'intercalation latérale* (voir plus loin la notion d'intercalation longitudinale), on va démontrer que:

Quelle que soit la suite distinguée S, il existe une suite distinguée S_l ayant le rang γS associée à S d'une manière très simple et admettant une descente disjonctive.

En effet, soit $\mathcal{F}$ une famille de puissance pS de suites distinguées, deux à deux disjointes, de rang γS et dont aucune n'a un élément en commun avec la suite proposée S; entre les éléments de $\mathcal{F}$ et ceux de S, on peut établir une correspondance biunivoque qu'on désignera par S_a, voulant indiquer par ceci qu'à S_a de $\mathcal{F}$ correspond le point a de T et au point a de S, l'élément S_a de $\mathcal{F}$. Ceci étant, soit a un point quelconque de S; désignons par T_a le tableau qu'on obtient en ajoutant à la suite S la suite distinguée S_a de $\mathcal{F}$ de la façon que, quel soit le point s_a de S_a on a $a < s_a$ et $s_a \nparallel b$, pour tout point b de $S - (., a]_S$, ce qu'on peut écrire encore: $(., a]_S < S_a \parallel S - (., a]_S$. On désignera par S_l^0 le tableau-réunion $\sum_a T_a$, a parcourant les points de S, l'ensemble S_l^0 étant *rangé d'une façon naturelle* c'est-à-dire: les S_a aussi bien que S conservant leur relation de ramification primitive, ensuite, a, b étant deux points quelconques de S_l^0 tels que $a < b$, on devra avoir aussi $a < [b, .)_{S_l^0}$; en particulier, a, a' étant deux points distincts de S, les deux sous-tableaux S_a, $S_{a'}$ de S_l^0 seront incomparables: quels que soient les points b, b' respectivement de S_a, $S_{a'}$, on aura $b \parallel b'$.

En posant $S_l = S_l^0 - S$, on prouve très facilement que S_l est une suite distinguée de rang γS.

Or, la suite S_l admet une descente disjonctive. En effet, soient: F un sous-ensemble de S traversant la suite donnée S, et D un sous-ensemble quelconque de $\sum_a R_0 S_a$ ayant avec chacun des ensembles $R_0 S_a$, (a parcourant F), un seul point en commun. On prouve facilement que l'ensemble D constitue une descente disjonctive de la suite distinguée S. c. q. f. d.

5. *Cas de suites ramifiees dénombrables.*

Lemme 5. *Quelle que soit la suite ramifiée dénombrable S, il existe une suite ramifiée dénombrable S^0 de rang $\gamma S+1$ telle* que $S=(.,\gamma S)_{S^0}$ [5]).

Le cas où γS serait de première espèce étant trivial, supposons que γS est de seconde espèce. Prenons, tout d'abord, un cas très particulier où il s'agit de l'ensemble σ des complexes $(a_1 \ldots a_n)$, n étant un entier positif quelconque, les a_n parcourant les entiers positifs et négatifs. On voit que σ est une suite ramifiée de rang ω dont chaque noeud a la puissance $\aleph_0$. Désignons par s l'ensemble des complexes $(a_1 a_2 \ldots a_n \ldots)$, a_n parcourants les entiers. On démont refacilement que les ensembles σ, s sont *ordonnables naturellement, chacun partout dense sur l'autre* et *chacun séparable.* Soit donc, en particulier, R un sous-ensemble dénombrable quelconque de s partout dense sur s donc aussi sur σ. En désignant par σ^0 l'ensemble des complexes de $\sigma+R$, on conclut, à la suite du théorème 8·6, que σ^0 est une suite ramifiée de rang $\omega+1$ et que $R_\omega \sigma^0 = R$. Ainsi, le lemme est démontré pour la suite σ et, comme on le voit, pour toute suite semblable à un sous-ensemble de σ, en particulier pour des suites dénombrables de rang ω, parce qu'on prouve aisément que *toute suite ramifiée dénombrable de rang $\leq \omega$ est semblable à un sous-ensemble de la suite ramifiée σ* considérées ci-dessus.

Reste le cas où γS est de seconde espèce et entre ω et ω_1. $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots$ étant une suite d'ordinaux $<\gamma S$ tendant vers γS, posons $S_0 = \sum_{n<\omega} R_{\alpha_n} S$; on se trouve dans les conditions du cas précédent et il existe une suite S_0^0 de rang $\omega+1$ telle que $(.,\omega)_{S_0^0} = S_0$. En posant $S_0 = S + S_0^0$, on prouve aisément que S_0 répond aux conditions du lemme.

Théorème 1. *Quelles que soient les deux suites ramifiées dénombrables S_1, S_2 telles que $\gamma S_1 = \gamma S_2$, $p_{\,|\,a|_{S_i}} = pS_i = \aleph_0$ pour tout $a \varepsilon S_i$, $(i=1,2)$, on a $S_1 \simeq S_2$.*

---

[5]) Si l'on dit que le rang d'un tableau T est *prolongeable* s'il existe un tableau T_0 tel que $\gamma T_0 > \gamma T$ et $T=(.,\gamma T)_{T_0}$, le lemme dit, en particulier, que *le rang de tout tableau dénombrable est prolongeable.* On peut démotrer ceci: *Pour que le rang d'un tableau soit prolongeable, il faut et il suffit qu'il soit atteint.* Par conséquent, le rang de σ_0 n'est pas prolongeable: celui d'une suite distinguée quelconque non plus.

Le cas où les ordinaux γS_1, γS_2 seraient de première espèce pouvant être réduit à celui où ils sont de seconde espèce, considérons le dernier cas. D'après le lemme précédent, il existe une suite ramifiée dénombrable S_i^0 telle que $\gamma S_i^0 = \gamma S_i + 1$, $(\cdot, \gamma S_i)_{S_i^0} = S_i$, $(i = 1, 2)$; en particulier, en posant $R_i = R_{\gamma S_i} S_i^0$, on aura $pR_i = \aleph_0$.[6])

Soient:

(1) $a^0, a^1, \ldots a^n \ldots$ les points de S_1 numerotés une fois pour toutes;

(2) $b^0, b^1, \ldots b^n \ldots$ „ „ „ S_2 „ „ „ „ „

(1′) $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$ „ „ „ R_1 „ „ „ „ „

(2′) $b_0, b_1, \ldots b_n \ldots$ „ „ „ R_2 „ „ „ „ „

En posant $A_0 = a_0$, $E_0 = (\cdot, A_0)_{S_1}$, $B_0 = b_0$, $F_0 = (\cdot, B_0)_{S_2}$ et en faisant se correspondre les noeuds A_0, B_0, on obtient une similitude, qu'on désignera par h_0, entre les points de E_0 et ceux de F_0: on aura $h_0(E_0) = F_0$. Supposons que $A_0, \ldots A_n$ sont des points de (1′) et $B_0, \ldots B_n$ des points de (2′) tels que, en posant $E_i = (\cdot, A_0)_{S_1} + \cdots + (\cdot, A_i)_{S_1}$, $F_i = (\cdot, B_0)_{S_2} + \cdots + (\cdot, B_i)_{S_2}$, la correspondance biunivoque $A_i \rightleftarrows B_i$, pour tout $i \leq n$, entraîne une similitude h_i transformant E_i en F_i et que h_i se réduit, sur E_{i-1}, à la similitude h_{i-1}; on va alors construire les points A_{n+1}, B_{n+1} et définir un prolongement de h_n.

Premier cas: n est un entier pair ou 0: Soit A_{n+1} l'élément du plus faible indice de la suite (1′) distinct des éléments $A_0, \ldots A_n$; désignons par m le point a^j du plus faible indice j dans (1) tel que $a^j \varepsilon (\cdot, A_{n+1})_{S_1} - E_n$ et $|a^j|_{S_1} . E_n \supset 0$. *Il est essentiel de remarquer que m existe et est déterminé d'une manière unique.* Alors, m' désignant n'importe quel point de $|m|_{S_1} . E_n$, B_{n+1} sera le premier élément de (2′) tel que $h_n(m') < B_{n+1}$, le signe $h_n(m')$ représentant le point de F_n correspondant, en vertu de la similitude h_n, au point m' de E_n. En faisant se correspondre les éléments A_{n+1}, B_{n+1}, on voit qu'on obtient une

---

[6]) On peut toujours supposer, et c'est ce que nous ferons, que $p|a|_{S_i^0} = 1$, pour tout $a \varepsilon R_i$, $(i = 1, 2)$.

similitude h_{n+1} entre les ensembles $E_{n+1} = E_n + (., A_{n+1})_{S_1}$, $F_{n+1} + F_n + (., B_{n+1})_{S_2}$, prolongeant la similitude h_n.

Second cas: n est impair; la construction est analogue à la précédente avec la différence que les lettres A, B changent leur rôle.

Dans les deux cas, les ensembles E_{n+1}, F_{n+1} sont donc déterminés.

On aura ainsi:

$$\begin{array}{ll} E_0 \subset E_1 \subset \cdot\cdot \subset E_n \subset \cdot\cdot, & \Sigma E_n = S_1, \\ F_0 \subset F_1 \subset \cdot\cdot \subset F_n \subset \cdot\cdot, & \Sigma F = S_2, \\ h_0 \subset h_1 \subset \cdot\cdot \subset h_n \subset \cdot\cdot, & \end{array}$$

le signe $h_n \subset h_{n+1}$ voulant dire que la similitude h_{n+1} est une extension de la similitude h_n. Par conséquent, x étant un point de S_1, on aura un indice k_x tel que $h_n(x)$ représente un même point de S_2 quel que soit l'entier $n \geqslant k_x$. En posant $h(x) = h_n(x)$ si $n \geqslant k_x$, on s'aperçoit aisément que la transformation $h = h(x)$ est une similitude entre les suites ramifiées S_1, S_2. c. q. f. d.

Comme conséquence facile du théorème précédent, on a ceci:

a) Quel que soit l'ordinal $\alpha < \omega_1$, toute suite ramifiée S telle que $\gamma S = \omega^\alpha$, $p \mid a_S = pS = \aleph_0$, est homogène.[3]) (cf. la note (4)).

b) Quelles que soient deux suites distinguées de rang ω_1, S_1, S_2, et quel que soit l'ordinal $\alpha < \omega_1$, on a $(., \alpha)_{S_1} \simeq (., \alpha)_{S_2}$ (cf. le problème miraculeux I).

§ 11. Nombres bT, b'T. Tableaux normaux.

Dans ce §, on étudiera le rapport entre un tableau ramifié T et la classe de ces sous-tableaux *dégénérés*; on définira deux nombres bT et $b'T$ qui, dans la suite, interviendront fréquemment. Dans ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, T désignera un tableau *infini* quelconque.

1. *bT désignera la borne supérieure des pF, F parcourant la classe des sous-ensembles dégénérés de T.*

Les deux problèmes nous intéresseront:

Problème A: La borne supérieure bT est-elle, dans T, atteinte, c'est-à-dire, existe-t-il un sous-tableau *dégénéré* de T ayant la puissance bT?

Problème B: A-t-on nécessairement $bT = pT$?
On dira que T *est normal* s'il admet une réponse affirmative aux problèmes A et B, autrement dit *s'il a la même puissance qu'un de ses sous-tableaux dégénérés.*

Lemme 1. Quel que soit le nombre cardinal $k < pT$, T contient un sous-ensemble dégénéré T_k ayant la puissance k.

En effet, d'après le lemme 8·11, l'une au moins des égalités a lieu: $pT = mT$, $pT = p\gamma T$. Si, par exemple, $p\gamma T = pT$, on aura $k < p\gamma T$ et il existe un $\alpha < \gamma T$ tel que $p\alpha = k$; alors, a désignant un point quelconque de $R_\alpha T$, il suffit de poser $T_k = (\cdot, a]_T$. Si $pT = mT$, on voit qu'il existe une rangée R de T telle que $pR \geqslant k$, et T_k peut désigner n'importe quel sous-ensemble de puissance k de R.

Théorème 1. *Entre les nombres cardinaux bT et pT il n'y a aucun nombre cardinal; on a ou bien $bT = pT$ ou bien bT, pT sont deux nombres cardinaux consécutifs tels que $bT < pT$. En particulier, si pT est de seconde espèce, on aura $bT = pT$.* (cf. le problème B ci-dessus).

Le théorème est une conséquence facile du lemme précédent.

2. Avant d'aborder les problèmes A, B dans leurs généralités, considérons deux cas particuliers où $pT = \aleph_0$ ou $\aleph_1$.

a) *Si $pT = \aleph_0$, T est normal:* T contient un sous-ensemble dégénéré infini T_d.

Si T a une rangée infinie R (ce cas aura lieu, en particulier, si $\gamma T < \omega$), il suffira de poser $R = T_d$. On peut donc supposer que toute rangée de T est finie. Il existe alors un point a_0 de $R_0 T$ tel que $p[a_0, .)_T = pT$; supposons qu'on a démontré l'existence des points $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ tels que $a_i \in R_i T$ et

$p[a_i, .)_T = \aleph_0$ pour tout $i \leqslant n$; on désignera alors par a_{n+1} un point quelconque de $R_0(a_n, .)_T$ tel que $p[a_{n+1}, .) = pT$.

L'existence de a_{n+1} étant évidente pour tout $n < \omega$, il suffit de désigner par T_d l'ensemble des points $a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots$ (on voit que T_d est une traversée monotone de T).

b) $pT = \aleph_1$. Le problème de savoir si *tout T ayant la puissance $\aleph_1$ est normal* est d'une importance considérable parce que, comme on le verra plus loin, il est intimement lié au problème bien connu de Souslin. Il s'agit donc de voir si T est normal, c'est-à-dire *s'il contient un ensemble dégénéré non-dénombrable T_d.*

On peut supposer que $\gamma T = \omega_1$: si $\gamma T < \omega_1$, il y a une rangée non dénombrable de T, si $\gamma T > \omega_1$, il suffirait de poser $T_d = (., a)_T$, a étant un point de $R_{\omega_1} T$, pour se convaincre que T est normal. Considérons la largeur mT de T: On a soit $mT = \aleph_1$ soit $mT = \aleph_0$ soit $mT < \aleph_0$. Si $mT = \aleph_1$, T a une rangée non-dénombrable R et on poserait $R = T_d$; si $mT < \aleph_0$, T serait *étroit* et, à la suite du théorème 8·5bis, T serait normal. Reste enfin le cas où $mT = \aleph_0$. On peut aussi supposer que T n'admet aucune descente monotone parce qu'il est évident que tout tableau ambigu admettant une descente monotone est normal

En désignant par T_0 l'ensemble de tous les éléments a de T tels que $p[a, .)_T < pT$, on a ou bien $pT_0 = pT$ ou bien $pT_0 < pT$. Si $pT_0 = pT$, on voit que $R_0 T_0$ est non-dénombrable et alors il suffit de poser $T_d = R_0 T_0$; si $pT_0 < pT$, on aura, en posant $T_1 = T - T_0$, $pT_1 = pT$ et même $p[a, .)_{T_1} = pT$ pour tout point a de T.

Puisqu'on a supposé que $mT = \aleph_0$ et que γT n'était pas atteint, on voit que T_1 *est une suite ambigüe de rang non atteint* ω_1.

On prouve facilement ceci: *Quel que soit le point a de T_1, il y a une rangée infinie (et forcément dénombrable) de la suite $(a, .)_{T_1}$.*

Ceci étant, on va prouver que:

La suite T_1 contient une suite distinguée S de rang ω_1.

Pour commencer, on désignera par $R_0 S_0$ la première rangée infinie de T_1; soit α un ordinal ω_1 et supposons que les sous-ensembles disjonctifs et dénombrables $R_\xi S_0$ de T_1 sont déterminés pour tout $\xi < \alpha$; on va déterminer $R_\alpha S_0$ comme suit: si

α est de première espèce, on posera $R_\alpha S_0 = \sum_a R_{\alpha_a}[a,.)_{T_1}$, a parcourant $R_{\alpha-1} S_0$, α_a désignant l'indice de la première rangée infinie de la suite ambigüe $[a,.)_{T_1}$. Si α est de seconde espèce, on posera $R_\alpha S_0 = R_\beta T_1$, β désignant la borne supérieure des nombres η tels que $R_\eta T_1$ contient au moins un point de $\sum_{\xi<\alpha} R_\xi S_0$; le dernier ensemble étant dénombrable, l'ordinal β est bien déterminé et $<\omega_1$. Enfin, on posera $S = \sum_{\alpha<\omega_1} R_{\alpha+1} S_0$; on vérifie aisément que S est une suite distinguée de rang ω_1 (voir le § 10·3).

Il s'agit de savoir si la suite distinguée S est normale ou non c'est-à-dire si $bS = \aleph_0$ ou $\aleph_1$.

Pour que $bS = \aleph_0$, il faut et il suffit que tout sous-ensemble non-dénombrable de S soit, à un sous-ensemble au plus dénombrable près, une suite distinguée de rang γS.

Nous prouverons seulement que la condition est nécessaire. Par hypothèse, $bS = \aleph_0$. Soit E un sous-ensemble non dénombrable quelconque de S; en particulier, E peut traverser S; il s'agit de prouver que, en retranchant de E un sous-ensemble au plus dénombrable de E, le reste est une suite distinguée de rang γS. On se contentera de prouver seulement que la famille des noeuds *finis* de E est au plus dénombrable. Pour cela, soit M la réunion des ensembles $|a|_S - |a|_E$, a parcourant les points des noeuds *finis* de E. Soit, ensuite, F un sous-ensemble quelconque de M ayant avec chacun des ensembles $|a|_S - |a|_E$, a parcourant les points de E tels que $p|a|_E < \aleph_0$, un seul point en commun. On démontre que F est un sous-ensemble disjonctif de S et que $pF = pS$ si $pM = pS$; on aurait donc $bS = \aleph_1$ ce qui est incompatible avec notre hypothèse.

En somme, nous ne pouvons pas décider s'il y a une suite distinguée anormale.

Par un raisonnement analogue à celui par lequel on a prouvé que T contenait une suite distinguée, on prouve ce

Lemme 2. Toute suite ramifiée ambigüe S n'admettant aucune descente monotone contient une suite distinguée de rang $\tau\gamma S$.[1])

3. Considérons maintenant un T quelconque et demandons-nous s'il contient un sous-ensemble dégénéré T_d ayant la puissance pT. On sera plus concis.

Désignons par T_0 l'ensemble de tous les points a de T tels que $p[a,.)_T < pT$. Si $pT_0 = pT$, on aura $pR_0T_0 \geqslant p\tau pT$. Si pT est régulier, on pourra poser $T_d = R_0T_0$ parce que, comme on s'en aperçoit sans peine, $m_0T_0 = pT$. Si pT est singulier et en plus, $pR_0T_0 < pT$, il existe un ensemble de points $a^\xi \varepsilon R_0T_0$ tels que $p[a^0,.)_{T_0} < p[a^1,.)_{T_0} < \cdots < p[a^\xi,.)_{T_0} < \cdots$, $p[a^\xi,.)_{T_0} < pT$, $(\xi < \tau pT)$, les $p[a^\xi,.)_{T_0}$ ayant pT pour borne supérieure.

Soit $k^0 < k^1 < \cdots < k^\xi < \cdots$, $(\xi < \tau pT)$, une suite de nombres cardinaux $< pT$ ayant pT pour borne supérieure. Déterminons les tableaux E^ξ comme suit: β_0 étant le premier indice tel que $p[a^{\beta_0},.)_{T_0} > k^0$, désignons par E^0 un sous-tableau dégénéré quelconque de $[a^{\beta_0},.)_{T_0}$ ayant la puissance k^0 (voir le lemme 1); ξ étant un ordinal $< \tau pT$, supposons que les ensembles dégénérés $E^\eta \subset [a^{\beta_\eta},.)_{T_0}$ sont déterminés pour tout $\eta < \xi$ et que $pE^\eta = k^\eta$; alors, en désignant par β_ξ le premier indice tel que $p[a^{\beta_\xi},.)_{T_0} > k^\xi$, on prendra n'importe quel sous-ensemble dégénéré E^ξ de $[a^{\beta_\xi},.)_{T_0}$ ayant la puissance k^ξ. En posant $T_d = \sum_{\xi<\tau pT} E^\xi$, on voit que T_d est un sous ensemble dégénéré de T_0 ayant la puissance $pT_0 = pT$.

C'était dans le cas où $pT_0 = pT$. Si $pT_0 < pT$, en posant $T_1 = T - T_0$, on aura $pT_1 = pT$ et $p[a,.)_{T_1} = pT_1$ pour tout $a \varepsilon T_1$. On a deux cas, suivant que $pT_1 = p\gamma T_1$ ou $pT_1 > p\gamma T_1$.

Supposons, tout d'abord, que $pT_1 > p\gamma T_1$. Puisque $pT_1 = \sum_{\alpha<\gamma_1} m_\alpha T_1$, en posant $\gamma_1 = \gamma T_1$, il existera un $\alpha_0 < \gamma$ tel que $m_{\alpha_0} \geqslant p\tau\gamma_1$ (voir le lemme 2·2'); en particulier, si pT_1 est régulier, T_1 aura une rangée de puissance pT_1. En raisonnant sur une suite des $[a^\xi,.)_{T_1}$, $(\xi < \tau pT_1)$ les a^ξ appartenant à $R_{\alpha_0}T_1$,

[1]) On prouve aussi que le mot „ambigüe" peut être barré.

on construit, comme dans le cas précédent, un sous-ensemble dégénéré de T_1 ayant la puissance pT_1. Reste le cas où $pT_1 = p\gamma T_1$. Si T_1 est *large*, on raisonne comme tout à l'heure; le cas où T_1 est *étroit* ne présentant aucune difficulté (voir le théorème 8·5bis), reste le cas où T_1 est ambigu. On peut supposer que γT_1 est initial et non-atteint parce que, dans les deux cas, T_1 contiendrait un sous-ensemble monotone de puissance $p\gamma T_1 = pT_1$ et tout serait démontré. Puisque, quel que soit $a \varepsilon T_1$ $p(a,.)_{T_1} = pT$ et $pT_1 = p\gamma T_1$, on démontre que T_1 est une *suite ramifiée*. En tenant compte des hypothèses précédentes, T_1 *est une suite ramifiée ambigüe n'admettant aucune descente monotone et ayant, pour rang, un nombre initial.*

En tenant compte du lemme 2, on peut démontrer ce

Théorème 2. *Tout T anormal contient une suite distinguée anormale S telle que $p\gamma S = p\tau pT$.*

Ainsi, l'existence de *tableaux anormaux* se réduit à celle de *suites distinguées anormales*. La question concernant leur existence reste ouverte (cf. le § 12 et le complément).

4. Nombre bT. Si $a \varepsilon T$, $b \varepsilon T$, le signe $(a \leq b)_T$ ou simplement $(a \leq b)$ sera appelé *direction-élément* de T si *ou bien* $a < b$, $(a, b) = 0$ *ou bien* $a \equiv b$, $(a, .)_T = 0$; c'est-à-dire si *ou bien* b est un des successeurs immédiats de a ou, si a est un des derniers points de T (c'est-à-dire $(a,.)_T = 0$). Deux directions-éléments $(a \leq b)$, $(a' \leq b')$ sont dites *distinctes* si l'on n'a pas à la fois $a \equiv a'$, $b \equiv b'$; et *non-radiales* si elles sont, tout d'abord, distinctes, et puis telles que *ou bien* $a \parallel a'$ ou bien, à la fois, a non $\parallel a'$ et b non $\parallel b'$; il s'en suit qu'on n'a pas alors $a \equiv a'$.[2]). Autrement dit, deux directions-éléments $(a \leq b)$, $(a' \leq b')$ sont non-radiales si ou bien $a \parallel a'$ ou bien $a < a'$, $b \leq a'$ ou bien $a' < a$, $b' \leq a$. Ceci étant, *$b'T$ sera la borne supérieure des pF, F parcourant la classe des familles de directions-éléments de T celles-ci étant deux à deux non-radiales.*

La notion de directions-éléments de T s'impose d'elle-même: elle nous indique un certain passage d'un point de T à un seul de ses successeurs immédiats (éventuels). C'est ainsi qu'on gé-

[2]) D'où l'expression „non-radiales".

néralise la notion de *passage de n à $n+1$* qui nous est familier dès les premiers éléments de Mathématiques (cf. l'hypothèse P_3 du Complément).

Dans le cas de tableaux d'ensembles $\mathfrak{T}$ (voir le § 8*B*), $b'\mathfrak{T}$ admet une autre définition, plus concrète d'ailleurs.

$\mathfrak{T}$ étant un tableau d'ensembles, $\mathfrak{T}^d$ sera la famille-réunion qu'on obtient en adjoignant à $\mathfrak{T}$ tous les ensembles $A-B$, les A, B parcourant $\mathfrak{T}$.

On va prouver que *$b'\mathfrak{T}$ coïncide avec la borne supérieure des $p\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ parcourant la classe des sous-familles disjonctives de la famille $\mathfrak{T}^d$.*

La proposition sera démontrée en deux pas:

1° Faisons correspondre à une direction-élément $(A \leq B)$ l'ensemble E_{AB}, celui-ci étant soit $A-B$ soit A suivant que $A \supset B$ ou $A = B$. On voit que, ainsi, à deux directions-éléments non-radiales de $\mathfrak{T}$ correspondent deux ensembles disjoints de $\mathfrak{T}^d$ (qui ne sont pas vides tous les deux).

2° D'autre part, à un élément non vide M de $\mathfrak{T}^d$ faisons correspondre la direction-élément $(A_M \leq B_M)$ de $\mathfrak{T}$ construit comme suit: si $M \in \mathfrak{T}^d - \mathfrak{T}$, B_M sera tel que $X - B_M = M$, $X \in \mathfrak{T}$ (on voit que X, B_M et A_M sont déterminés sans aucune ambiguité); si $M \in \mathfrak{T}$, A_M sera M, et B_M sera soit M soit un élément de la famille $R_0(M, .)\mathfrak{T}$ suivant que celle-ci est vide ou non. Alors, à deux éléments disjoints non-vides de $\mathfrak{T}^d$ correspondent, ainsi, deux directions-éléments non-radiales de $\mathfrak{T}$.

La notion de $b'\mathfrak{T}$ interviendra effectivement dans le § suivant.

A propos de $b'T$, on peut poser deux problèmes analogues aux problèmes A, B en y remplaçant bT par $b'T$.

Lemme 3. *$bT \leqslant b'T \leqslant pT$. On ne sait pas si le signe d'inégalité peut intervenir. Si T est normal, on aura $bT = b'T = pT$.*

On aura besoin de ce

Théorème 3. *Abstraction faite des T dont le rang est un ordinal inaccessible, la borne supérieure $b'T$ est atteinte.*

D'après ce qui précède, on se bornera au cas où T *est une suite ambigüe quelconque ayant, pour rang, un ordinal initial singulier*. Désignons pas E l'ensemble de tous les points a de T tels que le nombre $\alpha > 0$ vérifiant $a \varepsilon R_\alpha T$ soit de *première espèce* et que $p \mid a \mid_T = 1$.

a) $pE = pT$.

En effet, si $pE < pT$, en posant $S = T - E$, on démontre que S serait une suite ambigüe totalement ramifiée dont le rang est un nombre singulier $(= \gamma T)$ ce qui est incompatible avec le théorème 8·2.

b) Désignons par $\mathcal{F}$ la famille des directions-éléments $(a \leq b)$ de T, b parcourant les points de E (par conséquent, a est le prédécesseur immédiat de b); on voit que $p\mathcal{F} = pE$ donc $p\mathcal{F} = pT$ et que les éléments de $\mathcal{F}$ sont deux à deux non-radiales.

5. *Nous ne savons pas si, dans l'énoncé du théorème précédent, le signe $b'T$ peut être remplacé par bT: pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que tout T soit normal.*

Prouvons que la condition est nécessaire; on se bornera au cas de suites ramifiées ambigües S de rang non-atteint qui est un nombre regulier initial quelconque. On emploiera un procédé appelé *intercalation longitudinale*.

a étant un point de S et α l'ordinal tel que $a \varepsilon R_\alpha S$, désignons par S^a le tableau qu'on obtient de S en y intercalant, entre le point a et le noeud $R_0(a, .)_S$, un ensemble bien ordonné E^a de rang ω_α: tout point de E^a précédera tout point succédant à un point au moins de $R_0(a, .)_S$ et suivra à tout point de $(., a]_S$. Les E^a étant, pour des a distincts, deux à deux disjoints, on posera $S_l = \sum_a S^a$, $(a \varepsilon S)$, les points de S_l étant rangés naturellement. On prouve facilement ceci:

α) Après tout point de S_l, il y a un point de S. Il s'en suit qu'à tout sous-ensemble disjonctif de S_l on peut faire correspondre un sous-ensemble disjonctif de S ayant la même puissance que lui-même.

β) S_l est une suite ambigüe n'admettant aucune descente monotone; on a $mS_l = mS$, $\gamma S_l = \omega_{\gamma S}$, $pS_l = \aleph_{\gamma S} = bS_l$.

Le rang de S_l est donc singulier. A la suite de l'hypothèse, S_l contient un sous-ensemble *dégénéré* E ayant la puissance $bS_l = \aleph_{\gamma S}$.

Or on a $pR_0E = p\gamma S$. En effet, le rang γS étant, par supposition, régulier, on a $\tau pE = \gamma S$; puisque, d'autre part $p\,[a,.)_E < pE$, $pE = \sum_{a \in R_0 E} [a,.)_E$, on aura $pR_0E \geqslant p\gamma S$. L'ensemble R_0S étant disjonctif, la suite S contient, d'après α), un sous-ensemble disjonctif de puissance R_0E; on a donc puissance $p\,R_0\,S = p\gamma S$, et la suite E est normale. c. q. f. d.

6. Pour terminer, démontrons que

L'identité (eventuelle) $b'T = p\,T$ entraîne l'identité $bT = pT$ (la réciproque est évidente).

On peut supposer que T *est une suite distinguée*. Alors, en faisant correspondre à une direction-élément $(a \leq b)$ de T un point quelconque de $|b|_T - b$, on voit qu'à *deux directions-éléments non-radiales* de T correspondent, ainsi, *deux points incomparables* de T. c. q. f. d.

§ 12 Retour aux ensembles ordonnés.

A. Notion de développement complet d'un ensemble ordonné.

1. Dans la section B du § 8, on a défini des tableaux ramifiés *complets* d'ensembles comme des tableaux ramifiés $\mathfrak{T}$ d'ensembles vérifiant ces conditions:

1° L'ensemble $\sum \mathfrak{T}$ est un élément de $\mathfrak{T}$;

2° X étant un élément quelconque de $\mathfrak{T}$ tel que $pX > 1$, alors $\sum R_0(X,.)_{\mathfrak{T}} = X$;

3° La partie commune de chaque sous-tableau *monotone* non-vide de $\mathfrak{T}$ appartient à $\mathfrak{T}$ (sauf éventuellement si celle-ci est vide).

Dans le cas qui nous occupe actuellement, on considérera des tableaux ramifiés de *portions* (et non pas de sous-ensembles *quelconques*), d'un *ensemble ordonné* E.

Notation. $\mathcal{F}$ étant une famille d'ensembles quelconques, *la famille de tous les éléments de* $\mathcal{F}$ *ayant au moins deux points sera désignée par* $\psi\mathcal{F}$.

Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, E *désignera un ensemble ordonné quelconque.*

Chaque tableau *ramifié complet* D de *portions* de E tel que E soit un élément de E sera appelé *développement complet de l'ensemble ordonné* E.

Prouvons tout d'abord ce

Lemme 1. *Quel que soit l'ensemble ordonné* E *tel que* $p_0 E \leq \aleph_\beta$,[1]) *le rang* γ *de chaque développement complet de* E *est tel que* $\gamma \leq \omega_{\beta+1}$.

En effet, supposons qu'il existe un développement complet D de E tel que $\gamma D > \omega_{\beta+1}$ bien que $p_0 E \leqslant \aleph_\beta$. En désignant par F un élément quelconque de $R_{\omega_{\beta+1}} D$, soit, pour tout $\xi < \omega_{\beta+1}$, E_ξ l'élément (unique) de $R_\xi D$ tel que $E_\xi \supset F$. Il est clair que $E_\xi \supset E_{\xi+1}$ et que l'ensemble $E_\xi - E_{\xi+1}$ est composé, pour tout $\xi < \omega_{\beta+1}$, de deux portions disjointes P'_ξ, P''_ξ (dont l'une peut d'ailleurs être vide). Soient alors a'_ξ, a''_ξ deux points quelconques appartenant respectivement à P'_ξ, P''_ξ (si, par exemple, $P'_\xi = 0$, il est clair que $\alpha'_\xi = 0$); en désignant par P' et P'' l'ensemble des points différents a'_ξ et a''_ξ respectivement, pour tout $\xi < \omega_{\beta+1}$ il est clair qu'au moins l'un des ensembles P' et P'' aura la puissance $\aleph_{\beta+1}$. Si, par exemple, $pP' = \aleph_{\beta+1}$, cela voudrait dire que P' est un sous-ensemble *bien ordonné* de E et de puissance $\aleph_{\beta+1}$; par conséquent, $p_0 E \geqslant \aleph_{\beta+1}$ contrairement à l'hypothèse.

2. D étant un développement complet de E, on a donc $\sum D = E$. De plus, X étant un élément quelconque de ψD, il y a une famille *disjonctive* $f(X)$ *de portions non-vides* de X telle que

1° $pf(X) > 1$ et $\sum f(X) = X$.

2° Quel que soit l'élément Y de $f(X)$, il n'y a aucun élément Z de D tel que $X \supset Z \supset Y$. On voit que $f(X) = R_0(X, .)_D$.

---

[1]) Pour la terminologie, voir le § 7.

Dans la suite, on emploiera constamment la notation $f(X)$ dans le sens qu'on vient d'indiquer.

Or, la famille disjonctive $f(X)$ *peut être ordonnée* de la manière suivante: A, B étant deux éléments distincts de $f(X)$, on posera $A \lesseqgtr B$ dans $f(X)$ suivant que la portion A de E est, dans E, à gauche ou à droite de la portion B de E.

Dans la suite, on sous-entendra toujours que $f(X)$ est ordonné de la façon indiquée et, par conséquent, la notation $tf(X)$ pour le type ordinal de $f(X)$ s'explique d'elle même. On voit alors que, quel que soit l'élément X de ψD, on a $1 < tf(X) \leqslant tX$ (le symbole tX désignant le type ordinal de l'ensemble ordonné X; celui-ci est, d'ailleurs, une portion de E).

ν étant un type ordinal et E un ensemble ordonné, une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles sera dite *ν-partition complète de E* ou encore *développement complet de E suivant le type ν*, si $\mathcal{F}$ est un développement complet de E satisfaisant à la condition que, quel que soit l'élément X de $\psi\mathcal{F}$, le type ordinal $tf(X)$ est identique avec le type ν; si, par exemple, $\nu = 2, 3$, on parlera d'une *bipartition* ou d'une *tripartition* complètes de E.

B. Tripartition complète d'un ensemble ordonné dense. Solution d'un problème de M. Sierpinski.

Soient E un ensemble ordonné dense quelconque et D une tripartition complète de E.[2]) On va spécialiser la représentation, indiquée dans le § 8B, des éléments de D.

1. Soit $\{l, m, n\}$ un ensemble ordonné *composé de trois points* absolument quelconques l, m, n tels que $l < m < n$ (par exemple $l = 1$, $m = 2$, $n = 3$); on va construire un système, $S(D)$, de complexes $(a_0 .. a_\xi ..)$ de la façon suivante:

Le complexe vide sera l'indice de l'élément E qui est, comme on sait, l'élément unique de $R_0 D$; autrement dit, E ne portera aucun indice dans la représentation qu'on va construire. Le complexe vide (c'est-à-dire, l'indice de E) sera un élément de $S(D)$ où il constituera „la première rangée" $R_0 S$ du système à construire $S(D)$.

---

[2]) A propos de l'existence de D, voir le § 8B et la section C qui va suivre.

Supposons que les éléments[3]) de la famille $R_\xi D$ sont mis sous la forme $E_{(a_0 \cdot\cdot a_\eta \cdot\cdot)_{\eta<\xi}}$, les $(a_0 \cdot\cdot a_\eta \cdot\cdot)_{\eta<\xi}$ constituant un système $R_\xi S$ de complexes tels que a_η soit l, m ou n pour tout $\eta<\xi$ et tout $\xi<\alpha$, α étant un ordinal inférieur au rang γD du tableau ramifié D, et cela de façon que les conditions suivantes soient vérifiées:[3])

$E^i = E_{(a_0^i \cdot\cdot a_\xi^i \cdot\cdot)_{\xi<\alpha_i<\alpha}}$, $(i=1,2)$ étant deux éléments quelconques de l'intervalle $(\cdot\,,\alpha)_D$ tels que

$E^1 = E^2$, alors $(a_0^1 \cdot\cdot a_\xi^1 \cdot\cdot)_{\xi<\alpha_1} \equiv (a_0^2 \cdot\cdot a_\xi^2 \cdot\cdot)_{\xi<\alpha_2}$; par conséquent, $\alpha_1 = \alpha_2$;

(I) $E^1 \subsetneq E^2$, alors $(a_0^1 \cdot\cdot a_\xi^1 \cdot\cdot)_{\xi<\alpha_1} \gtrless (a_0^2 \cdot\cdot a_\xi^2 \cdot\cdot)_{\xi<\alpha_2}$;

$E^1 E^2 = 0$, alors $(a_0^1 \cdot\cdot a_\xi^1 \cdot\cdot)_{\xi<\alpha_1} \parallel (a_0^2 \cdot\cdot a_\xi^2 \cdot\cdot)_{\xi<\alpha_2}$.[3])

On va désigner les éléments de la famille $R_\alpha D$; les indices ainsi obtenus constitueront le système $R_\alpha S$. Soit donc X un élément quelconque de $R_\alpha D$; on a deux cas:

1° α *est de première espèce.* Si alors $E_{(a_0 \cdot\cdot a_\xi \cdot\cdot)_{\xi<\alpha-1}}$ est l'élément de $R_{\alpha-1} D$ contenant l'ensemble considéré X, on posera $X = E_{a_0 \cdot\cdot a_\xi \cdot\cdot a_{\alpha-1}}$, $a_{\alpha-1}$ étant ou bien le point l ou bien le point m ou bien le point n suivant que X est le premier, le second ou le troisième élément de l'ensemble ordonné $f(E_{(a_0 \cdot\cdot a_\xi \cdot\cdot)_{\xi<\alpha-1}})$.

2° α *est de seconde espèce.* On posera $X = E_{(a_0^1 \cdot\cdot a_\xi^{\xi+1} \cdot\cdot)_{\xi<\alpha}}$, les points $a_\xi^{\xi+1}$ étant déterminés par la condition que $E_{(a_0^1 \cdot\cdot a_\xi^{\xi+1} \cdot\cdot)_{\xi<\eta}}$ est l'élément Y de $R_\eta D$ tel que $Y \supset X$ pour tout $\eta<\xi$. Dans les deux cas, le système des complexes construits $(a_0 \cdot\cdot a_\xi \cdot\cdot)_{\xi<\alpha}$ sera désigné par $R_\alpha S$.

La construction précédente étant possible pour tout $\alpha<\gamma D$, on voit que les éléments de D sont représentés sous la forme $E_{(a_0 \cdot\cdot a_\xi \cdot\cdot)_{\xi<\alpha}}$, $(\alpha<\gamma D)$, les indices $(a_0 \cdot\cdot a_\xi \cdot\cdot)_{\xi<\alpha}$, $(\alpha<\gamma D)$, par-

---

[3]) Pour la terminologie et les notations, voir le § 8.

courant le système $S(D)$ défini par la réunion des complexes des systèmes partiels $R_\alpha S$, $(\alpha < \gamma D)$. De plus, on voit que la correspondance entre les éléments de D et ceux de $S(D)$ est biunivoque et satisfait aux conditions (I) quels que soient les éléments E^1 et E^2 de D.

Remarque 1. Le système $S(D)$ qu'on vient de construire *ne contient aucun complexe de rang* γD, autrement dit, le rang du tableau ramifié $S(D)$ de complexes construits est non pas $\gamma D+1$ mais γD.[3']

Notons encore une fois, que les éléments du système $S(D)$ sont de la forme $(a_0 \ldots a_\xi \ldots)_{\xi<\alpha}$, $(\alpha < \gamma D)$, les a_ξ étant l, m ou n.

Or, D étant un tableau ramifié *complet* d'ensembles, d'après le lemme 8·17, *tout point de l'ensemble* ΣD qui est, dans notre cas, identique avec E, *est un élément de* D. Par conséquent, aux points de l'ensemble ordonné E correspond par les transformation (I) un système partiel du système construit $S(D)$; en le désignant par $S^0(D)$, on voit que $S^0(D)$ est parfaitement déterminé et caractérisé par cette condition: $S^0(D)$ est le système de tous les complexes $(a_0 \ldots a_\xi \ldots)$ extraits du système $S(D)$ qui *ne sont une partie (portion) initiale d'aucun autre complexe de* $S(D)$. En particulier, $A^i = (a^i_0 \ldots a^i_\xi \ldots)_{\xi<\alpha_i}$, $(i=1,2)$, étant deux complexes appartenant à $S^0(D)$, on voit qu'il existe un nombre ordinal $\varphi = \varphi(A^1A^2)$ tel que $a_\xi^1 = a_\xi^2$ pour tout $\xi < \varphi$ tandis que a_φ^1 et a_φ^2 sont deux points *distincts de l'ensemble ordonné* $\{l, m, n\}$ des points l, m, n. On a donc ou bien $a_\varphi^1 < a_\varphi^2$ ou bien $a_\varphi^2 < a_\varphi^1$

2. Le système $S^0(D)$ peut être *ordonné alphabétiquement;* autrement dit, $A^i = (a^i_0 \ldots a^i_\xi \ldots)_{\xi<\alpha_i}$, $(i = 1, 2)$ étant deux éléments distincts quelconques de $S^0(D)$, si l'on convient que le signe $A^1 < A^2$ ou $A^2 > A^1$ voudra dire que $a^1_\varphi < a^2_\varphi$ dans $\{l, m, n\}$, φ désignant le nombre ordinal $\varphi(A^1, A^2)$, on s'assure que $S^0(D)$ devient un ensemble ordonné.

Résumons: b étant un point quelconque de E, désignons par $k(b)$ le complexe du système $S^0(D)$ défini par $b = E_{k(b)}$;

[3'] Rappelons que la rang γD d'un tableau ramifié D est *le type ordinal* (et non pas la borne supérieure) des nombres α tels que $R_\alpha D > 0$.

alors, $k(b)$ *établit une correspondance biunivoque entre les ensembles* E et $S^0(D)$; de plus, le système $S^0(D)$ peut être ordonné alphabétiquement. Or, on voit que *la correspondance* $k(b)$ *est une similitude des ensembles ordonnés* E et $S^0(D)$ c'est-à-dire que, si $b \lesseqgtr c$ dans E, alors $k(b) \lesseqgtr k(c)$ dans $S^0(D)$. Ceci est bien évident si l'on regarde la façon dons on a construit les complexes du système $S^0(D)$.

Ceci étant, supposons que l'ensemble E soit encore tel que $p_0 E \leq \aleph_\beta$ [1]); alors d'après le lemme précédent, on a $\gamma D \leq \omega_{\beta+1}$. D'autre part, d'après la remarque 1, le système $S(D)$ (donc $S^0(D)$ non plus) ne contient aucun complexe de rang $\omega_{\beta+1}$. Désignons par $S^m(D)$ le système des complexes de rang $\omega_{\beta+1}$ et de la forme $(Am \ldots m \ldots)$ [4]), A parcourant les complexes appartenant à $S^0(D)$. Il est clair que le système $S^m(D)$ peut être ordonné alphabétiquement et que les ensembles $S^0(D)$ et $S^m(D)$ sont semblables. Par conséquent, *les ensembles ordonnés* E *et* $S^m(D)$ *sont semblables.*

Or, l'ensemble $S^m(D)$ est un sous-ensemble de l'ensemble $H_{\beta+1}$ défini à la fin du § 5 [5]).

Autrement dit, E *étant un ensemble ordonné dense tel que* $p_0 E \leq \aleph_\beta$, *l'ensemble* E *est semblable à un sous-ensemble de l'ensemble* $H_{\beta+1}$ *défini à la fin du § 5* [5]).

Soit maintenant E un ensemble ordonné *infini* quelconque; en désignant par E^0 l'ensemble ordonné qu'on déduit de E en comblant les sauts éventuels de E par des ensembles ordonnés de type η, on voit que E^0 est un ensemble *dense tel que* $E \subseteq E^0$ et $p_0 E^0 = p_0 E$. On en conclut ce

Lemme 2. β étant un nombre ordinal et E un ensemble ordonné quelconques tels que $p_0 E \leq \aleph_\beta$, l'ensemble E est semblable à un sous-ensemble de l'ensemble $H_{\beta+1}$ défini à la fin du § 5 [5]).

Par conséquent, sous la même hypothèse, on a $pE \leqslant pH_{\beta+1}$. Or, d'après la corollaire 5·1, on a $pH_{\beta+1} \leqslant 2^{\aleph_\beta}$; on en déduit, en prenant $p_0 E = \aleph_\beta$, ce

---

[4]) Si $A = (a_0 \ldots a_\xi)_{\xi<\alpha}$, il va sans dire que le signe $(Am \ldots, m)$ veut dire $(a_0 \ldots a_\xi \ldots m \ldots m \ldots)$.

[5]) Voir aussi la remarque 9·1.

Théorème 1. *Quel que soit l'ensemble ordonné E, on a* $pE \leq 2^{p_0 E}$

Remarque 2: Le théorème précédent redonne, en particulier dans le cas où $p_0 E \leq \aleph_0$, la réponse affirmative au problème suivant de M. Sierpinski: „Un ensemble ordonné (linéairement) dont tous les sous-ensembles bien ordonnés (croissants ou décroissants) sont au plus dénombrables, a-t-il nécessairement une puissance non-supérieure à celle du continu?" (Fund. Math. 2, p. 28, problème 12). P. Urysohn en a donné la réponse affirmative; d'après une remarque de M. F. Hausdorff, la solution du problème aussi bien que le théorème précédent lui-même se trouvent implicitement dans le livre cité: G. M. (Voir, P. Urysohn, Fund. Math. 5, 1924, p. 14 et vol. 6, 1925, p. 278).

C. ϑ-partitions complètes des ensembles ordonnés continus. Ensembles ordonnés normaux.

E désignera un ensemble ordonné continu quelconque; D *sera une ϑ-partition complète quelconque de E.*

1. *A* propos de l'existence de D, faisons tout d'abord cette remarque: Soient E, F deux ensembles ordonnés *continus* tels que $E \subseteq F$; il existe une et une seule famille *disjonctive* $f(E)$ de *portions* non-vides E_a de E vérifiant ces conditions:

1° A tout point a de F correspond un élément E_a de $f(E)$ tel que $a \in E_a$;

2° a parcourant les points de F, on a $\sum_a E_a = E$.

On peut alors dire que $f(E)$ est une *décomposition de E suivant F.* On voit facilement que, pour un point donné a de F, la portion correspondante E_a est déterminée comme suit:

Si a est le premier point de F, E_a est la portion gauche de E située à gauche de l'ensemble $(a, .)_F$ des points de F qui sont à droite de a;

Si a est le dernier point de F, E_a est la portion droite de E située à droite de l'ensemble $(.,a)_F$ des points de F qui sont à gauche de a;

Si a n'est ni premier ni dernier point de F, E_a est la portion de E située entre les ensembles $(.,a)_F$ et $(a,.)_F$.

Ceci étant, appliquons ce procédé: *à chaque segment S d'un ensemble continu E tel que $pS>1$, on fera correspondre un ensemble $\varphi(S)\subseteq S$ dont le type ordinal est égal à ϑ*; de plus, désignons par $f(S)$ la décomposition de S suivant $\varphi(S)$, c'est-à-dire $f(S)$ est une famille disjonctive de portions de E chacune contenant un et un seul point de $\varphi(S)$ et étant de plus telles que $\Sigma f(S)=S$.

Désignons par $R_0 D$ la famille composée de l'ensemble E lui-même; supposons que les familles $R_\xi D$ d'ensembles sont définies pour tout $\xi<\alpha$ et qu'il y a au moins un point de E qui n'est un élément d'aucune des familles $R_\xi D$ et que les familles $\psi R_\xi D$ sont composées des segments de E, pour tout $\xi<\alpha$; définissons la famille $R_\alpha D$ comme suit:

Si α est de première espèce, $R_\alpha D$ désignera la famille-réunion des familles $f(S)$, S parcourant les éléments de la famille $\psi R_{\alpha-1} D$, c'est-à-dire $R_\alpha D=\sum_S{}' f(S)$, $S\varepsilon\psi R_{\alpha-1} D$; si α est de seconde espèce, $R_\alpha D$ désignera la famille des ensembles $\prod_{\xi<\alpha} E_0 \,.\,.\, E_\xi$, les E_ξ étant tels que $E_\xi \varepsilon R_\xi D$ et $E_\xi \subseteq \prod_{\eta<\xi} E_0 \,.\,.\, E_\eta$.

En désignant par γD le type ordinal de l'ensemble des ordinaux α tels que $R_\alpha D \supset 0$, on posera $D=\sum_{\alpha<\gamma D}{}' R_\alpha D$ (voir la note 1·2).

2. D est une ϑ-partition complète de E sur laquelle on va raisonner.

D étant un développement complet de E, tout point a de E est un élément de D; par conséquent, $a\varepsilon E$ étant donné, le nombre $\nu(a)$ tel que l'ensemble composé du point a appartient à $R_{\nu(a)} D$ est parfaitement déterminé; de plus, il est clair que $\nu(a)>0$.

Désignons par E_1 l'ensemble de tous les points a de E tels que le nombre $\nu(a)$ soit de première espèce, et par E_2 l'ensemble des points a de E tels que $\nu(a)$ soit un ordinal de se-

conde espèce. Il est clair que E_1 et E_2 sont deux sous-ensembles disjoints de E (dont l'un peut être vide) et que $E_1+E_2=E$.

Ceci étant, désignons par F_2 l'ensemble des extrémités des segments de E appartenant au tableau ψD. On voit que, si ψD est infini, l'ensemble F_2 et la famille ψD ont une même puissance.

Or, l'ensemble F_2 est partout dense sur l'ensemble E_2.

En effet, soit a un point de E_2 et I un intervalle de E contenant le point a; il s'agit de prouver que I contient un point de F_2. Remarquons, tout d'abord, que, a étant un élément de D, la famille $\mathcal{F}$ des éléments de ψD contenant le point a est telle que $a=\Pi\mathcal{F}$. Par conséquent, il y a au moins un élément de $\mathcal{F}$ c'est-à-dire un segment de E qui est entièrement contenu dans l'intervalle I.

D'autre part, considérons la famille ψD, et soit S un élément quelconque de ψD; d'après la convention ci-dessus, $\varphi(S)$ désigne un sous-ensemble de S ayant le type ordinal ϑ; par conséquent, l'ensemble $\varphi(S)$ est séparable c'est-à-dire $p_1\varphi(S)=\aleph_0$; désignons par $\varphi_0(S)$ n'importe quel *sous-ensemble dénombrable de $\varphi(S)$ partout dense sur l'ensemble $\varphi(S)$.*

Ceci étant, posons $F_1=\sum_S \varphi_0(S)$, S parcourant les éléments de ψD. Tout d'abord, l'ensemble F_1 est partout dense sur l'ensemble $\sum_S \varphi(S)$, S parcourant ψD. D'autre part, l'ensemble $\sum_S \varphi(S)$, parcourant ψD, est partout dense sur l'ensemble E_1 défini plus haut parce que, tout point de E_1 appartient à au moins un $\varphi(S)$. Il s'en suit que *l'ensemble F_1 est partoutdense sur l'ensemble E_1.*

En posant, $F=F_1+F_2$, on obtient ce résultat:

L'ensemble F est partout dense sur l'ensemble considéré E.

Or, on voit que $pF_1=\aleph_0 \,.\, p\psi D$ et que $pF_2=(p\psi D)^2$. On en conclut que $pF=\aleph_0 \,.\, p\psi D$, et, par conséquent, $p_1E\leq \aleph_0 \,.\, p\psi D$.

Lemme 3. $p_1E=\aleph_0\, p\psi D$.

Tout d'abord, en désignant par $\psi_d D$ la famille des en-

sembles distincts A, B et $A-B$, les A, B parcourant ψD, rappelons que $b'\psi D$ signifie la borne supérieure des $p\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ parcourant la classe des sous-familles disjonctives de $\psi_d D$. On démontre facilement ce

Lemme 4: $p_2 E = \aleph_0 . b'\psi D$.

Passons à la démonstration du lemme 3; on peut supposer que ψD est infini. Puisque, évidemment, $p_2 E \leq p_1 E$, le lemme 3 sera vrai toutes les fois que $b'\psi D = p\psi D$. Or, d'après les résultats du § 11, la dernière égalité aura lieu toutes les fois que les nombres $\gamma\psi D$, $p\psi D$ ne sont pas respectivement de la forme $\omega_{\beta+1}$, $\aleph_{\beta+1}$, $(\beta \geqslant 0)$. Supposons maintenant que $\gamma\psi D = \omega_{\beta+1}$, $p\psi D = \aleph_{\beta+1}$, $(\beta \geqslant 0)$, et admettons, pour aboutir à la contradiction, qu'il existe un sous-ensemble G de E ayant la puissance $< \aleph_{\beta+1}$ et partout dense sur E. Le tableau D étant complet, tout point de G est un élément de D. Puisque $pG < \aleph_{\beta+1}$, il y a un nombre α tel que $G \subset (\cdot, \alpha)_D$. Si l'on désigne alors par A un segment quelconque de E appartenant à $R_\alpha D$, on voit qu'aucun intervalle de E contenu dans A ne contient aucun point de G, ce qui est incompatible avec l'hypothèse que G est partout dense sur E. c. q. f. d.

Corrollaire 1. Toutes les fois que $b'\psi D = p\psi D$, on aura $p_1 E = p_2 E$.

Bref, le problème si l'on a identiquement $p_1 E = p_2 E$ se ramène au problème si l'on a identiquement $b'T = p\Gamma$ pour tout tableau ramifié infini (la réciproque est encore vraie: voir l'inclusion $P_5 \to P_3$ du Complément).

3. En s'appuyant sur les résultats du § 11, les lemmes 3 et 4 de ce § et le lemme 7·10, on obtient la proposition suivante dans laquelle E désigne un ensemble ordonné quelconque:

Théorème 2. *On a ou bien $p_1 E = p_2 E$ ou bien $p_2 E$, $p_1 E$ sont deux alephs consécutifs tels que $p_2 E < p_1 E$; dans le dernier cas on a $p_0 E = p_2 E$.*

Résumons quelques résultats de ce § et du § 7:

Théorème 3. *Pour tout ensemble ordonné infini E tel que $p_1 E = p_2 E$* on a $p_0 E \leq p_1 E = p_2 E \leq p_3 E = p_4 E = p_5 E \leq$ $\leq pE < 2^{p_0 E}$; *si, en plus, E est dense, $p_2 E = p_3 E$.*

4. Un ensemble ordonné *E sera dit normal s'il existe une famille disjonctive d'intervalles non-vides de E ayant la puissance $p_1 E$.* Dans le prochain §, on confrontera les notions de: tableaux ramifiés et ensembles ordonnés, normaux; pour le moment, voilà un résultat qui découle du théorème 11·3 et des lemmes précédents:

Lemme 5: Si $p_1 E$ est singulier, E est normal.

D. Sur le continu linéaire et un problème de Souslin.

1. L'un des premiers résultats fondamentaux de la théorie des ensembles ordonnés était le

Théorème de Georg Cantor[3]*:*

a) *Deux ensembles ordonnés, denses, anti-limités et dénombrables sont semblables, et ont, par conséquent, le même type d'ordre η que l'ensemble des nombres rationnels;*

b) *Deux ensembles ordonnés connexes, anti-limités et séparables sont semblables, et ont, par conséquent, le même type ordinal λ que l'ensemble des nombres réels*[4]*);*

c) *Deux ensembles ordonnés partout lacunaires, anti-limités, denses et dont chacun a une infinité dénombrable de lacunes, sont semblables, et ont, par conséquent, le même type ordinal ι que l'ensemble des nombres irrationnels.*

---

[3]) Ges. Abhandl. p. 310.

[4]) Problème: Existe-t-il une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles ordonnés tels que l'ensemble E des types ordinaux tF, F parcourant $\mathcal{F}$ soit un ensemble ordonné du type λ? La question analogue se pose aussi pour des types dimensionnels de M. Fréchet d'ensembles appartenant à une certaine classe d'espaces abs traits.

Théorème sur le continu mathématique. E étant un ensemble ordonné, soient A_i^j les hypothèses suivantes:

A^0. E a le même type ordinal que l'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 1$;

A^1. E est continu et irréductible [5]);

A_i^2. E est continu et tel que $p_i E = \aleph_0$, $(i = 1, 5)$;

A^3. E est continu et distanciable;

A^4. E est dense, limité, distanciable et complet [6]);

A^5. E est dense, distanciable et compact en soi.

Les propositions A^0, A^1, A_1^2, A_5^2, A^3, A^4, A^5 *sont, deux à deux, logiquement équivalentes, et, par conséquent, chacune d'elles caractérise le type ordinal* ϑ *du continu linéaire.*

Le théorème sera démontré par ce schème de conclusions

$$A^5 \to A^4 \to A^3 \to A_1^2 \to A_5^2 \to A_1^2 \to A^1 \to A^0 \to A^5$$

$A^5 \to A^4$. Tout d'abord, E étant compact en soi, il est limité. Il s'agit alors de prouver que,s ous l'hypothèse A^5, E est complet. E étant compact en soi, toute suite de points de E satisfaisant au critère de convergence de Cauchy est convergente parce qu'elle admet un seul point d'accumulation.

$A^4 \to A^3$. Il s'agit de prouver que E est non-lacunaire. Supposons, par absurde, que $E = A + B$, $A \supset 0$, $B \supset 0$, que A soit à gauche de B et que A n'ait pas un dernier point ni B un premier. Soit a_n, $(n = 1, 2, \ldots)$, une suite strictement croissante de points de A confinale avec A (E étant distanciable, il est clair qu'une telle suite de points a_n existe). On vérifie aisément que les

---

5) Un E continu est *irréductible* si tout sous-ensemble continu de E est semblable à E.

6) C'est-à-dire: chaque suite de Cauchy de points de E est convergente (a un et un seul point d'accumulation appartenant à E). (Voir E. A. p. 74)

points $a_1, a_2, \ldots$ sont tels que, ε étant un nombre réel quelconque, il y a un entier k tel que la distance entre a_n et $a_{n'}$ soit $< \varepsilon$ quels que soient les entiers n, n' dépassant k. Par conséquent, E étant complet, la suite de Cauchy $a_1, a_2, \ldots$ convergerait vers un point a de E. Il est évident que a serait soit le dernier point de A soit le premier point de B, contrairement à notre supposition.

$A^3 \to A_1^2$. C'est une conséquence du théorème 6·6.

Que $A_1^2 \to A_5^2 \to A_1^2$, c'est évident.

$A_1^2 \to A^1$. Prouvons que E est irréductible. En effet, E étant séparable, chacun de ses sous-ensembles l'est aussi; en particulieur, tout sous-continu F de E est séparable et, à la suite du théorème de Cantor, semblable à E.

L'inclusion $A^1 \to A^0$ est une conséquence du fait que tout ensemble ordonné continu contient un continu séparable, ce qu'on vérifie aisément.

Enfin, l'inclusion $A^0 \to A^5$ est évidente.

2. *Désignons par A_i^2 l'hypothèse que E est un ensemble ordonné continu tel que* $p_i E = \aleph_0$, $(i = 2, 3, 4)$; il est clair que $A_1^2 \to A_2^2 \to A_3^2 \to A_4^2 \to A_2^2$ *mais on ne sait pas* si $A_2^2 \to A_1^2$ ou, ce qui revient au même, si $A_3^2 \to A_1^2$; *c'est précisément le célèbre problème de Souslin* dont voici l'énoncé originel:

„Un ensemble ordonné (linéairement) sans sauts et sans lacunes possédant cette propriété que tout ensemble d'intervalles[7]) (contenant plus d'un point) n'impiétant pas les uns sur les autres est toujours au plus dénombrable, est-il nécessairement un continu linéaire (ordinaire)?" (Fund. Math. 1, 1920, p. 223, problème 3).[8])

D'après les résultats des deux derniers §§, *l'hypothèse que tout tableau ramifié de puissance $\aleph_1$ est normal* (ou ce qui revient au même que toute suite distinguée de rang ω_1 admet une

---

[7]) Nous dirions „de segments".

[8]) Parlant du problème de Souslin, M. W. Sierpinski écrit „... et ce problème semble très difficile" (N. T. p. 153).

descente disjonctive) *entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin* (dans le § suivant, on verra que la réciproque est encore vraie). Remarquons que la réponse affirmative au problème miraculeux, I ou II, du § 10 entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin (nous ne savons pas si la réciproque est vraie).

Pour plus de détail, voir le Complément.

A cause de l'inclusion $A^3 \to A^0$, il suffirait, pour obtenir la réponse affirmative au problème de Souslin, de prouver que, sous l'hypothèse A_2^2, E est distanciable (ou même, comme on peut le démontrer, une classe $(\mathcal{E})$ de M. Fréchet.[9])

3. Pour terminer, énonçons ce

Théorème de Huntington[10]). Pour qu'un ensemble E soit *isomorphe de l'ensemble* R des nombres réels[11]), il faut et il suffit que ces conditions A, B, C soient vérifiées:

A) Il y a une relation d'ordre $<$ par rapport à laquelle E *est ordonné*, connexe et anti-limité;

B) Il y a un mode de composition $+$ entre les couples des points de E par rapport auquel E est un groupe abélien (additif);

C) En désignant par z le zéro[12]) du groupe E relatif à la composition $+$, alors: quels que soient les points a, b de E tels que $a \gtreqless z$ et $b \gtreqless z$, on aura $a+b \gtreqless a$.

Remarques. 1° L'analyse de la démonstration de M. W. Huntington[10]) du théorème précédent montre que les nombres réels

---

9) E. A. p. 211.

10) Trans. Am. Math. Soc. 6, 1905, p. 17-41.

11) C'est-à-dire tel que, entre E et R, on ait une *similitude* par rapport à laquelle l'addition (et, par conséquent, les autres opérations élémentaires aussi) des nombres soit invariante.

12) C'est-à-dire l'élément (unique) x de E tel que, quel que soit le point a de E, on ait $x+a=a+x=a$; d'après la théorie générale des groupes z existe et est bien déterminé.

sont des symboles très commodes pour *désigner et distinguer* des points de différents ensembles (intervenant dans les Mathématiques classiques); dans l'état actuel de la Science, ils ne suffisent plus à ce but; pour remédier à cela, on a introduit des ensembles ordonnés, ramifiés, etc.

2° En analysant les démonstrations de théorèmes de l'Analyse concernant les *fonctions continues réelles*, on se rend compte que, presque toujours, on se sert seulement de la propriété A) de l'ensemble des nombres réels. Par conséquent, on aura un grand nombre de propriétés des fonctions continues réelles qui seront valables pour des fonctions continues dont les arguments et valeurs appartiennent à un ensemble ordonné connexe quelconque.

3° En introduisant, dans sa Thèse, la notion *d'espaces distanciés*, M. M. Fréchet a fait jouer aux nombres réels non-négatifs un rôle nouveau[13]): d'organiser les sous-ensembles d'un ensemble E de points: c'est-à-dire d'exprimer, F étant un sous-ensemble de E, la proximité d'un point de E de l'ensemble F et de définir ainsi les points d'accumulations de F. L'analyse de la théorie des espaces distanciés montre qu'un rôle analogue peut être joué par des points *de n'importe quel groupe abélien ordonné* (*condition A et B*)[14]) ou même par des points d'un ensemble ordonné quelconque ayant un premier point[15]).

C'est dans cette direction aussi bien que dans celle de voir les *liens entre les notions de groupes et d'espaces abstraits*[16]) que nous publierons prochainement un travail[17]).

---

13) Voir E. A. 61.

14) Voir W. Krull Journal für Math. 167, 1932, p. 160-196.

15) Comp. la note (2·15) et la notion des espaces pseudo-distancié dans la Note aux C. R. 198, 1934 p. 1563.

16) et rapprocher ainsi les idées de E. Galois et M. Fréchet,

17) Cf. D. van Dantzig, Math. Ann., 107, 1932, p. 587—626.

COMPLEMENT AUX RESULTATS PRECEDENTS.

Dans ce qui suit, T désignera, sauf mention expresse du contraire, un tableau ramifié quelconque.

1. Tout T est un *ensemble partiellement ordonné*[1]). Or, on sait que, quel que soit l'ensemble partiellement ordonné E, il y a une extension de l'ordre partiel de E et cela de façon que E devienne un *ensemble ordonné*[2]). En voilà un pour un T quelconque: on *ordonne*, tout d'abord, tout noeud de T, ensuite, on *ordonne naturellement*[3]) la famille des segments $(.,a]_T$, a parcourant T: soit $<\cdot$ la relation d'ordre ainsi définie; on pose, enfin, a, b étant deux points distincts quelconques de T, $a \leqq\cdot\, b$ suivant que $(.,a]_T \leqq\cdot\, (.,b]_T$. *On vérifie que* $<\cdot$ *est une relation d'ordre dans* T *et qu'elle élargit la relation primitive* $<$ *(ordonnance naturelle de* T.[3])

On désignera par oT *une ordonnance naturelle quelconque de* T. Il est très intéressant d'étudier les quantités $p_1(oT)$ et $p_2(oT)$.

---

1) La somme logique d'une relation de comparabilité et d'une relation de disjonction celles-ci étant, entre elles, incompatibles, s'appelle *relation d'ordre partiel.* Un ensemble E est dit *partiellement ordonné* si entre tout couple de ses points, il subsiste une relation d'ordre partiel (Voir G. M. p. 139). Il s'en suit que la classe d'*ensembles ramifiés* coïncide avec la classe d'ensembles partiellement ordonnés E vérifiant cette condition: *a étant un point quelconque de* E, *l'ensemble* $(.,a)_E$ *des points de* E *précedant le point* a *est un sous-ensemble ordonné de* E.

2) Voir Edward Szpilrajn, Fund. Math. 16, 1930, p. 386.

3) Voir le § 8.

Lemme 1. *S étant une suite ramifiée distinguée quelconque, quelle que soit l'ordonnance naturelle*[1]) *oS de S, on aura* $p_1(oS) = pS$.

En effet, supposons l'existence d'un sous-ensemble F de S partout dense sur oS et tel que $pF < oS$. Puisque $p\gamma S = pS$, il y a un $\alpha < \gamma S$ tel que $F \subset (.,\alpha)_S$. Soient, alors, x, y deux points *non-consécutifs quelconques de oS appartenant à un noeud de* $(\alpha,.)_S$. On voit que tout point entre x et y succède à tout point de $(.,x)_S \equiv (.,y)_S$ et appartient, par conséquent, à $[\alpha,.)_S$. D'autre part, l'intervalle $(x, y)_{oS}$ n'étant pas vide, il contient un point z de F, celui-ci étant partout dense sur S. On est ainsi arrivé à une contradiction.

2. Considérons, en particulier, une suite distinguée S dont le rang est $\omega_{\beta+1}$, $(\beta \geqq 0)$. Tout noeud de S ayant la puissance $\aleph_\beta$, *on peut ordonner naturellement S de manière que les points de tout noeud de S aient un même type ordinal,* τ, *de puissance* $\aleph_\beta$; en désignant par $S(\tau)$ l'ensemble ordonné ainsi obtenu, on comprendra la signification de $S(\omega_\beta)$, $S(\omega_\beta^*)$, etc.

Corollaire 1. Quelle que soit la suite distinguée S telle que $\gamma S = \omega_{\beta+1}$, on aura $p_1 S(\omega_\beta) = p_1 S(\omega_\beta^*) = p_1 S(1+\omega_\beta^*) = pS$.

Lemme 2. *Soit S une suite distinguée de rang* $\omega_{\beta+1}$; si $p_2 S(1+\omega_\beta^*) = p_2 S(\omega_\beta^*)$, *S contient un sous-ensemble disjonctif de puissance* $pS = \aleph_{\beta+1}$.

Tout d'abord, il est évident que, quel que soit le type ordinal τ de puissance $\aleph_\beta$ et *ayant un premier point*, on aura $p_2 S(\tau) = pS$; en particulier, $p_2 S(1+\omega_\beta^*) = pS$. Supposons, d'autre part, que $p_2 S(\omega_\beta^*) = pS$, et soit $\mathcal{F}$ une famille *disjonctive* d'intervalles non-vides de $S(\omega_\beta^*)$ ayant la puissance $pS = \aleph_{\beta+1}$; on va prouver l'existence d'un sous-ensemble disjonctif F de S ayant la puissance $p\mathcal{F} = pS$. On peut admettre que les éléments de $\mathcal{F}$ jouissent de cette propriété: *les deux extrémités a, b de tout intervalle* (a, b) de $S(\omega_\beta^*)$ *appartenant à* $\mathcal{F}$ *sont deux points d'un même noeud de S.* En effet, si a, b n'appartenaient

[1]) Il serait intéressant de savoir si le mot „naturelle" pourrait être barré; de même, a-t-on $p_0(oS) = mS$ pour toute ordonnance de S?

pas à un noeud de S, on aurait ou bien $a < b$ ou bien $a > b$. Supposons que $a < b$; soit b' le point du noeud $R_0(a, b)$ tel que $b' \leq b$; celui-ci étant du type ω^*_β, il contient un point, a', précédant, dans $S(\omega^*_\beta)$, le point b'. En remplaçant alors l'intervalle initial (a, b) par l'intervalle (a', b') de $S(\omega^*_\beta)$, on s'aperçoit que l'hypothèse de tout à l'heure n'a rien de restrictif. Ceci étant, soit F un sous-ensemble quelconque de la réunion $\sum \mathcal{F}$ contenant un seul point de tout élément de $\mathcal{F}$. L'ensemble ordonné $S(\omega^*_\beta)$ étant, comme on le voit, dense, il est clair que $pF = p\mathcal{F}$, donc $pF = pS$. Ainsi, tout est démontré parce que, comme on le voit, F est un sous-ensemble *disjonctif* de S.

On démontre facilement ce

Lemme 3. *Si $p_2 S(\omega^*_\beta) = pS$, $\gamma S = \omega_{\beta+1}$, on aura, quelle que soit l'ordonnance naturelle* [4] *oS de la suite distinguée S, $p_2(oS) = pS$.*

Or, il clair que $p_2 S(\omega_\beta) = pS$ si S contient un sous-ensemble disjonctif de la puissance pS c'est-à-dire si S est un tableau normal. On a ainsi ces deux propositions :

Théorème 1. *Pour qu'une suite ramifiée distinguée S soit normale, il faut et il suffit que toute ordonnance naturelle de S soit un ensemble ordonné normal.*

Théorème 2. *Pour qu'une suite ramifiée distinguée S soit normale, il faut et il suffit que $p_2(oS)$ ait une même valeur quelle que soit l'ordonnance naturelle oS de S* (Principe d'inertie d'ordonnance de S).

Problème miraculeux III: Soient S_1, S_2 deux suites distinguées quelconques de rang ω_1; η désignant le type ordinal de l'ensemble des nombres rationnels, est-ce que les ensembles ordonnés $S_1(\eta)$, $S_2(\eta)$ sont nécessairement semblables[5]? (cf. les problèmes miraculeux I et II du § 10·4).

---

[5]) On démontre ceci: pour que la réponse au problème miraculeux III soit affirmative, il faut et il suffit que, quelle que soit la suite distinguée S de rang ω_1, l'ensemble ordonné $S(\eta)$ soit *homogène* (c'est-à-dire semblable à chacun de ses intervalles). Par conséquent, la réponse affirmative au problème précédent en donne aussi une à celui-ci de M. F. Hausdorff: *Démontrer l'existence d'un ensemble ordonné homogène E tel que $p_0 E = \aleph_0$ et $pE = \aleph_1$*

Problème de rétraction. Soient T un sous-tableau quelconque traversant S et a un point de T; si $a \varepsilon R_\alpha S$, on définira l'ordinal $S_T(\alpha)$ par $a \varepsilon R_{S_T(\alpha)} T$; il est clair que, pour tout $\alpha < \gamma S$, on aura $S_T(\alpha) \leq \alpha$.

Lemme 4. *Pour qu'une suite distinguée S soit normale, il faut et il suffit qu'il existe un sous-tableau T de S traversant S et tel que $S_T(\alpha)$, $(\alpha < \gamma S)$, soit une fonction rétractante*[6]).

Prouvons que la condition est suffisante et, en particulier, que, si T traverse S de telle manière que $S_T(\alpha)$, $(\alpha < \gamma S)$, soit une fonction rétractante, le tableau T a une rangée de puissance $p\gamma S$. En effet, d'après le corollaire 2·2, il y a un ensemble d'ordinaux $< \gamma S$ ayant γS pour borne supérieure, dans les points duquel la fonction $S_T(\alpha)$ prend une même valeur, soit α_0. Alors $pR_{\alpha_0} T = p\gamma S = pS$ parce que γS est initial et régulier.

3. Désignons par P_i, $(i = 1, 2 \ldots, 12)$, les hypothèses (ou propositions) suivantes:

P_1: Quel que soit le tableaux ramifié T, la borne supérieure bT est atteinte dans T, c'est-à-dire T contient un sous-ensemble *dégénéré* ayant la puissance bT (*Hypothèse ou Postulat*[7]) *de ramification*);

P_2: Tout tableau ramifié *infini* a même puissance que l'un de ses sous-ensembles dégénérés[8]) (*Principe de réduction*);

(Ber. d. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. 58, 1906, p. 156); le dernier problème devient bien plus difficile si l'on exige que $p_1 E = \aleph_0$. Nous y reviendrons dans un travail sur les ensembles ordonnés homogènes (le „théorème sur les continus homogènes" de ma Note aux C. R. 198, 1934, p. 703, *est faux*; par conséquent, dans le „théorème sur le continu linéaire" (Ibidem), l'hypothèse A^1 doit être barrée).

6) Voir le § 2.

7) Cf. ce Postulat sur lequel est bâtie l'Analyse classique: La borne supérieure de tout ensemble borné de nombres réels est un nombre réel bien déterminé.

8) On voit que l'hypothèse P_2 est équivalente à l'hypothèse P_2' que voici: Pour qu'un T *non-dégénéré* soit *infini*, il faut et il suffit qu'il ait même puissance qu'un de ses sous-tableaux *dégénérés* (cf. la *définition* suivante de R. Dedekind: un ensemble est dit *infini* s'il a même puissance que l'un de ses sous-ensembles proprement dits).

P_3: T étant un tableau ramifié infini quelconque, il y a une famille de directions-éléments de T deux à deux non-radiales et ayant la puissance pT (*Principe de passage ramifié de n à $n+1$*)[9]);

P_4: $\mathfrak{T}$ étant un tableau ramifié infini quelconque d'ensembles, la famille $\mathfrak{T}^d$ a même puissance que l'une de ses sous-familles *disjonctives*[10]) (*Proposition fondamentale sur les tableaux ramifiés d'ensembles*;

P_5: Quel que soit l'ensemble ordonné infini E, il existe une famille *disjonctive* d'intervalles non-vides de E ayant la puissance p_1E (*Problème de la structure cellulaire d'ensembles ordonnés*[11]);

P_6: S étant une suite distinguée quelconque, toute ordonnance naturelle de S est un ensemble ordonné normal (*Premier principe d'inertie d'ordonnance naturelle de S*);

P_7: S étant une suite ramifiée distinguée quelconque, le *degré de cellularité*[11]) de toute ordonnance naturelle de S est

---

9) Voir le § 11·4.

10) $\mathfrak{T}^d$ désigne la famille des ensembles distincts qu'on obtient en adjoignant à $\mathfrak{T}$ les ensembles $A-B$, A, B parcourant les éléments de $\mathfrak{T}$ (cf. ma Note des C. R., 199, 1934 p. 112).

11) Soient E un espace de la classe (V) de M. Fréchet et $\mathcal{F}$ une famille quelconque de voisinages déterminant E ($\mathcal{F}$ s'appelle base *cellulaire* de E; *base ponctuelle* de E s'appelle tout sous-ensemble de E partout dense sur E); on convient que tout voisinage contient tout point auquel il est attaché. Alors, p_2E désignera la borne supérieure des $p\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ parcourant la classe des sous-familles disjonctives de $\mathcal{F}$. On voit que p_2E a une valeur bien déterminé ne dépendant pas du choix particulier de $\mathcal{F}$. Si l'on désigne par p_1E la borne inférieure des pF, F parcourant la famille des sous-ensembles de E partout denses sur E (les quantités p_1E, p_2E sont appellées respectivement *degré de séparabilité* [Fréchet] et *degré de cellularité* de E), on a ce *Problème de la structure cellulaire d'espaces abstraits*: A-t-on, pour tout espace E de la classe (V), $p_1E=p_2E$? (cf. la Note des C. R., 198, 1934 p. 884 ligne 12 en remontant où il faut supprimer partout l'indice). Si E est un espace distancié, on peut prouver que $p_1E=p_2E$ et que la borne p_2E est atteinte. Si E est un ensemble ordonné infini, on ne sait pas s'il y en a d'*anormaux*, c'est-à-dire tels que $p_1E>p_2E$. (On voit que la définition précédente de p_2E coïncide, dans ce cas, avec celle du § 7).

une même quantité identiquement bien déterminée[12]) (*Second principe d'inertie*);

P_8: Toute suite ramifiée distinguée S a même puissance que l'un de ses sous-ensembles disjonctifs;

P_9: Toute suite ramifiée distinguée admet une descente disjonctive;

P_{10}: S étant une suite ramifiée distinguée quelconque, il y a un sous-tableau T de S traversant S et tel que $S_T(\alpha)$, $(\alpha < \gamma S)$, soit une fonction rétractante (Pour les notations et terminologie, voir ci-dessus);

P_{11}: S étant une suite ramifiée quelconque, il y a un sous-tableau T de S ayant la puissance pS et ne contenant aucune suite distinguée de rang γS;

P_{12}: Soit T un tableau ramifié quelconque, dont le rang est un ordinal initial et régulier; si la puissance de tout sous-tableau disjonctif de T est $< p\gamma T$, le tableau T admet une descente monotone[13]) (cf. le théorème de réciprocité du § 9).

Théorème fondamental. *Les hypothèses $P_1, P_2, .. P_{12}$ sont, logiquement, deux à deux équivalentes.*

On va démontrer que $P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_{12} \to P_1$.

$P_1 \to P_2$ (voir les sections 4 et 5 du § 11).

$P_2 \to P_3 \to P_4$ (c'est évident).

$P_4 \to P_5$ (voir le § 12 C, section 2).

L'inclusion $P_5 \to P_6$ est un cas particulier de $P_4 \to P_5$.

$P_6 \to P_7$. C'est un cas particulier de $P_5 \to P_6$.

Pour $P_7 \to P_8$, voir le théorème 2.

---

12) La dernière phrase veut dire ceci: si la borne $p_2(oS)$ est atteinte pour *une ordonnance naturelle* oS de S, il en sera de même pour *toute autre*.

13) Rapprocher l'hypothèse P_{12} du *Principe de la descente* infinie de Fermat-Lusin en considérant des descentes d'ordre α quelconque, α n'étant pas nécessairement $< \omega + 1$ (Voir P. Tannery-Ch. Henry: Oeuvres de Fermat, t. II, 1894 p. 431 [lettre de Fermat à Carcavi]; et N. Lusin, C. R. 198 1934, p. 1119).

Quant à P_8 P_9, voir le théorème 9·5.

L'inclusion $P_9 \to P_{10}$ est évidente parce qu'il suffit de désigner par T l'ensemble des éléments d'une descente disjonctive quelconque de S.

$P_{10} \to P_{11}$. En effet, si P_{10} est vérifiée, on conclut, à la suite du lemme 2·2, que T a une rangée de puissance pS vérifiant l'hypothèse P_{11}.

L'inclusion $P_{11} \to P_{12}$ peut être prouvée comme suit: $P_{11} \to P_8$ (voir § 11·2), $P_8 \to P_2$ (c'est évident) et $P_2 \to P_{12}$ (lemme 2·2').

Enfin, en ce qui concerne $P_{12} \to P_1$, voir le § 11·3.

Théorème 3. Chacune des hypothèses P_i, $(i = 1 \,..\, 12)$ entraîne cette

Hypothèse (Q): *Quel que soit le tableau ramifié infini* T, *la puissance de la famille de tous les sous-ensembles dégénérés de* T *est supérieure à celle de* T [14]).

Sous l'hypothèse P_1, la puissance de la famille en question est, en effet, égale à $2^{bT} = 2^{pT}$ et est, par conséquent, $> pT$.

Théorème 4. *L'hypothèse* (Q) *et l'hypothèse* (G) *de G. Cantor* (voir le § 2) *entraînent, dans leur ensemble, chacune des hypothèses* P_i $(i = 1, \ldots, 12)$.

Problème 1. A-t-on $(G) \to (Q)$? et, par conséquent $(G) \to P_i$, $(i = 1, \,..\, 12)$?

Problème 2. A-t-on $P_1 \to (Q)$?

4. *Suites distinguées de seconde espèce*[15]). S sera dit *suite ramifiée distinguée de seconde espèce*, si l'on a ceci:

1° S est une suite ramifiée non-lacunaire [16]) dont le rang est un ordinal régulier et initial;

---

[14]) Cf. l'inégalité classique de Cantor: $2^{pT} > pT$.

[15]) Les suites distinguées définies dans le § 10·3 et considérées jusqu'à présent étant de première espèce.

[16]) Un tableau est non-lacunaire si la borne supérieure de tout sous-ensemble bien ordonné de T ayant le type ordinal $<_Y T$ est non-vide.

2° Tout noeud de S est infini et de puissance $< p\gamma S$; si $\gamma S = \omega_{\beta+1}$, la puissance de tout noeud de S est égale à $\aleph_\beta$.

S ayant la même signification, on prouve que:

a) $pS = \sum_{\alpha < p\gamma S} 2^{p\alpha}$; en particulier, si $\gamma S = \omega_{\beta+1}$, on aura $pS = 2^{\aleph_\beta} = pR_{\omega_\beta} S$;

b) Quel que soit le point a de S, le rang de $(a, .)_S$ est atteint;

c) Il y a une suite ramifiée S^0 telle que $\gamma S^0 = \gamma S + 1$ $pS^0 = pS$ et $(., \gamma S)_{S^0} = S$.

On en déduit facilement ce

Théorème 5. *Pour que* $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$, *il faut et il suffit qu'il existe au moins une suite ramifiée distinguée S de seconde espèce de rang* $\omega_{\beta+1}$, *et un sous-tableau T de S traversant S de telle manière que* $S = \sum_{a \in T} [a]_S$.

En terminant, nous exprimons la conviction que l'hypothèse de Cantor (G), et l'hypothèse de ramification (P_1) ne sont pas abordables par des méthodes et principes connus de la Théorie des ensembles. Sont-elles logiquement équivalentes entre elles? ou, sont-elles deux cas particuliers (et très intéressants par leur structure logique) d'un même principe, irréductible aux axiomes et principes usuels[17])?

---

[17]) Comparer ces deux énoncés particuliers:

Pour que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ il faut et il suffit qu'il existe *au moins une* suite distinguée S de seconde espèce de rang ω_1 et un sous-tableau T de S traversant S de manière que $S = \sum_{a \in T} [a]_S$.	Pour que le problème de Souslin admette une réponse affirmative, il faut et il suffit que *toute* suite ramifiée distinguée de rang ω_1 admette une descente disjonctive.

Remarquons ceci: La réponse affirmative, soit au premier, soit au second, soit au troisième problème miraculeux, entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin (nous ne savons pas sila réciproque subsiste). La réponse affirmative au problème de Souslin entraîne cette proposition: *Toute famille non-dénombrable de sous-ensembles bien ordonnés bornés de l'ensemble des nombres rationnels, contient une famille non-dénombrable dont aucun couple d'éléments n'est en relation d'inclusion au sens strict.* On ne sait pas si la réciproque est vraie! Il en serait ainsi si l'on pouvait prouver que *toute suite distinguée de rang ω_1 est semblable à un sous-ensemble de la suite* σ_0 que nous avons définie dans le § 10·2 (lemme 4).

Remarques (ajoutées après l'impression de tout ce qui précède).

1°. Quant au problème que nous avons posé à la fin du § 4, voir aussi M. A. Fraenkel (*Enseignement Math.*, 1935, pp. 32—51).

2° M. E. Zermelo (*Fund. Math.*, 25, 1935, p. 136.) considère aussi des tableaux ramifiés (voir encore l'Ouvrage cité de M. N. Lusin aussi bien que M. K. Menger, *Dimensionstheorie*, 1928, pp. 60—73).

3°. Il nous semble que le Premier problème miraculeux (donc le second aussi) pourra être résolu par l'affirmative en se servant des fonctionnelles de M. D. Hilbert (loc. cit. en Note 2·12), celles-ci nous permettant de définir *d'une manière uniforme et close*[18]) toute suite distinguée de rang ω_1, S[19]); dans se cas, le plus grand sous-ensemble dense en soi, Δ, de l'espace-tableau eS (v. le § 8·A·7) se prêterait à des considérations intéressantes.

4°. Il semble qu'en partant, en particulier, d'une suite distinguée de rang ω_1, S, on pourrait définir, en imitant la définition de l'opération (A) de Souslin—Lusin (où on se sert de la suite ramifiée $\sigma+s$ de rang $\omega+1$ du § 10·5), une certaine opération qui permettrait de rapprocher l'hypothèse de l'existence *d'une S anormale* de *l'hypothèse* que vient de formuler *M. N. Lusin* et d'après laquelle tout ensemble de nombres irrationnels ayant la puissance $\aleph_1$ est un complémentaire analytique (v. Fund. Math., 25, 1935, pp. 109—131). Dans cet ordre d'idées, une définition, due à M. Alexandroff, des complémentaires analytiques, jouerait un rôle important (v. Recueil Math., Moscou, 31, 1923 pp. 310—318).

---

[18]) Par exemple, les fractions continues

$$\cfrac{1}{a_0+\cfrac{1}{a_1+\cdots}}$$

(a_0, a_1 ... parcourant les entiers >0), font un schème de représentation *uniforme et close* de la totalité des nombres irrationnels entre 0 et 1.,

[19]) Au sein de la théorie des Ensembles de Cantor-Zermelo, une pareille représentation des S nous semble n'avoir aucun sens.

NOTATIONS[1])

$(.,a)$, $(.,a]$, (a,b), $[a,b]$, $(a,.)$, $[a,.)$: 1·5 et 8·A·6; $[a]$: 8·A·5; $(.,\alpha)_T$, $(.,\alpha]_T$: N8·16'; bT: 11·1; $b'T$: 11·4; γT: 8·A·9; $\gamma' T$: 8·A·11; eT: 8·A·7; $f(X)$: 12·A·2; $\varphi(A^1 A^2)$: 5·1; $\psi_{\mathcal{F}}$; 12·A·1; H_ξ: 5·5 et la Rem. 9·1: lE, LE: 3·VII; mT: 8·A·10; pE: N1·1; $p_i E$, $(i = 0,1,\cdots 5)$: 7·1; $R_\alpha T$: 8·A·9; sE, SE: 3·VII; σ_0: 9·5; σE: 10·2; $\sum \mathcal{F}$, $\sum' \mathcal{F}$: N1·2; $\mathfrak{T}^d$: 11·4; $\tau\alpha$: 2A et 2B; uE, vE, VE, wE: 3·VII.

INDEX[1])

Ambigu (Tableau), 8·A·11.
Alphabétiquement ordonné, 1·15.
Anti-limité, 1·7.
Atteint (Rang) 9.

Bipartition (complète), 12·A·2.
Borne supérieure (et inférieure), 1·7.
Borné supérieurement (et inférieurement), 1·7.

Coextensif, 1·13.
Complet (Développement), 8·B·2.
Complètement ramifié, 8·A·13.
Complexe de points, 5·1
Coïnitial, 1·13.
Confinal, 1·13.
Connexe (et mutuellement —), 1·9.
Continu, 1·12.
Coupure, 1·10.

Dégénéré (Ensemble ramifié), 8·A·4.
Degré (de cellularité), NC·11, (de séparabilité), NC·11.
Dense, 1·9, (en soi), 1·9, (Partout), 1·9.
Descente (dijonctive, monotone), 9.
Développement complet, 12·A·1.
Disjonctif, 8·A·2 et 8·A·4.
Disjonctive (Famille), 7·1.
Distinguée (Suite ramifiée), 10·3 et C·4·

---

[1]) Les numéros renvoient aux sections des §§ où figurent les définitions des expressions et symboles considérés; ainsi, par exemple, mT: 8·A·10 voudra dire que la définition de mT se trouve dans le numéro 10 de la section A du § 8. De plus, si la définition de X se trouve dans la Note q du § p, on écrira X: $Np{\cdot}q$. Enfin, la lettre C désignera le Complément.

E*nsemble* (disjonctif), 8·A·4, (ordonnée), 1·4, (bien ordonné), 1·8, (partielement ordonné), NC·1, (ramifié), 8·A·4 et NC·1, (ramifié dégénéré), 8·A·4.
Espace, (ordonné), 1·9, (-tableau), 8·A·7.
Etroit (Tableau), 8·A·11.

F*amille* (disjonctive), 7·1, (monotone), 4·1, (ramifiée), 8·B 1.
Fermé (Ensemble), 1·9.
Fonction rétractante, 2·3.

H*omogène* (Tableau), N10·3.
Hypothèse (de Cantor), 2·B, (de ramification), C·3, (P_i, $i=1, \ldots, 12$ et (Q)), C·3, (du continu), 2·B.

I*naccessible* (Nombre), 2·A.
Induction (linéaire, complète), 3·IV.
Inertie (d'ordonnance), C·2 et les hypothèses P_6, P_7.
Incompatibles (Relations), N8·2.
Incomparable, 1·14 et 8·A· 1.
Initial (Nombre), 2A2.
Isolé, 1·9.
Intercalation (latérale), 10·4, (longitudinale), 11·5.
Intervalle ((. , a), (a , .), (a, b,)), 1·5 et 8·A·6, ((. , α)τ), N8·16′.

L*acune*, 1·10, (intérieure), 1·10.
Lacunaire, 1·10, (Partout), 1·12.
Large (Saut), 4.3, (Tableau), 8·A·11.
Largeur (d'un tableau) 8·A·10.
Limité (Ensemble ordonné), 1·7.
Longueur, longueur réduite, 8·A·10.

M*onotone* (Ensemble, Famille), 4·1 et 8·A·4.

N*oeud*, 8·A·6, 8·A·13.
Nombre (ordinal, cardinal), 2·A, 2·B, (initial, régulier, singulier, inaccesible), 2·A·2.
Normal (Ensemble ordonné), 12·C·4, (Tableau), 11·1.

O*rdre* (Famille), 4·2.
Ordonnance (alphabétique), 1·15, (naturelle), 8·C·2, C·1.

P*ortion*, 1·6, 8·A·5, (élémentaires), 1·6.
Principe, (de l'induction linéaire, complète), 3·IV.
Propriété de Lebesgue-Khintchine, 3.IV.
Pseudo-rang γ·T (d'un tableau), 8·A·11.
Procédé σ, 10·2.
Problème (miraculeux, I, II, III), 10·4, N10·3′ et C·2, (de la structure cellulaire des espaces), NC·11.

R*amifié*, (V. Ensembles).
Rang, 8·A·9, (non-atteint), 9 et N10·5.
Rangée, 8·A·8 et 8·A·9.
Relation (de classification), 1·2, (de comparabilité), 8·A·1, (de disjonction), 8·A·2, (d'ordre, d'ordre inverse), 1·4, (d'ordre partiel), NC·1, (de ramification [dégénérée]), 8·A·3.

S*aut*, 1·11, (large), 4·3.
Saturée (Famille), 4·4.
Semblable, 1·14, 10·1.
Séparable N5·5.
Somme de relations, N8·3.
Suite ramifiée, 8·A·12, (distinguée), 10·3, C·4, (σ_0), 9·5, (prototypes) 9·3.

T*ableau ramifié*, 8·A·9, (d'ensembles), 8·B.
Totalement (ramifié), 8·A·13.
Type (d'ordre), 1·14, (de ramification), 10·1, (— limite d'un nombre), 2.
Traverser (un tableau), 9.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION, p. 1.

CHAPITRE I: ENSEMBLES ORDONNÉS DE POINTS

§ 1. Definitions générales p. 7; § 2. Sur les nombres transfinis: A. Nombres ordinaux p. 14; B. Nombres cardinaux, p. 17; § 3. Propriétés élémentaires des espaces et des ensembles ordonnés, p. 20; § 4. Familles monotones d'ensembles, p. 33; § 5. Systèmes de complexes de points, p. 43; § 6. Espaces abstraits et ensembles ordonnés, p. 51; § 7. Sur quelques puissances se rattachant à un ensemble ordonné p. 59.

CHAPITRE II: ENSEMBLES ET TABLEAUX RAMIFIÉS

§ 8. Généralités: A. Définition des ensembles et tableaux ramifiés, p. 67; B. Familles et tableaux ramifiés d'ensembles, p. 80; C. Systèmes de complexes. Représentation de tableaux ramifiés d'ensembles, p. 84; § 9. Descentes monotones et disjonctives, p. 89; § 10. Types de ramification. Suites distinguées. Premier problème miraculeux, p. 98; § 11. Nombres bT, $b'T$. Tableaux normaux, p. 104; § 12. Retour aux ensembles ordonnés. A. Notion de développement complet d'un ensemble ordonné p. 112; B. Tripartition complète d'un ensemble ordonné dense. Solution d'un problème de M. Sierpinski, p. 114; C. ϑ-partitions complètes des ensembles ordonnés continus. Ensembles ordonnés normaux, p. 118; D. Sur le continu linéaire et un problème de Souslin, p. 122.

COMPLÉMENT AUX RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

Notations. Index.

Table des matières.