PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 19 (33), pp. 17—24

FONCTIONS A COMPORTEMENT RÉGULIER ET CONVERGENCE UNIFORME

D. Aranđelović

(Communiqué le 21 novembre 1975)

0. Introduction

(0.1) Une fonction R à valeurs réelles $>o$, mesurable et définie dans un intervalle $[a, +\infty[(a>0)$ sur la droite réelle est dite à *comportement régulier* si la limite $\rho(t)=\lim_{x\to+\infty} R(xt)/R(x)$ existe pour tout $t>o$ (Karamata [1, 2])[1].

Une des propriétés fondamentales des fonctions à comportement régulier,

(0.2) *La limite* $\rho(t)$ *a lieu* uniformément *en* t *sur tout intervalle* $[a, b]$ $(o<a<b<+\infty)$ [3, Théorème 3],

a été généralisée dans [4, 5, 6] et sera généralisée dans cette note (2.1). Là a été généralisée la *fonction R* — ici sera précisée dans un certain sens la *convergence uniforme.* Nous considérerons le cas classique (0.1) et un cas extrêmement simple, intéressant par lui-même, du comportement régulier (contenu dans celui de [5] où l'on a considéré les applications d'un groupe topologique dans un autre).

Les théorèmes asymptotiques abeliens, tauberiens et merceriens couvrent une partie importante du domaine d'applications des fonctions à comportement régulier; un tel théorème abelien général (2.2) découlera immédiatement de (2.1).

1. Fonctions à comportement régulier

N o t a t i o n s (1.1) Dans tout ce qui suit on désignera par G le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels $>o$, le groupe additif $\mathbf{R}$ des nombres réels ou le groupe additif $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels ordonné par l'ordre usuel, muni de la topologie usuelle et de la mesure de Haar usuelle notée β[2]. La loi de composition sur G sera notée, sauf mention du contraire, multiplicativement. On écrira 1 pour l'élément neutre de G, et x^{-1} ou $1/x$ pour l'élément inverse de $x\in G$. Si f est une application de G dans un ensemble quelconque E, on notera $\check{f}$ l'application de G dans E définie par $\check{f}(x)=f(1/x)$.

---

[1]) Karamata supposait la fonction R continue.

[2]) Comme les groupes topologiques ordonnés $\boldsymbol{R}_+^*$ et $\boldsymbol{R}$ sont isomorphes, nous ne considérerons que $\boldsymbol{R}_+^*$.

$\hat{G}$ le groupe des homomorphismes continus de G dans $\mathbf{R}_+^*$

$\mathcal{F}$ la base du filtre des "voisinages de $+\infty$" dans G, formée des intervalles $[a, +\infty[= \{x \in G \mid x \geqslant a\}$ $(a \in G)$. Les relations de comparaison $\preccurlyeq$, $\prec\!\!\prec$ [3] et $\sim$ (en particulier la convergence) seront considérées *suivant* $\mathcal{F}$. On écrira, par exemple, $\lim f$ au lieu de $\lim_{\mathcal{F}} f$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ au lieu de $\lim_{x, \mathcal{F}} f(x)$.

Remarque (1.2) L'application $r \mapsto \rho$ de $\mathbf{R}$ dans $\hat{\mathbf{R}}_+^*$ définie par $\rho(x) = x^r (x \in \mathbf{R}_+^*)$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\hat{\mathbf{R}}_+^*$; de même, l'application $r \mapsto \rho$ de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\hat{\mathbf{Z}}$ définie par $\rho(x) = r^x (x \in \mathbf{Z})$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\hat{\mathbf{Z}}$. Par conséquent toute fonction ρ de $\hat{G}$ autre que la constante 1 est strictement monotone et tend vers $+\infty$ $(\rho \succ\!\!\succ 1)$ ou vers $o+$ $(\rho \prec\!\!\prec 1)$. L'ensemble $\hat{G}$ est donc une échelle de comparaison. Pour $\rho \in \hat{G}$, on a $\check{\rho} = 1/\rho$ et

$$\rho \prec\!\!\prec 1 \Leftrightarrow \rho(x) < 1 \text{ pour tout } x > 1 \Leftrightarrow \rho(x) > 1 \text{ pour tout } x < 1.$$

Définition (1.3) *Une fonction R à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, mesurable et définie dans un intervalle $[a, +\infty[$ dans G est appelée à* comportement régulier *(sur G) si la limite*

(1.3.1) $$\rho(t) = \lim_{x \to +\infty} \frac{R(xt)}{R(x)}$$

existe pour tout $t \in G$; la fonction ρ: $G \to \mathbf{R}_+^*$ est dite l'indice *de R. Une fonction à comportement régulier d'indice $\rho = 1$ est appelée à* comportement lent.

Remarque (1.4) Si G est le groupe $\mathbf{Z}$ noté additivement, l'existence de $\rho(t)$ pour tout $t \in \mathbf{Z}$ est équivalente à la convergence de la suite $(R(n+1)/R(n))$ vers un élément de $\mathbf{R}_+^*$.

Propriétés des fonctions à comportement régulier

Soit R une fonction à comportement régulier d'indice ρ. Alors

(1.5) $$\rho \in \hat{G}.$$

(1.6) *La convergence dans* (1.3.1) *a lieu* uniformément *en t sur tout ensemble compact de G.*

(1.7) *La fonction R est* localement logarithmiquement bornée *dans un intervalle $[a, +\infty[\subset G$.*

(1.8) $$\lim \chi R = \lim \chi\rho \text{ pour tout } \chi \text{ de } \hat{G} \text{ autre que } 1/\rho.$$

(1.9) *Pour tout σ et τ de $\hat{G}$ vérifiant $\sigma \prec\!\!\prec \rho \prec\!\!\prec \tau$, on a*

(1.9.1) $$\inf_{t \geqslant x} \check{\sigma}(t) R(t) \sim \check{\sigma}(x) R(x) \text{ et } \sup_{t \geqslant x} \check{\tau}(t) R(t) \sim \check{\tau}(x) R(x).$$

(1.10) *Il existe un $a \in G$ tel que, pour tout σ et τ de $\hat{G}$ vérifiant $\sigma \prec\!\!\prec \rho \prec\!\!\prec \tau$, on ait*

(1.10.1) $$\sup_{a \leqslant t \leqslant x} \check{\sigma}(t) R(t) \sim \check{\sigma}(x) R(x) \text{ et } \inf_{a \leqslant t \leqslant x} \check{\tau}(t) R(t) \sim \check{\tau}(x) R(x).$$

---

[3] Notations de Hardy. On écrit aussi (Bachmann-Landau) $f = 0(g)$ au lieu de $f \preccurlyeq g$ et $f = o(g)$ au lieu de $f \prec\!\!\prec g$.

R e m a r q u e (1.11) Réciproquement: si une fonction R à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, mesurable et définie dans un intervalle $[b, +\infty[$ dans G, vérifie (1.9) ou (1.10) avec un $\rho \in \hat{G}$, elle est à comportement régulier d'indice ρ.

2. Résultats

T h é o r è m e (2.1) *Soient R une fonction à comportement régulier d'indice ρ, σ et τ deux éléments de $\hat{G}$ tels que $\sigma \lll \rho \lll \tau$, $\nu = \min(\check{\sigma}, \check{\tau})$. Pour toute fonction complexe g localement bornée dans G vérifiant $\check{g} \leqslant \check{\sigma}$ on a*

(i) *Si* $\lim\cdot\sup |g|/R < +\infty$, *alors*

$$\lim_{x\to+\infty}\cdot\sup \sup_{t\in G} \nu(t) \frac{|g(xt)|}{R(x)} \leqslant \lim_{x\to+\infty}\cdot\sup \frac{|g(x)|}{R(x)} \tag{2.1.1}$$

(ii) *Si* $\lim g/R = c$, *alors*

$$\lim_{x\to+\infty} \sup_{t\in G} \nu(t) \left| \frac{g(xt)}{R(x)} - c\,\rho(t) \right| = o. \tag{2.1.2}$$

C o r o l l a i r e (2.2) *On conserve les notations R, ρ, σ, τ, ν de (2.1). Soient*

E l'espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$ (des nombres réels ou des nombres complexes) de toutes les fonctions h de G dans $\mathbf{K}$ telles que la fonction νh soit bornée dans G, muni de la norme

$$\|h\| = \sup_{x\in G} \nu(x)\,|h(x)|, \tag{2.2.1}$$

P une propriété d'une application de G dans $\mathbf{K}$ vérifiant

(2.2.2) *$P(\rho)$ est vraie pour tout ρ de $\hat{G}$.*

(2.2.3) *Si $P(g)$ est vraie, $P(ag)$ est vraie pour tout a de $\mathbf{K}$.*

(2.2.4) *Si $P(g)$ est vraie, $P(T_x g)$ est vraie pour tout x de G où $T_x g(t) = g(xt)$ pour $t \in G$,*

F le sous-espace de l'espace métrique E, formé d'applications h de E possédant la propriété P,

U une application continue de F dans $\mathbf{K}$.

Alors, pour toute fonction g à valeurs dans $\mathbf{K}$ localement bornée dans G vérifiant $P(g)$ et $\check{g} \leqslant \check{\sigma}$, de $\lim g/R = c$ découle

$$\lim_{x\to+\infty} U\left(\frac{T_x g}{R(x)}\right) = U(c\,\rho). \tag{2.2.5}$$

De $P(g)$, (2.2.3) et (2.2.4) il résulte que les fonctions $g_x = T_x g/R(x)$ $(x \in G)$ possèdent la propriété P; la fonction $c\,\rho$ la possède aussi (2.2.2), (2.2.3). Comme la fonction U est continue dans F, il suffit, pour obtenir (2.2.5), de montrer qu'il existe un $x_0 \in G$ tel que $g_x \in E$ pour $x \geqslant x_0$ et que g_x converge vers $c\,\rho$ dans E lorsque $x \to +\infty$. Ceci découle immédiatement de (2.1).

Exemples. — (2.3) Soit $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, $P(g)$ vrai pour toute application g de G dans $\mathbf{R}$ (i.e. $F=E$), $w=\max(\sigma, \tau)$, f une fonction réelle dans G telle que la fonction fw soit bornée dans G, et soit

$$U(h)=\sup_G fh \tag{2.3.1}$$

pour $h\in E$. De $v=\min(\check{\sigma}, \check{\tau})=\min(1/\sigma, 1/\tau)=1/\max(\sigma, \tau)=1/w$ il résulte $|U(h)-U(k)|\leqslant \sup_G|f||h-k|=\sup_G|f|wv|h-k|\leqslant(\sup_G|f|w)\|h-k\|$ pour h et k de E; par suite, la fonction U est continue dans E et la relation (2.2.5) s'écrit sous la forme

$$\lim_{x\to+\infty}\sup_{t\in G} f(t)\frac{g(xt)}{R(x)}=\sup_{t\in G} cf(t)\rho(t) \tag{2.3.2}$$

qui généralise (1.9.1) et (1.10.1). Pour obtenir, par exemple, la deuxième relation (1.9.1) il suffit de prendre un $a\in G$ tel que la fonction R soit localement bornée dans $[a, +\infty[$ et de poser $f(t)=o$ pour $t<1$, $=\check{\tau}(t)$ pour $t\geqslant 1$ et $g(t)=o$ pour $t<a$, $=R(t)$ pour $t\geqslant a$. Alors: la fonction fw, ne prenant que les valeurs o (pour $t<1$) et 1 (pour $t\geqslant 1$), est bornée dans G; la fonction g est localement bornée dans G, $\check{g}\leqslant\check{\sigma}$ (puisque $\check{g}(t)=o$ pour $t>1/a$) et $\lim g/R=1$. En supposant $x\geqslant a$, on obtient enfin

$$\sup_{t\geqslant x}\frac{\check{\tau}(t)R(t)}{\check{\tau}(x)R(x)}=\sup_{t\geqslant 1}\frac{\check{\tau}(xt)R(xt)}{\check{\tau}(x)R(x)}=\sup_{t\geqslant 1}\check{\tau}(t)\frac{R(xt)}{R(x)}=\sup_{t\in G} f(t)\frac{g(xt)}{R(x)}$$
$$\to \sup_{t\in G} f(t)\rho(t)=\sup_{t\geqslant 1}\check{\tau}(t)\rho(t)=1 \quad (x\to+\infty).$$

(2.4) Soit $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, $P(g)$ la propriété "g est β-mesurable", $w=\max(\sigma, \tau)$, f une fonction complexe dans G telle que la fonction fw soit β-intégrable, et soit

$$U(h)=\int_G fh\,d\beta \tag{2.4.1}$$

pour tout $h\in F$. De $|U(h)|=\left|\int_G fwvh\,d\beta\right|\leqslant\left(\int_G|f|w\,d\beta\right)\|h\|$ il résulte que l'application linéaire U est continue dans F. La relation (2.2.5) s'écrit sous la forme bien connue [7, Théorème 6]

$$\lim_{x\to+\infty}\int_G f(t)\frac{g(xt)}{R(x)}d\beta(t)=c\int_G f(t)\rho(t)\,d\beta(t). \tag{2.4.2}$$

3. Démonstrations

Il faut démontrer les propriétés (1.5)−(1.10) des fonctions à comportement régulier et le théorème (2.1). Les propriétés mentionnées sont bien connues si $G=\mathbf{R}_+^*$ [1, 2, 3]. Si $G=\mathbf{Z}$, (1.5)−(1.7) découlent immédiatement de la définition (1.3).

Démonstration de (1.8)−(1.10) dans le cas où $G=\mathbf{Z}$. Notons le groupe $\mathbf{Z}$ additivement.

(3.1) Démonstration de (1.8). Soient x et r deux nombres réels $>o$ tels que $\rho(n)=r^n$, $\chi(n)=x^n$ pour $n\in\mathbf{Z}$ (1.2). La définition (1.3) entraîne $\lim\chi(n+1)R(n+1)/\chi(n)R(n)=xr$; on en conclut que la suite χR est strictement monotone pour n assez grand: croissante si $xr>1$, décroissante si $xr<1$.

Il existe donc $\lim \chi R = \alpha \in [0, +\infty]$. De $\alpha = \lim \chi(n+1) R(n+1) = xr \lim \chi(n) R(n) = = xr\alpha$ il résulte que $\alpha = o$ pour $xr < 1$, $= +\infty$ pour $xr > 1$, ce qui achève la démonstration (d'après (1.2)).

(3.2) D é m o n s t r a t i o n d e (1.9). Supposons l'entier rationnel N tel que la suite $\check{\sigma} R$ soit croissante et la suite $\check{\tau} R$ décroissante pour $n \geqslant N$ (3.1). Pour ces valeurs de n on a $\inf_{k \geqslant n} \check{\sigma}(k) R(k) = \check{\sigma}(n) R(n)$ et $\sup_{k \geqslant n} \check{\tau}(k) R(k) = = \check{\tau}(n) R(n)$, d'où la conclusion.

(3.3) D é m o n s t r a t i o n d e (1.10). Choisissons un entier rationnel m de sorte que $R(n) > o$ pour $n \geqslant m$. En vertu de (1.9), il suffit de prouver que

(3.3.1) $\inf\limits_{k \geqslant n} \check{\sigma}(k) R(k) \sim \check{\sigma}(n) R(n)$ entraîne $\sup\limits_{m \leqslant k \leqslant n} \check{\sigma}(k) R(k) \sim \check{\sigma}(n) R(n)$,

(3.3.2) $\sup\limits_{k \geqslant n} \check{\tau}(k) R(k) \sim \check{\tau}(n) R(n)$ entraîne $\inf\limits_{m \leqslant k \leqslant n} \check{\tau}(k) R(k) \sim \check{\tau}(n) R(n)$.

Remarquons en premier lieu que la fonction $1/R$ est à comportement régulier d'indice $1/\rho$, que $1/\tau \in \hat{G}$ et $1/\tau \prec\!\!\prec 1/\rho$. Remplaçant R par $1/R$ et σ par $1/\tau$ dans (3.3.1), on en obtient la relation équivalente

$$\inf_{k \geqslant n} \frac{1}{\check{\tau}(k) R(k)} \sim \frac{1}{\check{\tau}(n) R(n)} \text{ entraîne } \sup_{m \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\check{\tau}(k) R(k)} \sim \frac{1}{\check{\tau}(n) R(n)}$$

étant évidemment équivalente à (3.3.2), d'où l'équivalence de (3.3.1) et (3.3.2). Il suffit donc de prouver (3.3.1). Démontrons d'abord le lemme suivant:

(3.3.3). *Soient f et g deux suites des nombres réels > 0 définies dans un intervalle $[m, +\infty[$ dans* $\mathbf{Z}$, *et soit* $\lim g = +\infty$. *Alors*

$$f(n) \sim g(n) \text{ entraîne } \sup_{m \leqslant k \leqslant n} f(k) \sim \sup_{m \leqslant k \leqslant n} g(k).$$

Posons $h(n) = \sup_{m \leqslant k \leqslant n} f(k) / \sup_{m \leqslant k \leqslant n} g(k)$ pour $n \geqslant m$. On déduit de $f \sim g$ et $\lim g = +\infty$ que l'on a $\sup_{m \leqslant k \leqslant n} f(k) \sim \sup_{M \leqslant k \leqslant n} f(k)$ et $\sup_{m \leqslant k \leqslant n} g(k) \sim \sim \sup_{M \leqslant k \leqslant n} g(k)$ pour tout $M \geqslant m$, donc aussi $\lim \cdot \sup h(n) = \lim \cdot \sup_{n \to +\infty} \sup_{M \leqslant k \leqslant n} f(k) / \sup_{M \leqslant k \leqslant n} g(k) \leqslant \sup_{k \geqslant M} (f/g)(k)$, d'où $\lim \cdot \sup h(n) \leqslant 1$. En échangeant les rôles de f et g, on obtient, d'après ce qui précède $\lim \cdot \sup 1/h(n) \leqslant 1$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Posons maintenant $h(n) = \inf_{k \geqslant n} \check{\sigma}(k) R(k)$ pour $n \geqslant m$. On a alors $\lim h = = \lim \cdot \inf \check{\sigma} R = \lim \check{\sigma} R = \lim \check{\sigma} \rho = +\infty$ (1.8). En appliquant le lemme précédent, on voit que $h(n) \sim \check{\sigma}(n) R(n)$ entraîne

$$\sup_{m \leqslant k \leqslant n} \hat{\sigma}(k) R(k) \sim \sup_{m \leqslant k \leqslant n} h(k) = h(n) \sim \check{\sigma}(n) R(n).$$

(3.4) D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e (2.1). Remarquons d'abord que $v(t) = \min(\check{\sigma}(t), \check{\tau}(t)) = \check{\sigma}(t)$ si $t \leqslant 1$, $= \check{\tau}(t)$ si $t \geqslant 1$ (1.2).

Soit $A \in G$ tel que la fonction R soit localement logarithmiquement bornée dans $[A, +\infty[$ (1.7), et soient, pour $x \geqslant A$,

$$S(x) = \sup_{A \leqslant t \leqslant x} \check{\sigma}(t) R(t), \quad T(x) = \sup_{t \geqslant x} \check{\tau}(t) R(t).$$

La fonction $\check{g}/\check{\sigma}$, étant bornée dans un voisinage de $+\infty$ (par l'hypothèse) et localement bornée dans G (comme le produit de deux fonctions localement bornées dans G), est bornée dans chaque intervalle $[a, +\infty[$ dans G; par suite, la fonction $\check{\sigma} g = (\check{g}/\check{\sigma})^{\check{}}$ est bornée dans chaque intervalle $]\leftarrow, a] = \{x \in G \mid x \leqslant a\}$. Le même raisonnement montre que la fonction g/R est bornée dans $[A, +\infty[$. Posons

$$M(a) = \sup_{x \leqslant a} \check{\sigma}(x) |g(x)|, \quad N(a) = \sup_{x \geqslant a} \frac{|g(x)|}{R(x)} \quad \text{pour } a \geqslant A.$$

(i) Supposons $x \geqslant a \geqslant A$. En considérant les cas: 1° $t \leqslant 1$, $xt \leqslant a$, 2° $t \leqslant 1$, $xt \geqslant a$ et 3° $t \geqslant 1$, on a

$$v(t) \frac{|g(xt)|}{R(x)} =$$

1° $$\check{\sigma}(t) \frac{|g(xt)|}{R(x)} = \frac{\check{\sigma}(xt) |g(xt)|}{\check{\sigma}(x) R(x)} \leqslant \frac{M(a)}{\check{\sigma}(x) R(x)},$$

2° $$\check{\sigma}(t) \frac{|g(xt)|}{R(x)} \leqslant \frac{\check{\sigma}(xt) N(a) R(xt)}{\check{\sigma}(x) R(x)} \leqslant N(a) \frac{S(xt)}{\check{\sigma}(x) R(x)} \leqslant N(a) \frac{S(x)}{\check{\sigma}(x) R(x)},$$

3° $$\check{\tau}(t) \frac{|g(xt)|}{R(x)} \leqslant \frac{\check{\tau}(xt) N(a) R(xt)}{\check{\tau}(x) R(x)} \leqslant N(a) \frac{T(xt)}{\check{\tau}(x) R(x)} \leqslant N(a) \frac{T(x)}{\check{\tau}(x) R(x)},$$

d'où

$$\sup_{t \in G} v(t) \frac{|g(xt)|}{R(x)} \leqslant \max \left\{ \frac{M(a)}{\check{\sigma}(x) R(x)},\ N(a) \frac{S(x)}{\check{\sigma}(x) R(x)},\ N(a) \frac{T(x)}{\check{\tau}(x) R(x)} \right\},$$

et par suite, d'après (1.8), (1.10) et (1.9),

$$\lim_{x \to +\infty} \cdot \sup \sup_{t \in G} v(t) \frac{|g(xt)|}{R(x)} \leqslant N(a).$$

On en obtient (2.1.1) lorsque $a \to +\infty$.

(ii) Si $t < A/x \leqslant 1$, alors $v(t) = \check{\sigma}(t)$ et par suite

$$v(t) \left| \frac{g(xt)}{R(x)} - c\rho(t) \right| \leqslant \frac{\check{\sigma}(xt) |g(xt)|}{\check{\sigma}(x) R(x)} + |c| \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{1}{t} \right)$$

$$\leqslant \frac{M(A)}{\check{\sigma}(x) R(x)} + |c| \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{x}{A} \right) \to 0 \qquad (x \to +\infty),$$

d'après (1.8). On peut donc supposer $t \geqslant A/x$. Pour ces valeurs de t on a

$$v(t) \left| \frac{g(xt)}{R(x)} - c\rho(t) \right| =$$

$$= v(t) \left| \frac{g(xt)}{R(xt)} \frac{R(xt)}{R(x)} - \frac{g(xt)}{R(xt)} \rho(t) + \frac{g(xt)}{R(xt)} \rho(t) - c\rho(t) \right|$$

$$\leqslant N(A)\,\nu(t)\left|\frac{R(xt)}{R(x)}-\rho(t)\right|+\nu(t)\,\rho(t)\left|\frac{g(xt)}{R(xt)}-c\right|$$

$$=N(A)\,h(x,t)+k(x,t);$$

d'où l'on voit qu'il suffit de montrer

a) $\lim\cdot\sup\limits_{x\to+\infty}\ \sup\limits_{t\geqslant A/x} h(x,t)=0$ et b) $\lim\cdot\sup\limits_{x\to+\infty}\ \sup\limits_{t\geqslant A/x} k(x,t)=0.$

a) Soit $u\in G$ et $u\geqslant 1$. En majorant h dans les cas 1° $A/x\leqslant t\leqslant 1/u$, 2° $t\geqslant u$ et 3° $1/u\leqslant t\leqslant u$, on obtient:

$h(x,t)\leqslant$

1° $$\check{\sigma}(t)\frac{R(xt)}{R(x)}+\check{\sigma}\rho(t)=\frac{\check{\sigma}(xt)\,R(xt)}{\check{\sigma}(x)\,R(x)}+\frac{\sigma}{\rho}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\leqslant\frac{S(x/u)}{\check{\sigma}(x/u)\,R(x/u)}\ \frac{\sigma(u)\,R(x/u)}{R(x)}+\frac{\sigma}{\rho}(u)$$

2° $$\check{\tau}(t)\frac{R(xt)}{R(x)}+\frac{\rho}{\tau}(t)\leqslant\frac{T(xu)}{\check{\tau}(xu)\,R(xu)}\ \frac{\check{\tau}(u)\,R(xu)}{R(x)}+\frac{\rho}{\tau}(u)$$

3° $$\{\sup_{1/u\leqslant t\leqslant u}\nu(t)\}\ \sup_{1/u\leqslant t\leqslant u}\left|\frac{R(xt)}{R(x)}-\rho(t)\right|.$$

De 1° et (1.10), 2° et (1.9), 3° et (1.6), il résulte

$$\lim\cdot\sup_{x\to+\infty}\ \sup_{t\geqslant A/x} h(x,t)\leqslant 2\max\left\{\frac{\sigma}{\rho}(u),\ \frac{\rho}{\tau}(u)\right\}$$

d'où la conclusion (lorsque $u\to+\infty$).

b) En majorant k dans les cas 1° $A/x\leqslant t\leqslant 1/\sqrt{x}$ et 2° $t>1/\sqrt{x}$ (où $\sqrt{x}$ est la solution unique de l'équation $t\cdot t=x$ dans G), on obtient pour $x\geqslant\max(A,1)$

$k(x,t)\leqslant$

1° $$\frac{\sigma}{\rho}\left(\frac{1}{t}\right)\left|\frac{g(xt)}{R(xt)}-c\right|\leqslant\frac{\sigma}{\rho}(\sqrt{x})\,(N(A)+|c|),\quad 2°\ \ 1\cdot\sup_{t\geqslant\sqrt{x}}\left|\frac{g(t)}{R(t)}-c\right|$$

(car $\nu\rho=\min(\rho/\sigma,\rho/\tau)\leqslant 1$) et, pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que $\lim\sqrt{x}=+\infty$.

RÉFÉRENCES

[1] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière des fonctions.* Mathematica (Cluj) 4 (1930), 38—53.

[2] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière, Théorèmes fondamentaux,* Bull. Soc. Math. France 61 (1933), 55—62.

[3] J. Korevaar, T. Van Aardenne-Ehrenfest, N. G. De Bruijn, *A note on slowly oscillating functions*, Nieuw Arch Wisk. (2) 23 (1949), 77—86.

[4] R. Bojanić, J. Karamata, M. Vuilleumier, *A contribution to the Asymptotic Analysis in lattice-ordered groups*, MRC Report 329, Univ. of Wisconsin, Madison, 1962.

[5] B. Bajšanski, J. Karamata, *Regularly varying functions and the principle of equicontinuity*, MRC Report 517, Univ. of Wisconsin, Madison, 1964. (ou Publ. Ramanujan Inst. № 1 (1968/69), 235—246).

[6] B. Bajšanski, *The asymptotic behavior of the n^{th} order difference*, Enseignement Math. 15 (1969), 29—41.

[7] S. Aljančić, R. Bojanić, M. Tomić, *Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales*, Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. 7 (1954), 81—94.

Novi Beograd, Yougoslavie
Omladinskih brigada 212/21.