PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 19 (33), 1975, pp. 181—187

ÜBER GEWISSE VEKTORRÄUME PSEUDOHOLOMORPHER FUNKTIONEN

Claudio I. Withalm

(Eingegangen am 27. Mai 1974)

Die algebraische Struktur der pseudoholomorphen Funktionen unterscheidet sich von der der holomorphen Funktionen insofern wesentlich, als jene modulo eines bestimmten Erzeugendenpaares einen additiven Vektorraum über **R** darstellt. Nach Feststellung einiger Aussagen [8] über die Verträglichkeit der Produktbildung als Abbildung in Vektorräume pseudoholomorpher Funktionen und über eine gewisse dabei erzeugte Mehrdeutigkeit im Zusammenhang mit dem Ähnlichkeitsprinzip, soll es Gegenstand der Untersuchungen sein, solche Klassen pseudoholomorpher Funktionen zu betrachten, die unter bestimmten Erweiterungen Algebren erzeugen, und für welche eine einfache Abbildung in den durch einen Hauptzweig [7] charakterisierten Vektorraum existiert.

1. Einführung. Bevor wir uns gewissen Erweiterungen bestimmter Klassen pseudoholomorpher Funktionen zuwenden, wollen wir noch einige wichtige Funktionenräume einführen.

Es sei $D_0 \subset \mathbf{C}$ ein (endliches) Gebiet und H^1 die Klasse der über D_0 erklärten komplexwertigen Funktionen, die bis zu den partiellen Ableitungen erster Ordnung nach x und y hölderstetig sind; dann sei

$$E_{D_0}: =\{E=(F:G);\ E:D_0\rightarrow \mathbf{C}\times\mathbf{C},\quad \forall z\in D_0: E\in H^1\times H^1 \text{ und } \forall z\in D_0: \operatorname{Im}(\overline{F}\cdot G)>0\};$$

E_{D_0} heißt Erzeugendenraum, jedes Element E von E_{D_0} heißt ein Erzeugendenvektor.

Es sei $D \subset\subset D_0$ [1] ein Gebiet; dann sei

$$\Omega_D: =\{\omega=\binom{\Phi}{\psi};\ \omega: D\rightarrow \mathbf{E}_2\};\ ^{2)}$$

Ω_D erweist sich als additiver Vektorraum über **R**.

$P_D(E): =E\cdot\Omega_D$ heißt die Menge der in D erklärten pseudoholomorphen

[1] $D\subset\subset D_0: \Leftrightarrow D_0$ ist ein Gebiet und $\overline{D}\subset D_0$.

[2] E_2 ist der zweidimensionale Euklidische Raum.

Funktionen w modulo E genau dann, wenn

$$\forall z_0 \in D \; \frac{d(E)}{dz} w(z_0) := \dot{w}(z_0) := \lim_{z \to z_0} E(z) \frac{\omega(z) - \omega(z_0)}{z - z_0}$$

eigentlich vorhanden ist. Falls $P_D(E)$ existiert, ist diese Menge ein additiver Vektorraum über $\mathbf{R}$.

$w = E\omega = F\Phi + G\psi$ heißt nach Bers [1, Seite 6, 25], [2, Seite 219, 220] eine pseudoholomorphe Funktion erster Art, und für $A := (1\ i)$ heißt $A\omega = \Phi + i\psi$ die $(1-1)$ korrespondierende pseudoholomorphe Funktion zweiter Art mod E. Ist speziell $E = A \in E_{D_0}$, so ist $A\omega$ holomorph in D; wir erklären daher

$$P_D(A) := \{w = A\omega;\ w \text{ ist holomorph in } D \subset\subset D_0\}.$$

Wie beim Beweis der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen folgt aus der Existenz von $\dot{w}$

$$w \in H^1, \quad E\omega_{\bar{Z}} = 0, \quad E\omega_Z = \dot{w}$$

Es ist $P_D(E)$ ein Vektorraum über $\mathbf{R}$ hinsichtlich der Addition; wir wollen nun das n-tupel $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ als Element des Produktraumes $P_D(E^1) \times P_D(E^n) \times \times \cdots \times P_D(E^n) = \prod_{\nu=1}^{n} P_D(E^\nu)$ interpretieren und mit N_i die Nullstellenmenge von $w_i = E^i\omega^i$ in D bezeichnen.

Hilfssatz 1. *Die Abbildungen*

$$\Phi_i : \prod_{\nu=1}^{n} P_D(E^\nu) \ni (w_1, \ldots, w_i) \to \prod_{\nu=1}^{n} w_\nu \in P_{D \setminus N^i}(\tilde{E}^i)$$

existieren und sind Epimorphismen, wobei $\forall i \in \{1, \ldots n\}$

$$N^i := \bigcup_{\nu=1}^{n} N_\nu \setminus N_i \quad \textit{und} \quad \tilde{E}^i := (E^i/w_i) \cdot \prod_{\nu=1}^{n} w_\nu \;{}^{1)}$$

bedeuten möge.

Im Produkt $w := \prod_{\nu=1}^{n} w_\nu$ kann also jeder der Faktoren $w_\nu = E^\nu\omega^\nu$ als Erzeugendenfunktion gewählt werden; je nach Festsetzung dieser Auswahlfunktion $w_i = E^i\omega^i$ wollen wir diesem Umstand durch einen vor w gestellten Index (E^i) Rechnung tragen. Dabei bezeichnen wir in der Äquivalenz

$$\forall i \in \{1, \ldots n\} \; \forall z \in D \setminus N^i \; w = \prod_{\nu=1}^{n} w_\nu \in P_{D \setminus N^i}(\tilde{E}^i) \Leftrightarrow w \equiv {}_{(E^i)}w$$

${}_{(E^i)}w$ als i-ten Zweig von w. Wertemäßig ist $\forall i, j \in \{1, \ldots n\}\; {}_{(E^i)}w = {}_{(E^j)}w$, im allgemeinen impliziert das aber nicht die Gleichheit von

$${}_{(E^i)}\dot{w} = \frac{d_{(E^i)}w}{dz} \quad \text{und} \quad {}_{(E^j)}\dot{w} = \frac{d_{(E^j)}w}{dz}.$$

---

1) Die Auswahlfunktion w_i heißt Erzeugendenfunktion; zum Beweis siehe [8, Satz 1]

Unter der vollen Ableitung $\dot{w}$ von $w = \prod_{\nu=1}^{n} w_\nu$ wollen wir die Summe aller Zweige $_{(E^i)}\dot{w}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, verstehen; dann gilt

$$\dot{w}/w = \sum_{\nu=1}^{u} \dot{w}_\nu / w_\nu,$$

welche Gleichung formal der Ableitungsregel eines Produktes analytischer Funktionen entspricht.

Das Ähnlichkeitsprinzip [1, Seite 21,70], [7, Seite 606] besagt, daß es für $w = E\omega \in P_D(E)$ eine auf $\overline{D}$ gleichmäßig stetige und beschränkte Funktion s mit

$$-s(z) := \frac{1}{\Pi} \int\limits_{D \ni \zeta = \xi + i\eta} \frac{a(\zeta) + b(\zeta)\,(\overline{w}(\zeta)/w(\zeta))}{\zeta - z}\, d\xi \wedge d\eta,$$

wobei unter $E = (F\; G)$

$$a := -\frac{\overline{F}G_{\overline{Z}} - F_{\overline{Z}}\overline{G}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \quad b := \frac{FG_{\overline{Z}} - F_{\overline{Z}}G}{F\overline{G} - \overline{F}G} \;{}^{1)}$$

sogenannte charakteristische Koeffizienten sind [1, Seite 5], [7, Seite 215], und eine in D holomorphe Funktion f gibt, sodaß $w = e^s f$. Ist w und somit auch f in D beschränkt, so gilt

Hilfssatz 2.

$$\left.\begin{matrix}\Phi_w\\ \Phi_f\end{matrix}\right\} : P_D(E) \times P_D(A) \ni (w,\ 1/f) \to \left\{\begin{matrix} _{(E)}e^s \in P_D(E/f) \\ _{(A)}e^s \in P_D(Aw)\end{matrix}\right.$$

sind Epimorphismen. [2)]

Der Beweis folgt unmittelbar aus Hilfssatz 1. [8, Satz 2] e^s hat also die beiden Zweige $_{(E)}e^s$ und $_{(A)}e^s$. Für $f \equiv \text{const}$ ist die Aussage trivial; Vekua [4, Seite 127] nennt w dann eine verallgemeinerte Konstante.

Allgemeiner heißt $w = E\gamma$ mit komponentenweise konstantem γ eine verallgemeinerte Konstante mod E.

Für die Ableitungen gilt

$$({}_{(E)}e^s)^\cdot = e^s\,(\dot{w}/w), \quad ({}_{(A)}e^s)^\cdot = e^s\,(-f'/f),$$

wir definieren daher

$$_{(E)}\dot{s} := \dot{w}/w, \quad _{(A)}\dot{s} := -f'/f \;{}^{3)}$$

Dann können wir der vollen Ableitung des Produktes $w = \prod_{\nu=1}^{n} w_\nu$ die Darstellung

$$\dot{w}/w = \prod_{\nu=1}^{n} \dot{w}_\nu / w_\nu = \prod_{\nu=1}^{n} {}_{(E^\nu)}\dot{s}$$

verleihen.

---

1) $E\omega_{\overline{Z}} = 0 \Leftrightarrow w_{\overline{Z}} = aw + b\overline{w}$

2) Die Erklärung von s bringt es mit sich, daß D nicht eingeschränkt werden braucht.

3) $s = \log w - \log f$

2. Spezielle Vektorräume. Es sei $w \in P_D(E)$, so ist die Aussage des Ähnlichkeitsprinzips, daß w als Produkt einer in D holomorphen Funktion f und der Exponentialfunktion e^s mit beschänktem und gleichmäßig stetigem s darstellbar ist. Es ist zweckmäßig, den Vektor $S := (e^s \; ie^s)$ einzuführen.

Hilfssatz 3. *$w \in P_D(E)$ habe gemäß dem Ähnlichkeitsprinzip die Darstellung $e^s f$; ist $e^s \in H^1$, so ist $w \in P_D(S)$* [1].
Ist $w \in P_D(E)$, und $w \in P_D(S)$ so soll ${}_{(S)}w$ der Hauptzweig von w heißen; wir wollen dann anch sagen, w nehme seinen Hauptzweig an.

Folgesatz 1. *Nimmt $w \in P_D(E)$ seinen Hauptzweig $w = e^s f \in P_D(S)$ an, so gilt ${}_{(S)}\dot{w} = e^s f'$ und es verschwindet die volle Ableitung von s.* [2]
Es sei $P_D*(E) := \{w \in P_D(E);\ \dot{w}/w \in \mathbf{R}\}$ und es sei $P_D{}^{\circ}(E)$ ein Vektorraum in $P_D*(E)$, so wissen wir aus [8], daß in $P_D{}^{\circ}(E)\,{}_{(E)}\dot{s}_i = {}_{(E)}\dot{s}_j$ gilt.

Satz 1. *In $P_D{}^0(E)$ ist ${}_{(E)}\dot{s}\,i = {}_{(E)}\dot{s}\,j = 0$.* [3]

Beweis: Aus $w_1,\ w_2 \in P_D{}^0(E)$ folgt $\dot{w}_1/w_1 = \dot{w}_2/w_2$, also $w_1 = w_2\lambda,\ \dot{w}_1 = \dot{w}_2\lambda$, ist dann $w_2 = E\omega^2$, so folgt aus $w_1 = (E\lambda)\,\omega^2$ und $\dot{w}_1 = (E\lambda)\,\omega^2{}_Z,\ w_1 \in P_D{}^0(\lambda E)$, also $\lambda \equiv 1$. Ist λ reellwertig, so ist $\dot{w}_1 = E(\lambda\omega^2{}_Z + \lambda_Z\,\omega^2)$, also $\lambda \in \mathbf{R}$. $P_D{}^0(E)$ ist also nur dann nicht trivial, wenn ${}_{(E)}\dot{s} = 0$ und wir für das neutrale Element $w_0 = E\omega^0$ mit $\omega^0 = \binom{0}{0}$ noch ${}_{(E)}\dot{s}_0 = 0$ definieren.

Folgesatz 2. *$P_D{}^0(E)$ enthält alle verallgemeinerten Konstanten modulo E so wie gegebenenfalls das Element $w = E\omega$ mit $\omega_Z = E^{\perp}$.*

Beweis. Nach Satz 1 folgt aus $w = E\omega = e^s f \in P_D{}^0(E)$ die Beziehung ${}_{(E)}\dot{s} = \dot{w}/w = 0$; sie ist erfüllt, wenn $w = E\omega \equiv E\gamma$ eine verallgemeinerte Konstante ist oder in $\dot{w} = E\omega_Z$ der Differentialausdruck ω_Z gerade der zu E orthogonale Vektor ist.
Es sei $P_D{}^f(E) := \{w \in P_D(E);\ \dot{w}_i/w_j = f \in P_D(A)\}$; dann ist $P_D{}^f(E)$ ein Vektorraum über $\mathbf{R}$ und $P_D{}^0(E)$ ist ein Teilraum von $P_D{}^f(E)$.

Satz 2. *In $P_D{}^f(E) \setminus P_D{}^0(E)$ ist $w_i/w_j \in P_D(A)$.*

Beweis. Es sei $w_i = e^s if_i$ [4], so ist ${}_{(E)}\dot{s}_i\, w_i/w_j = f$ mit ${}_{(E)}\dot{s}_i \in P_D(A)$ nach Voraussetzung; für ${}_{(E)}\dot{s}_i \neq 0$ ist dann $w_i/w_j = f/{}_{(E)}\dot{s}_i$.

Folgesatz 3. *Für $n = i, j$ sei $w_n \in P_D{}^f(E) \setminus P_D{}^0(E)$ und es gelte nach dem Ähnlichkeitsprinzip $w_n = e^{s_n} f_n$; hat dann w_j die Darstellung $w_i g$ mit $g \in P_D(A)$, so ist*

$${}_{(E)}\dot{s}_j - {}_{(E)}\dot{s}_i = (\log g)'.$$

[1] Für den Beweis siehe [7, Satz 3]
[2] Für den Beweis und die Integration siehe [7, Korollar 3, Korollar 2]
[3] Vergleiche [8, Satz 4]
[4] $w_i = e^{s_i} f_i$ nach dem Ähnlichkeitsprinzip

Beweis. $w_j = w_i\, g \Rightarrow \dot{w}_j = \dot{w}_i g + \dot{w}_i g_z$; nach Division durch $w_j = w_i\, g$ folgt die Behauptung. [1]

3. Erweiterungen. Es sei Λ_D die Menge aller in D beschränkten und komplexwertigen Funktionen $\lambda(z)$ aus der Klasse H^1; dann ist die Funktion $W := \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu w_\mu = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu E\omega^\mu$, mit $w_\mu \in P_D(E)$ in D erklärt. Definieren wir $\left(\frac{d_{(\Lambda)}}{dz}\right) W := \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \dot{w}_\mu$, so können wir $\lambda_\mu w_\mu \in P_{D\setminus N_\mu}(\lambda_\mu E)$ deuten, wo N_μ die Nullstellenmenge von λ_μ in D ist, denn mit $E = (FG) \in E$ gilt, $\operatorname{Im}(\overline{\lambda_\mu F} \cdot \lambda_\mu F) = \operatorname{Im}(|\lambda_\mu|^2 \overline{F}G) > 0$. wegen $\lambda_\mu \in H^1$ gilt $(\lambda_\mu F \lambda_\mu G) \in H^1 \times H^1$ und es gilt

$$\lim_{z \to z_0} \lambda_\mu(z)\, E(z) \frac{\omega^\mu(z) - \omega^\mu(z_0)}{z - z_0} = \lambda_\mu(z_0)\, \dot{w}_\mu(z_0).$$

Satz 3. *$P_D(E)$ ist genau dann ein unitärer Modul über* **R**, *wenn* $a + b \equiv 0$.

Beweis. Zum Beweis setzen wir $E\omega = F_\Phi + G_\psi \equiv 1$; ist $F = F_R + iF_I$, $G = G_R + i\,G_I$, so folgt aus

$$\begin{pmatrix} F_R & G_R \\ F_I & G_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Lösung $\Phi = G_I/(F_R G_I - F_I G_R) = (G - \overline{G})/(F\overline{G} - \overline{F}G)$, $\psi = -F_I/(F_R G_I - F_I G_R) = -(F - \overline{F})/(F\overline{a} - \overline{F}a)$, mit $(FG) \in H^1 \times H^1$; nach Punkt 1 muß $F[(G - \overline{G})/(F\overline{G} - \overline{F}G)]_{\overline{z}} + G[-(F - \overline{F})/(F\overline{G} - \overline{F}G)]_{\overline{z}} = 0$ gelten, welche Beziehung sich aber nach Rechnung gerade zu $-a - b = 0$ reduziert. Für die Notwendigkeit schließt man umgekehrt.

Folgesatz 4. *$P_D(E)$ ist immer dann ein unitärer Modul über* **R**, *wenn* $E \in P_D(A) \times P_D(A)$.

Beweis. $a + b = 0 \Leftrightarrow F_{\overline{Z}}(\overline{G} - G) + G_{\overline{Z}}(F - \overline{F}) = 0$.

Zur Erweiterung von $P_D{}^0(E)$ zeigen wir

Satz 4. *Es sei $W := \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu w$, mit $w_\mu \in P_D{}^0(E)$; dann gibt es einen Faktor λ in D fast überall aus H^1, so daß $W \in P^0{}_{D\setminus N^\lambda}(\lambda E)$, wo N^λ die Nullstellenmenge von λ in D ist.*

Beweis. Es ist $(d_{(\Lambda)}/dz)\, W := \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \dot{w}_\mu \equiv 0$, mit $\lambda_\mu w_\mu \in P^0_{D - N_\mu}(\lambda_\mu E)$; wir können für geeignetes λ also $W \in P^0_{D\setminus N^\lambda}(\lambda E)$ deuten. Aus der Ableitungsregel von $\sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu w_\mu$ folgt die Differenzierbarkeit von λ in D mit Ausnahme auf einer Menge mit dem Maß Null. [2]

[1] $w_j = E\omega_j = E\omega_i g = w_i g \Rightarrow 0 = E\omega_{j\overline{z}} = E\omega_{i\overline{z}}\, g + E\omega_i g_{\overline{z}} = 0$ für $g \in P_D(A)$

[2] Ist $E = (FG)$ und $A = -(\overline{F}G_z - F_z\overline{G})/(F\overline{G} - \overline{F}G)$, $B = (FG_z - F_z G)/(F\overline{G} - \overline{F}G)$, so gilt für ein $w \in P_D(E)$ $\dot{w} = w_z - Aw - B\overline{w}$; A und B heißen wieder charakteristische Koeffizienten.

Folgesatz 5. *Es gilt* $(d_{(\Lambda)}/dz)\,W \equiv (d_{(\lambda E)}/dz)\,W = {}_{(\lambda E)}\dot{W}$.
Wir wollen jetzt vereinbaren, unter $K_D{}^0(E)$ die Menge aller dem Vektorraum $P_D{}^0(E)$ entspringenden Funktionen

$$W = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu w_\mu, \quad \lambda_\mu \in \Lambda_D$$

zu verstehen. Ist dann $E=(FG)$ so beschaffen, daß $a+b\equiv 0$, so gilt

Satz 5. $K^0_{D\setminus D^*}(E)$ *ist eine Algebra über* $\mathbf{R}$, *wenn* D^* *eine die Erzeugendenvektoren betreffende Nullstellenmenge ist,* [1] *und* E *den gemachten Voraussetzungen genügt.*

Beweis. Bei geeigneter Wahl von E ist $K^0_{D\setminus D^*}(E)$ nach Satz 3 ein unitärer Modul über $\mathbf{R}$, denn wegen der Gleichwertigkeit von

$$F[(G-\overline{G})/(F\overline{G}-\overline{F}G)]_{\overline{Z}} + G[-(F-\overline{F})(\overline{F}G-F\overline{G})]_{\overline{Z}} = 0$$

und

$$F[(G-\overline{G})/(F\overline{G}-\overline{F}G)]_Z + G[-(F-\overline{F})/(F\overline{G}-\overline{F}G)_Z = 0^{2)}$$

liegt das Einselement in $P_D{}^0(E)$. Für den weiteren Beweis überlegen wir lediglich, daß für $W_i = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_{i_\mu} w_{i_\mu} \in K^0_{D\setminus D^*}(E)$, $W_j = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{j_\nu} w_{j_\nu} \in K^0_{D\setminus D^*}(E)$ und $\xi, \eta \in \in \mathbf{R}$, (i) auch $\xi W_i + \eta W_j = \xi \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_{i_\mu} w_{i_\mu} + \eta \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{j_\nu} w_{j_\nu} \in K^0_{D\setminus D^*}(E)$, denn es ist $\xi\lambda_{i_\mu} =: \lambda_\mu \in \Lambda_D$ und $\eta\lambda_{j_\nu} =: \lambda_{m+\nu} \in \Lambda_D$, also gilt mit $w_{i_\mu} =: w_\mu$, $w_{j_\nu} =: w_{m+\nu}$ $\xi W + \eta W_j = \sum_{\tau=1}^{m+n} \lambda_\tau w_\tau$, und (ii) $W_i W_j$ nach Hilfssatz 1 aus $K^0_{D\setminus D^*}(E)$ ist.

Folgesatz 6. *Die Gleichheit von Satz* 1 *ist auf* $K^0_{D\setminus D^*}(E)$ *fortsetzbar*

Beweis. ${}_{(\lambda E)}\dot{W} = 0$.

4. **Zusammenhang.** Es sei $S := (e^s\, ie^s)$ und für $w \in P_D(E)$ gelte nach dem Ähnlichkeitsprinzip die Darstellung $w = e^s f$; dann wollen wir noch einige Aussagen über diese Darstellbarkeit in den speziellen Vektorräumen $P^f_D(E)$ und $P^0_D(E)$, respektive für $S \in E_{D_0}$ über einen Zusammenhang von $P_D(E)$ und $P_D(S)$ machen.

Satz 6. *Es sei* $w_n \in P^f_D(E) \setminus P^0_D(E)$, $n = i, j$ *und es gelte nach dem Ähnlichkeitsprinzip* $w_n = e^{s_n} f_n$; *dann ist* $s_i = s_j$.

---

[1] Λ_D wird also gegebenenfalls geeignet einzuschränken sein.

[2] Es gilt $W_z = (\overline{W})_{\overline{z}}$; es ist also $a+b=0 \Leftrightarrow B+A=0$.

Beweis. Es sei $w \in P_D^f(E) \setminus P_D^0(E)$, so existiert nach Voraussetzung ein $f \in P_D(A)$, sodaß $w_n = wf$; es ist

$$a + b(\overline{w}_n/w_n) = \frac{aw_n + b\overline{w}_n}{w_n} = \frac{w_{n\overline{z}}}{w_n} =$$

$$= \frac{(wf)_{\overline{z}}}{wf} = \frac{w_{\overline{z}}}{w} = \frac{aw + b\overline{w}}{w} = a + b(\overline{w}/w);^{1)}$$

dann folgt die Behauptung nach dem Ähnlichkeitsprinzip.

Folgesatz 7. *Es sei* $e^s f = w \in P_D^f(E) \setminus P_D^0(E)$ *und es sei* $e^s \in H^1$, *dann ist in* $\theta : P_D^f(E) \setminus P_D^0(E) \ni w \cdot \!\!\to \theta(w) \in P_D(S)$ θ *die identische Mengenabbildung.*

Beweis. $S \in H^1 \times H^1$ impliziert nach Hilfssatz 3 $w = e^s f \in P_D(S)$; dann folgt die Behauptung aber aus Satz 6.

Am einfachen Gegenbeispiel $w_a = Fa \in P_D^0(E)$, $w_b = Gb \in P_D^0(E)$, $E = (FG)$, $a, b \in \mathbf{R}^{2)}$ erkennt man, daß die Aussage von Satz 6 in $P_D^0)E)$ nicht gilt, da im allgemeinen nicht $\overline{F}/F = \overline{G}/G$ ist.

LITERATUR

[1] Bers, L., *Theory of pseudo-analytic functions*, New York University, 1953.

[2] Bers, L., *Local theory of pseudo-analytic functions*, Lectures on Functions of a Complex Variable, University of Michigan Press, 1955, 213—244.

[3] Protter, N. H., *The periodicity problem for pseudoanalytic functions*, Ann. of Math. 64 (1956), 154—174.

[4] Vekua, J. N., *Verallgemeinerte analytische Funktionen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1963.

[5] Habetha, K., *Über die Wertverteilung pseudoanalytischer Funktionen*, Ann Acad. Sci. Fennicae, Ser. AI 406 1967.

[6] Methiev, G. D., *Abschätzungen in Klassen schlichter pseudoanalytischer Funktionen*, Akad. Nauk Azerbaidz. SSR, Doklady 24, №. 7, 1968, 3—5 (Russisch).

[7] Withalm, C., *Der Hauptzweig pseudoanalytischer Funktionen*, Mathematica Balkanica 3 (1973), 605—609.

[8] Withalm, C., *Über algebraische Strukturen pseudoanalytischer Funktionen*, Glasnik Matematički, 9 (1974), 233—240.

II. Mathematisches Institut, Lehrkanzel für Angewandte
Mathematik, Universität Graz, A-8010 Graz,
Steyrergasse 17, Österreich

---

1) Vergleiche Fußnote bei der Erklärung des Ähnlichkeitsprizips

2) *Fa* und *Gb* sind dann schon die Darstellungen nach dem Ähnlichkeitsprinzip