PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 19 (33), 1975, pp. 167—172

n-АРНИЙ АНАЛОГОН ТЕОРЕМЫ ШАУФЛЕРА

Янез Ушан, Малиша Жижович

(Сообщено 20 декабря 1974.)

1. Введение

В [2] В. Д. Белоусовым построена теория ассоциативных в целом систем бинарных квазигрупп. В настоящей работе обобщаются результати из [9].

2. Сводка некоторых результатов

P1. ([8], [10]) Если n-квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, удовлетворяют равенствам

$$A_{2i-1}[a_1^{i-1},\ A_{2i}\ (a_i^{i+n-1}),\ a_{i+n}^{2n-1}] = \tag{1}$$
$$= A_{2j-1}[a_1^{j-1},\ A_{2j}(a_j^{j+n-1}),\ a_{j+n}^{2n-1}],\quad i \in \{1, \ldots, n\} -$$

фиксированное число, $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, то существуют подстановки α_i, β_t, γ и группа B такие, что

$$A_{2j-1}(a_1^n) = \gamma^{-1} \overset{n-j}{B}(a_1^{j-1}\, a_1^{j-1},\ \beta_j a_j,\ \alpha_{j+n}^{2n-1}\ a_{j+1}^n) \tag{2_1}$$

$$A_{2j}(a_1^n) = \beta_j^{-1} \overset{n-1}{B}(\alpha_j^{j+n-1}\ a_1^n), \tag{2_2}$$

для любых $j \in \{1, \ldots, n\}$, где

$$\overset{n-1}{B}(x_1^n) = B[B(\ldots(B(x_1^2),\ x_3), \ldots),\ x_n]. \tag{0}$$

P.2. [4] Если n-лупа $Q(L)$ изотопна n-группе $Q(A)$ с единицей, то $Q(L)$ изоморфна $Q(A)$, т.е. сама является n-группой.

P.3. [6, 7] Пусть $Q(A)$ n-полугруппа, т.е. n-группоид удовлетворяющии равенствам

$$A[A(a_1^n),\ a_{n+1}^{2n-1}] = A[a_1^{j-1},\ A(a_j^{j+n-1}),\ a_{j+n}^{2n-1}]$$

для всех $j \in \{2, \ldots, n\}$. Если $Q(A)$ обладает единицей e, то

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = B[B(\ldots(B(x_1, x_2), x_3, \ldots), x_n],$$

где

$$B(x, y) = A(x, y, e, e \ldots, e)$$

для любых $x, y \in Q$. ($Q(B)$ является бинарной полугруппой).

P.4. [2] Если $Q(B)$ группа (бинарная), а число элементов множества Q $n \leqslant 3$, то все подстановки множества Q являются автотопными относительно B.

P.5. [4] (стр. 35.). Любая n-квазигруппа изотопна некоторой n-лупе.

3. n-арный аналогон теоремы Шауфлера*)

Определение 1. [11] Пусть $\Sigma \subseteq \Omega$, где Ω множество всех n-арных квазигрупповых операций, определенных на Q. Систему Σ назовем i ассоциативной в целом (iA-системой), если для любых A_m, $A_{m+1} \in \Sigma$, где m фиксированное число вида $m = 2i - 1$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ существуют такие A_t, $A_{t+1} \in \Sigma$ для всех

$$t \in \{2s - 1 \mid s \neq i \wedge s \in \{1, \ldots, n\}\},$$

что имеют место равенства (1).

Теорема. *Ω-множество всех n-арных квазигрупповых операций, определенных на Q, является iA-системой n-арных квазигрупп только при $m \leqslant 3$, где m число элементов множества Q; $i \in N_n$.*

Доказательствво теоремы

Лемма 1. *Пусть $Q(\Sigma)$ iA-система, $i \in N_n$, Если $L \in \Sigma$, где $Q(L)$ n-лупа, то $Q(L)$ должна быть n-группой обладающей единицей.*

Доказательство. На основании P.1. впервые, находим, что $Q(L)$ изотопна некоторой n-группе обладающей единицей $Q(A)$. Отсюда, учитывая обобщеную теорему Алберта (теорему Белоусов-Сандика) P.2., получаем, что $Q(L)$ изоморфна $Q(A)$, т.е. что $Q(L)$ является n-группой обладающей единицей.

Лемма 2. *Если $kQ = m \geqslant 4$, то Ω не является iA-системой.*

Доказательство. Как и в бинарном случае, лемму докажем расмотрением следующих случаев: $m > 4$ и $m = 4$.

1) Пусть m число элементов множества Q, а Ω множество всех n-арных квазигрупповых операций. Пусть далее $m > 4$ Если $Q(B)$ бинарная лупа на являющаяся группой, то существуют элементы $a, b, c \in Q$ такие, что

(a) $$B[B(a, b), c] \neq B[a, B(b, c)] \text{ **)}$$

n-группоид $Q(A)$, построен следующим образом

(b) $$A(x_1^n) = B[B(\ldots(B(x_1, x_2), x_3), \ldots), x_n],$$

является n-лупой обладающей единицей e лупы $Q(B)$.

---

*) В самом деле теорема является обобщением теоремы ШАУФЛ РА [2].

**) Такая лупа при $m > 4$ существует. См. на пример, BRUCK H. R., Some results in the theory of quasigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944) 19-52, или Белоусов В. Д, Производные операции и ассоциаторы в лупах. Матем. сб. 45 (67), (1958), 51—70

Из (a) и (b) получаем, что $Q(A)$ не является n-группой. Таким образом, в силу леммы 1 находим что при $m>4$ $Q(\Omega)$ не может быть iA-системой n-арных квазигрупп, $i\in N_n$.

2) Пусть $m=4$. Тогда на Q существуют n-руппы обладающие единицами $Q(A)$ и $Q(\bar{A})$ построени следующым образом

$$(\bar{a})\qquad A(x_1^n)=B[B(\ldots(B(x_1,x_2),x_3),\ldots),x_n] \text{ и}$$

$$(\bar{b})\qquad \bar{A}(x_1^n)=\bar{B}[\bar{B}(\ldots(\bar{B}(x_1,x_2),x_3),\ldots),x_n],$$

где $Q(B)$, на пример, является четверной, а $Q(\bar{B})$ циклической группой. Как известно, $Q(B)$ и $Q(\bar{B})$ не являются изоморфными, и поэтому, в силу теоремы Алберта $Q(B)$ и $Q(\bar{B})$ не изотопны. Отсюда следует что $Q(A)$ и $Q(\bar{A})$ не изотопны.

Справедливо следующее положение.

Лемма 3. *Пусть $Q(B)$ циклическая (бинарная) группа, а число элементов множества Q $m\leq 3$. Если $Q(A)$ n-группа обладающая единицей определена следующим образом*

$$A(x_1^n)=B[B(\ldots(B(x_1,x_2),x_3),\ldots),x_n],$$

то любая подстановка множества Q является автотопной относительно A. (См. Р 4).

Справедливо и следующее положение:

Лемма 4. *Пусть $Q(A)$ и $Q(\bar{A})$ n-группы обладающие единицами и пусть*

$$A(x_1^n)=B[B(\ldots(B(x_1,x_2),x_3),\ldots),x_n] \text{ и}$$

$$\bar{A}(x_1^n)=\bar{B}[\bar{B}(\ldots(\bar{B}(x_1,x_2),x_3),\ldots),x_n],$$

где $Q(B)$ и $Q(\bar{B})$ группы. Если $Q(B)$ изоморфна $Q(\bar{B})$, то $Q(A)$ изоморфна $Q(\bar{A})$.

Лемма 5. *Если m число элементов множества Q, и если $m\leqslant 3$, то на Q существует единстввенная (с точностью до изоморфизма) n-лупа являющаяся n-группой.*

Опишем два доказательства. Положим

$$(7)\qquad A_{(a_1,\ldots,a_{n-2})}(x,y)=A(a_1,\ldots,a_{i-1},x,y,a_{i+2},\ldots,a_{n-2}),$$

где $a_1,\ldots,a_{n-2}\in Q$ фиксированные элементы, $kQ\leqslant 3$. Если в $a_1,\ldots,a_{n-2}$ только $n-3$ элементов фиксированных, то (7) определяет тернарную операцию. Если A n-арная лупа, то отсюда получается, что каждая операция $A_{(a_1,\ldots,a_{n-2})}$ виражается через одну из следующих таблиц

(l_1)

1	2	3
2	3	1
3	1	2

(l_2)

2	3	1
3	1	2
1	2	3

(l_3)

3	1	2
1	2	3
2	3	1

(Описана часть доказательства является совместной для первого и второго доказательства.)

Пусть $i=n-1$. Операции

$$A_{(a_1, \ldots, a_{j-1}, p, q, a_{j+2}, \ldots, a_{n-2})},$$

$p, q \in \{1, 2, 3\}$, можно считать координатами некоторой матрици (m) формата 3×3*) в которых (p, q) сразу являются индексами.**) Через (M) обозначим присоединенную матрицу (m) — состоящую из таблиц (l_1), (l_2) (l_3). В строках и столбцах матрицы (M) выполняется „условие строки" для тернарных квазигрупп ([5], стр 7). Строки $(1, q)$ и столбцы $(p, 1)$ $p, q \in \{1, 2, 3\}$, матриц операций в которых

$$a_1 = \cdots = a_{j-1} = a_{j+2} = \cdots = a_{n-2} = 1$$

$(1-$единица $n-$лупы $A)$, удовлетворяют „условию тернарной лупе" ([9] стр. 280). Одна из $n-$луп обладающих единицей 1, есть $n-$группа $\overset{n-1}{B}$, где B циклическая группа, имеющая единицу 1. Любая n-лупа обладающая единицей 1 может быть получена из $\overset{n-1}{B}$ только нзменеием ее матриц (M). В этом направлении доказивается следующее положение: Если, сохраняя (m), (M) изменена нетождественно и при этом сохранени „условия строк", то нетождественно изменены все столбцы или все строки. Используя это положение утверждается, что, исходя из любой матрице (m), ее изменениене нарушающее „условие строки" условляет нетождественно изменение некоторой (m'), имеющей с (m) совместную строку (столбец), и среди операции

$$A_{(a_1, \ldots, a_{n-2})}$$

операцию, которая имеет в индексе одну единицу 1 больше чем операция с самим большим числом единиц 1 из (m). Продолжая, этим способом изменения матриц (m), получается что в одной из (m') „условие лупной матрице" нарушается. Положение доказано.

Опись второй части второго доказательства.***) Операции

$$A_{(a_1, \ldots, a_{n-2})}$$

являются циклическими группами, которые выражаются через (l_1), (l_2) и (l_3). Поэтому эти операции являются изоморфнимы, где изоморфизм имеет следующий вид:

$$a * b = a \cdot k \cdot b, \tag{8}$$

$k \in Q$ фиксированный элемент. Учитывая этот факт и факт, что сверхтождество

$$X[Y(a, b), c] = Y[a, X(b, c)]$$

*) или 2×2, случай 1×1 иначе является тривиальным.

**) Описана (m) существует при $|A| \geqslant 4$; случай $|A|=3$ расмотрен в [9].

***) По идее Ѓ. Чупона.

справедливо тогда, и только тогда, когда X и Y группы изоморфные образом (8)*, получаем что

$$A[A(a_1^n), a_{n+1}^{2n-1}] = A_{(a_{n+1}, \ldots, a_{2n-2})}[A_{(a_2, \ldots, a_{n-1})}(a_1, a_n), a_{2n-1}] =$$

$$= X[Y(a_1, a_n), a_{2n-1}] = Y[a_1, X(a_n, a_{2n-1})] = A_{(a_2, \ldots, a_{n-1})}[a_1,$$

$$A_{(a_{n+1}, \ldots, a_{2n-2})}(a_n, a_{2n-1})] = A[a_1^{n-1}, A(a_n^{2n-1})].$$

т.е. что A является $(1, n)$-ассоциативной n-лупой.

Так как операции (7) выражаются через таблицы (l_1), (l_2), (l_3) (-таблици циклических групп) для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, то A является комутативной n-лупой. Учитывая этот факт и факт что A $(1, n)$-ассоциативная n-квазигруппа, находим, что A (i, j)-ассоциативна для любых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Таким образом A n-группа обладающая единицей.

Учитывая P5, лемму 5 и P3, находим, что справедливо и следующее положение:

Лемма 6 *Пусть m число элементов множества Q. Если $m \leqslant 3$, то любая n-квазигруппа $Q(C)$ изотопна n-группе $Q(A)$, где A определена через циклическую группу B, образом* (0).

Заключение доказательства теоремы

На основании леммы 6 и леммы 3, находим, что для любых $A_1, A_2 \in \Omega$ существуют $\alpha_1^n, \bar{\alpha}_1^n \in (Q!)^n$ такие, что

$$A_1(x_1^n) = A(\alpha_1^n x_1^n) \text{ и}$$

$$A_2(x_1^n) = A(\bar{\alpha}_1^n x_1^n).$$

На основании леммы 3, отсюда, имеем, что

$$A_1[A_2(x_1^n), x_{n+1}^{2n-1}] = A[\bar{\bar{\alpha}}_1^{j-1} x_1^{j-1}, A(\bar{\bar{\alpha}}_j^n x_j^n, \bar{\alpha}_1^{j-1} x_{n+1}^{j+n-1}), \bar{\alpha}_j^n x_{j+n}^{2n-1}],$$

для всех $j \in \{2, \ldots, n\}$; $\bar{\bar{\alpha}}_1 = \alpha_1^{(i)} \bar{\alpha}_i$, где

$$\alpha_1 A(x_1^n) = A(\alpha_1^{(1)} x_1, \ldots, \alpha_1^{(i)} x_i, \ldots, \alpha_1^{(n)} x_n).$$

Отсюда, наконец, находим что, при $m \leqslant 3$, Ω является iA-системой n-арных квазигрупп. Таким же образом находим что Ω, при $m \leqslant 3$, является и iA-системой для каждого $i \in \{2, \ldots, n\}$.

*) [3], стр. 87,

ЛИТЕРАТУРА

[1] Schauffler, R., *Die Assoziativität im Ganzen besonders bei Quasigruppen*, Math. Zeitshr. 67. № 5 (1957), 428—435.

[2] Белоусв, В. Д., *Ассоциативные а целом системы квазигрупп.* Матем. сб. 55. (97) № 2 (1961). 221—236.

[3] Белоусов В. Д., *Системы квазигрупп с обобщеными тождествами*, Т. 20 вып. 1 (121), 1965. 75—146.

[4] Белоусов, В. Д., Сандик, М. Д., *n-Арные Квазигруппы и лупы*, Сибирский математический журнал, том VII 1965, № 1 35—54.

[5] Белоусов, В, Д., *n-Арные квазигруппы.* „Штинице", Кишинев, 1972.

[6] Čupona, Ć., *Finitarne asocijativne operacije*, MB, sv. 39, 1969, 135—149.

[7] Трпеновски, Б., *n-Полигруппи што можат да се пополнат со неутрални елементи*, Билтен на Друшт. на мат. и физ. од С. Р. Мах кн. 10 (1964), 23—26.

[8] Ушан, Я., *n-Арный аналогон теоремы Белоусова о четырех квазигруппах*, Билтен на Друшт. на мат. и физ. од С. Р. Македонија, кн. XXI. 5—17.

[9] Ушан, Я., *Ассоциативные в целом системы тернарых квазигрупп*, Тернарный аналогон теоремы Шауфера, Mathematica Balkanica, 1 (1971) 273—281.

[10[Ушан, Я., *Об одной сиҫтема функциональных уравнений общей n-арной ассоциативности на алгебре n-арных квазигрупп*, Math. Balk., 2 (1972), 288—295.

[11] Ушан, Я., *Ассоциативныв в целом системы n-арных квазигрупп* (*Постровния iA-систем. Одно обобщение теоремы Хоссу-Глускина*), Publ. Inst. Math., Nouv. ser., tome 19 (33), 1975, pp. 155—165.