PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 19 (33), 1975, pp. 155—165

АССОЦИАТИВНЫЕ В ЦЕЛОМ СИСТЕМЫ n-АРНЫХ КВАЗИГРУПП

(ПОСТРОЕНИЯ iA-СИСТЕМ. ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХОССУ-ГЛУСКИНА)

Янез Ушан

(Сообщено 20. декабря. 1974.)

1. Введение

В [1] В. Д. Белоусовым построена теория ассоциативных в целом систем бинарных квазигрупп. В [8] и [9] эта теория обобщена на з-арный случай. В основе [1] была теорема Белоусова о четырех квазигруппах. В основе [8] и [9] был тернарный аналогон упомянутой теоремы Белоусова [6]. В основе настоящей работе является n-арный аналогон теоремы Белоусова о четырех квазигруппах – P1 ([7], [10]).

2. Вспомогательные результаты

P1. Если n-квазигруппы $Q(A_t)$, $t\in N_{2n}$, удовлетворяют равенствам

$$A_{2i-1}[a_1^{i-1},\ A_{2i}\ a_i^{i+n-1},\ a_{i+n}^{2n-1}]= \tag{1}$$
$$=A_{2j-1}[a_1^{j-1},\ A_{2j}\ (a_j^{j+n-1}),\ a_{j+n}^{2n-1}],\qquad i\in\{1,\ldots,n\}-$$

– фиксированное число, $j\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i\}$., то существуют подстановки α_i, β_t, γ и группа B такие, что справедливы следующие равенства

$$A_{2j-1}(a_1^n)=\gamma^{-1}\overset{n-1}{B}(\alpha_1^{j-1}\ a_1^{j-1},\ \beta_j a_j,\ \alpha_{j+n}^{2n-1}\ a_{j+1}^n) \tag{2_1}$$

$$A_{2j}(a_1^n)=\beta_j^{-1}\overset{n-1}{B}\ \alpha_j^{j+n-1}\ a_1^n), \tag{2_2}$$

для любых $j\in\{1,\ldots,n\}$, где

$$\overset{n-1}{B}(x_1^n)=B[B(\ldots(B(x_1^2),\ x_3),\ldots),\ x_n]^{*)} \tag{0}$$

---

*) В самом деле $\overset{n-1}{B}$ означает последовательност $\underbrace{BB\ldots B}_{n-1}$ (как и в случае переменных: $\underbrace{a\,a\ldots a}_{m}=\overset{m}{a}$).

Легко увидеть, что справедливо положение:

P2. Если B и $\bar{B}$ главноизотопные группы, то B и $\bar{B}$ имеют одну и ту же группу автотопных подстановок.

Справедливо и положение:

P3. $$(\exists(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)\in Q^3)\left(\alpha\, B(X_1^2)=B(\alpha_1^2 x_1^2)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\exists(\alpha, \bar{\alpha}_1^n)\in Q^{n+1})\left(\alpha \overset{n-1}{B}(x_1^n)=\overset{n-1}{B}(\bar{\alpha}_1^n x_1^n)\right)$$

P4. Пусть B группа, $\alpha, \alpha_t\in Q!$. Тогда, если справедливо равенство

$$\text{(i)}\qquad \alpha \overset{n-1}{B}(x_1^n)=\overset{n-1}{B}(\alpha_1^n x_1^n)$$

то и α_j автотопные подстановки группы B.

Доказательство. Из (i) для $2\leqslant j\leqslant n-2$ ($\overset{j-2}{B}$ и $\overset{n-j-2}{B}$ тогда, по меньшей мере, могут стать и унарными операциями), получаем, что

$$(j)\qquad \alpha \overset{n-1}{B}(x_1^n)=$$

$$=B\left\{B\overset{j-2}{B}(\alpha_1^{j-1} x_1^{j-1}),\ \alpha_j x_j\right], B\left[\alpha_{j+1} x_{j+1},\ \overset{n-j-2}{B}(\alpha_{j+2}^n x_{j+2}^n)\right]\right\}.$$

Отсюда, полагая

$$x_1=\cdots=x_{j-1}=x_{j+2}=:\cdots=x_n=e,$$

где e единица группы B, получаем, что $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ автотопные для B.

Для α_1 и α_n находим, что положение справедливо, если положим $a_3=\cdots=a_n=e$.

P5. Пусть B группа, а $\alpha_1^{(j)}=\alpha_{2j-1}^{-1}\alpha_1$, α_2, α_{2j}, $\beta_i^{(j)}\in Q!$, $i\in\{1, \ldots, 2n-1\}$, $j\in\{2, \ldots, n\}$. Тогда, если справедливы равенства

$$(l)\qquad \alpha_1^{(j)}\overset{n-1}{B}\left[\alpha_2\overset{n-1}{B}(x_1^n),\ x_{n+1}^{2n-1}\right]=$$

$$=\overset{n-1}{B}\left[\{\beta_i^{(j)} x_i\}_{i=1}^{j-1},\ \alpha_{2j}\overset{n-1}{B}(\{\beta_i^{(j)} x_i\}_{i=j}^{j+n-1}),\ \{\beta_i^{(j)} x_i\}_{i=j+n}^{2n-1}\right]$$

для любого $j\in\{2, \ldots, n\}$, то все $\alpha_1^{(j)}$, α_2, α_{2j}, $\beta_i^{(j)}$ автотопные подстановки (квазиавтоморфизмы) группы B.

Доказательство. а) Впервые докажем, что $\alpha_1^{(j)}$, α_2, α_{2j} – квазиавтоморфизмы группы B.

B (l) положим

$$x_2=\cdots=x_{j-1}=x_{j+1}=\cdots=x_{j+n-1}=x_{j+n+1}=\cdots=x_{2n-1}=e,$$

где e единица группы B. Получим

$$\alpha_1^{(j)} B[\alpha_2 B(x_1, x_j), x_{j+n}]=\overset{2}{B}(R\,\beta_1^{(j)} x_1,\ R'\,\alpha_{2j}\,\beta_j^{(j)} x_j,\ R''\,\beta_{j+n}^{(j)} x_{j+n})=$$

$$=B[R\,\beta_1^{(j)} x_1,\ B(R'\,\alpha_{2j}\,\beta_j^{(j)} x_j,\ R''\,\beta_{j+n}^{(j)} x_{j+n})].$$

Отсюда, на основании леммы 3 из [1] (стр. 226), получаем, что $\alpha_1^{(j)}$ и α_2 автотопные подстановки группы B, для любого $j\in\{2, \dots, n\}$.

Если, далее, в (l) положим $x_1=\dots=x_{j-1}=x_{j+n}=\dots=x_{2n-1}=e$, где e единица группы B, получим.

$$(\bar{l})\qquad \alpha_1^{(j)}\overset{j-1}{B}\left|\alpha_2\overset{n-j}{B}(x_j^n),\ x_{n+1}^{j+n-1}\right]=RL\,\alpha_{2j}B\Big\{B\Big[B(\beta_j^{(j)}x_j,\ \beta_{j+1}^{(j)}x_{j+1}),$$
$$\overset{n-j-2}{B}(\{\beta_i^{(j)}x_i\}_{i=j+2}^{n})\Big],\ B\Big[\beta_{n+1}^{(j)}x_{n+1},\ \overset{j-3}{B}(\{\beta_i^{(j)}x_i\}_{i=n+2}^{j+n-1})\Big]\Big\}.$$

В $(\bar{l})$ положим $x_{j+2}=\dots=x_n=x_{n+2}=\dots=_{j+n-1}=e$, где e единица группы B. На основании леммы 3 и 6) из [1], получаем, что и α_{2j} — квазиавтоморфизми группы B, для любого $j\in\{2, \dots, n\}$.

b) Сейчас докажем, что и $\beta_i^{(j)}$, для любых

$$i\in\{1, \dots, 2n-1\}\quad\text{и}\quad j\in\{2, \dots, n\}$$

являются автотопными подстановками группы B.

Учитывая доказанное в а), т.е. факт, что α_2 и α_{2j} автотопные относительно B, получаем:

$$(\bar{\bar{\mathrm{d}}})\qquad \alpha_1^{(j)}\overset{2(n-1)}{B}(x_1^{2n-1})=\overset{2(n-1)}{B}(\{\alpha_2^{(i)-1}\beta_i^{(j)}x_i\}_{i=1}^{j-1},$$
$$\{\alpha_{2j}^{(i)}\alpha_2^{(i)-1}\beta_i^{(j)}x_i\}_{i=j}^{n},\ \{\alpha_{2j}^{(i)}\beta_i^{(j)}\}_{i=n+1}^{j+n-1},\ \{\beta_i^{(j)}x_i\}_{i=j+n}^{2n-1}).$$

Отсюда, на основании Р4 и 6) из [1] (стр. 226), учитывая a), находим, что и $\beta_i^{(j)}$ являются квазиавтоморфизмами группы B, для любых $i\in\{1, \dots, 2n-1\}$ и любых $j\in\{2, \dots, n\}$.

Р6. Пусть в группе B выполняется равенство

$$B\Big[\overset{n-1}{B}(\alpha_1^n x_1^n),\ a\Big]=B\Big[\overset{n-1}{B}(\beta_1^n x_1^n),\ b\Big],$$

для любых $x_i\in Q$; α_i, β_i — автоморфизмы группы B, a и b — некоторые элементы из Q. Тогда $a=b$ и $\alpha_i=\beta_i$ для любого $i\in\{1, \dots, n\}$. ([3], стр. 38, лемма 2.4.)

3. Определения $i\bar{A}$-, iA-систем. Теоремы позволяющие построения iA-систем, $i\in N_n$

Определение 1. Пусть $\Sigma\subseteq\Omega$, где Ω множество всех n-арных квазигрупповых операций, определенных на Q. Систему Σ назовем i слабо ассоциативной в целом, кратко $i\bar{A}$-системой, если для любых $A_m A_{m+1}\in\Sigma$, где m фиксированное число вида $m=2i-1$, $i\in\{1, \dots, n\}$, существуют такие A_t, $A_{t+1}\in\Omega$ для всех $t\in\{2s-1\,|\,s\neq i\wedge s\in\{1, \dots, n\}\}$, что имеют место равенства (1).

Определение 2. Пусть $\Sigma \subseteq \Omega$, где Ω множество всех n-арных квазигрупповых операций определенных на Q. Систему Σ назовем i ассоциативной в целом (iA-системой) если для любых A_m, $A_{m+1} \in \Sigma$, где m фискированное число вида

$$m = 2i - 1, \qquad i \in \{1, \ldots, n\},$$

существуют такие A_t, $A_{t+1} \in \Sigma$ для всех

$$t \in \{2s - 1 \mid s \neq i \wedge s \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

что имеют место равенства (1).

Определение 3. Пусть $\Sigma \in \Omega$, где Ω множество всех n-арных квазигрупповых операций, определенных на Q. Σ назовем A-системой, если она iA-система для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Теорема 1.*) *Пусть на Q дана $\overline{iA}$-система Σ n-арных квазигрупп. Тогда на Q можно определить группу $\overline{B}$ такую, что каждая операция $A \in \Sigma$ будет иметь вид*:

$$A(x_1^n) = \overset{n-1}{\overline{B}}(\alpha_1^{i-1} x_1^{i-1},\ \alpha_i x_i,\ \alpha_{i+1}^n x_{i+1}^n),$$

где α_i — автоморфизм группы $\overline{B}$, а α_t, $t \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, некоторые подстановки множества Q.

Доказательство. Теорему докажем для $i = 1$.

Пусть на Q дана $\overline{1A}$-система Σ. Тогда, каковы бы ни были операции $A_1, A_2 \in \Sigma$, найдутся операции A_{2j-1}, $A_{2j} \in \Omega$ для всех $j \in \{2, \ldots n\}$, такие что имеют место равенства (1), т.е.

$$A_1[A_2(a_1^n),\ a_{n+1}^{2n-1}] = A_{2j-1}[a_1^{j-1},\ A_{2j}(a_j^{j+n-1}),\ a_{j+n}^{2n-1}].$$

Отсюда, учитывая n-арный аналогон теоремы Белоусова о четирех квазигруппах, т. е. P1., получаем, что существует группа B и подстановки

$$\alpha,\ \alpha_j,\ \beta,\ \beta_j,\ \lambda,\ \lambda_j,\ \mu,\ \mu_j,\ \xi_1^{n-1},\ \xi_i^{(j)},\ \delta_1^{n-1},\ \delta_i^{(j)},$$

$i \in \{1, \ldots, n-1\}$, удовлетворяющие равенствам

$$(2) \qquad \begin{cases} A_1(a, b_1^{n-1}) = \alpha^{-1} \overset{n-1}{B}(\beta a,\ \xi_1^{n-1} b_1^{n-1}) \\ A_2(a, b_1^{n-1}) = \lambda^{-1} \overset{n-1}{B}(\mu a,\ \delta_1^{n-1} b_1^{n-1}) \\ A_{2j-1}(a, b_1^{n-1}) = \alpha_j^{-1} \overset{n-1}{B}(\beta_j a\ \{\xi_i^{(j)} b_i\}_{i=1}^{n-1}) \\ A_{2j}(a, b_1^{n-1}) = \lambda_j^{-1} \overset{n-1}{B}(\mu_j a,\ \{\delta_i^{(j)} b_i\}_{i=1}^{n-1}). \end{cases}$$

для любого $j \in \{2, \ldots. n\}$.

*) Аналогон теор. 3 из [1], стр. 228.

Если положим (2) в (1) и сделаем замены

$$\mu a = x_1, \quad \delta_1^{n-1} b_1^{n-1} = x_2^n, \quad \xi_1^{n-1} b_n^{n-1} = x_{n+1}^{2n-1},$$

получаем равенства

$$\overline{\overline{(d)}} \qquad \alpha^{-1} \overset{n-1}{B}[\beta\lambda^{-1} \overset{n-1}{B}(x_1^n), x_{n+1}^{2n-1}] =$$

$$= \alpha_j^{-1} \overset{n-1}{B}[\{\varphi_i x_i\}_{i=1}^{j-1}, \psi_j \overset{n-1}{B}(\{\varphi_i x_i\}_{i=j}^{j+n-1}), \{\varphi_i x_i\}_{i=j+n}^{2n-1}],$$

$j \in \{2, \ldots, n\}$.

Из $\overline{\overline{(d)}}$, иа основании P 5, получаем, что

$$\beta\lambda^{-1} = \theta$$

является квазиавтоморфизмом группы B. При $A_1 = A_2$ и подстановка

$$\mu\lambda^{-1} = \theta_1$$

должна быть квазиавтоморфизмом группы B.

Зафиксируем теперь операцију A_1; этим мы зафиксировали и подстановку β. Подстановки λ и μ выражаются через β следующим образом

$$\lambda = \theta^{-1}\beta, \quad \mu = \theta_1 \theta^{-1} \beta.$$

Следовательно, для любой операции $A_2 \in \Sigma$ справедлива следующая цепь равенств:

$$A_2(a, b_1^{n-1}) = \lambda^{-1} \overset{n-1}{B}(\mu a, \delta_1^{n-1} b_1^{n-1}) =$$

$$= \beta^{-1} B\{B[\theta\theta_1 \theta^{-1} \beta a, (\theta e)^{-1}], \overset{n-2}{B}(\gamma_1^{n-1} b_1^{n-1})\}^{*)} = \beta^{-1} B\{\psi\beta a^{**)},$$

$$\overset{n-2}{B}(\overline{L}\gamma_1 b_1, \gamma_2^{n-1} b_2^{n-1})\} = \beta^{-1} \overset{n-1}{B}(\psi\beta a, \overline{L}\gamma_1 b_1, \gamma_2^{n-1} b_2^{n-1}),$$

т. е. следующее равенство

$$(3) \qquad A_2(a, b_1^{n-1}) = \beta^{-1} \overset{n-1}{B}(\psi\beta a, \overline{L}\gamma_1 b_1, \gamma_2^{n-1} b_2^{n-1}),$$

где β и γ_1^{n-1} некоторые подстановки множества Q, $\overline{L}$ трансформация группы $Q(B)$, а ψ — автоморфизм группы B

Введем новую операцию $\overline{B}$ следующим образом

$$(4) \qquad \beta^{-1} B(\beta x_1, \beta x_2)) = \overline{B}(x_1, x_2).$$

---

*) θ является автотопной подстановкой группы B.

**) $\psi x = B(\theta\theta_1 \theta^{-1} x, (\theta\theta_1 \theta^{-1} e)^{-1})$. ψ является автоморфизмом группы B, на основании 3) и 6) из [1].

Отсюда получаем

$$\beta^{-1}\overset{n-1}{B}(\beta x_1^n)=\overset{n-1}{\overline{B}}(x_1^n). \tag{$\overline{4}$}$$

Если в (3) положим ($\overline{4}$), получаем

$$A_2(x_1^n)=\overset{n-1}{\overline{B}}(\beta^{-1}\psi\beta x_1,\ \varphi_2^{n-1}x_2^{n-1}), \tag{5}$$

где $\varphi_1=\beta^{-1}\psi\beta$ является автоморфизмом группы $\overline{B}$, так как справедлива следующая цепь равенств

$$\beta^{-1}\psi\beta\overline{B}(x_1,x_2)=\beta^{-1}\psi\beta\beta^{-1}B(\beta x_1,\beta x_2)$$
$$=\overline{B}(\beta^{-1}\psi\beta x_1,\beta^{-1}\psi\beta x_2).$$

Аналогично доказывается что положение справедливо для любой $\overline{iA}$-системы, $i\in\{1,\ldots,n\}$

Теорема 2.*) *Пусть на Q дана iA-система Σ n-арных квазигрупп. Тогда на множестве Q можно определить группу B, что каждая операция $C\in\Sigma$ имеет вид*

$$C(x_1^n)=B\left[\overset{n-1}{B}(\{\Phi_i x_i\}_{i=1}^n),k\right], \tag{7}$$

где φ_i — автоморфизмы группы B, а k некоторый элемент множества Q.

Доказательство. Теорему докажем для $i=1$.

Так как $1A$-система является и $\overline{1A}$-системой, то на основании теоремы 1, впервые находим, что существует такая группа B, что $A_{2j-1},A_{2j}\in\Sigma$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, имеют вид

$$\begin{cases}A_{2j-1}(x_1^n)=\overset{n-1}{B}(\{\alpha_i^{(j)}x_i\}_{i=1}^n)\\ A_{2j}(x_1^n)=\overset{n-1}{B}(\{\beta_i^{(j)}x_i\}_{i=1}^n),\end{cases} \tag{$\overline{2}$}$$

где $\alpha_1^{(j)}$, $\beta_1^{(j)}$ — авоморфизмы группы B для любого

$$j\in\{1,\ldots,n\}.$$

Положим ($\overline{2}$) в (1). Получим

$$\overset{n-1}{B}\Big[\alpha_1^{(1)}\overset{n-1}{B}(\{\beta_i^{(1)}x_i\}_{i=1}^{j-1}.\ \beta_j^{(1)}x_j,\ \{\beta_i^{(1)}x_i\}_{i=j+1}^n),$$
$$\{\alpha_{i-n+1}x_i\}_{i=n+1}^{2n-1}\Big]=\overset{n-1}{B}\Big[\{\alpha_i^{(j)}x_i\}_{i=1}^{j-1},\ \alpha_j^{(j)}\overset{n-1}{B}(\beta_1^{(j)}x_j,$$
$$\{\beta_{i-j+1}^{(j)}x_i\}_{i=j+1}^n,\ \beta_{n+2-j}^{(j)}x_{n+1},\ \{\beta_{i-j+1}^{(j)}x_i\}_{i=n+2}^{j+n-1}),$$
$$\{\alpha_i^{(j)}x_{i+n-1}\}_{i=j-1}^n\Big]. \tag{6}$$

*) Аналогон теор. 4 из [1], стр. 229.

В (6) положим

$$x_1 = \beta_2^{(1)} x_2 = \cdots = \beta_{j-1}^{(1)} x_{j-1} = \beta_{j+1}^{(1)} x_{j+1} = \cdots \beta_n^{(1)} x_n =$$
$$= \alpha_3^{(1)} x_{n+2} = \cdots = \alpha_n^{(1)} x_{2n-1} = e;$$

e – единица группы B. Получим:

$$B\left(\alpha_1^{(1)} \beta_j^{(1)} x_j,\ \alpha_2^{(1)} x_{n+1}\right) =$$
$$= LR\, \alpha_j^{(j)} \overset{n-1}{B} \left(\beta_1^{(j)} x_j,\ l_1^{n-j},\ \beta_{n+2-j}^{(j)} x_{n+1},\ l_{n-j+1}^{n-1}\right)^{*)},$$

а отсюда, подобным образом, равенство

$$(\bar{6}) \qquad B\left(\alpha_1^{(1)} \boxed{\beta_j^{(1)}} x_j,\ \alpha_2^{(1)} x_{n+1}\right) = LR\, \alpha_j^{(j)} B\left(\beta_1^{(j)} x_j,\ \bar{L}\bar{R}\, \beta_{n+2-j}^{(j)} x_{n+1}\right).$$

Из ($\bar{6}$), на основании следствия леммы 2 из [1] (стр. 227), получаем, что

$$\alpha_1^{(1)} \boxed{\beta_j^{(1)}} \beta_1^{(j)} = \theta$$

чвляются квазиавтоморфизмами группы B для любого $j \in \{2, \ldots, n\}$. Так как $\alpha_1^{(1)}$ и $\beta_1^{(j)}$, для любого $j \in \{2, \ldots, n\}$, являются автоморфизмами группы B, то отсюда**) получаем, что $\boxed{\beta_j^{(1)}}$, для любого $j \in \{2, \ldots, n\}$, являются квазиавтоморфизмами группы B.

Так как A_2 любая операция из $'\Sigma$, то справедливо следующее положение: существует группа B такая, что каждая операция из Σ имеет вид

$$(8) \qquad C\left(x_1^n\right) = \overset{n-1}{B} \left(\alpha_1 x_1,\ \{\alpha_i x_i\}_{i=2}^n\right),$$

где α_1 – автоморфизм группы B, а α_i, $i \in 2\{, \ldots, n\}$, квазиавтоморфизмы группы B.

Учитывая 6) из [1] находим, что (8) превращается в следующее равенство

$$C\left(x_1^n\right) = \overset{n-1}{B} \left[\alpha_1 x_1,\ B(\bar{\alpha}_2 x_2,\ k_2),\ B(k_3,\ \alpha_3{}' x_3),\ \ldots,\ B(k_n,\ \alpha_n{}' x_n)\right]$$

где α_1, $\bar{\alpha}_2$, $\alpha_3{}'$, $\ldots$, $\alpha_n{}'$ – автоморфизмы группы B.

---

*) L существует для всех $j \in \{2, \ldots, n\}$. R не существует для $j = n$. Тогда в правой части полученного равенства с начала является только $L\alpha_j^{(j)}$.

**) на основании 6) из [1] (стр. 226)

Учитывая 3) и 6) из [1] и факт, что B группа, получаем следующую цепь равенств

$$C(x_1^n) = \overset{n-2}{B}[\alpha_1 x_1, B\{B(\bar{\alpha}_2 x_2, k_2), B(k_3, \alpha_3' x_3)\}, \ldots, B(k_n, \alpha_n' x_n] = \cdots =$$

$$= B\left[\overset{n-1}{B}(\alpha_1 x_1, \bar{\alpha}_2 x_2, \ldots, \bar{\alpha}_n x_n), k,\right.$$

где $\alpha_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n$ — автоморфизмы группы B, а k некоторый элемент из Q.

Аналогично доказывается что положение справедливо для любой iA-системы $i \in \{1, \ldots, n\}$.

4. Теорема 2 как одно обобщение теоремы Хоссу-Глускина*)

В терминах iA-систем n-арных квазигрупп теорему Хоссу-Глускина можно сформулировать следующим образом:

P7. Если $\Sigma = \{A\}$ iA-система n-арных квазигрупп**), то существует такая группа B, что

$$A(x_1^n) = B\left[\overset{n-1}{B}(x_1, \alpha x_2, \alpha^2 x_3, \ldots, \alpha^{n-1} x_n), c\right], \tag{7}$$

где α — автоморфизм группы B, c - некоторый элемент из Q, причем выполняются условия

$$\alpha^{n-1} x = B[c, B(x, c^{-1})], \quad \alpha c = c.$$

Таким образом, теорему 2 можно считать одним обобщением теоремы Хоссу-Глускина. Кроме того, **P7.** может быть получена из теоремы 2, как ее следствие, следующим образом. Так как $\Sigma = \{A\}$ является iA-системой, то для A справедлива теорема 2, в частности (7), и A является n-группой, в частности (1, 2)-ассоциативной n-квазигруппой. Учитывая упомянутые факта и P6, можно получить P7. Описаное доказательство (в подробной форме) является заключительной частью доказательства теоремы Хоссу-Глускина в [3] (стр. 41—42, начиняя с (2.31.)).

5. n-Группа обладающая единицей в $\bar{i}$A-системах

Теорема 3. *Если n-ігруппа $\overset{n-1}{B}$ принадлежит $\bar{i}A$-системе в которой все операции выражаются через $\bar{B}$, образом из Теор. 1, то $\overset{n-1}{B}$ выражается через $\bar{B}$ следующим образом*

$$\overset{n-1}{B}(x_1^n) = \bar{B}\left[\overset{n-2}{B}(\{\bar{B}(x_i, k)\}_{i-1}^{n-1}, x_n\right], \tag{8}$$

*где k^{-1} обратный от k в группе $\bar{B}$, и $k^{-1} = e$, где e единица групе B.****)

---

*) [4] и [5].

**) Так как Σ одноэлементное множество, то A является n-группой.

***) Если $n = 2$, то (8) становится следующим равенством $\overset{2-1}{B}(x_1^2) = \bar{B}\left[\overset{2-1}{B}(\{\bar{B}(x_i, k)\}_{i=1}^{2-1}), x_2\right]$, откуда $B(x_1^2) = \bar{B}[\bar{B}(x_1, k) x_2]$, что является знакомым положением для бинарного случая — [1], стр. 229.

Доказательство. Пусть речь идеть о $1\overline{A}$-системе.

Так как B принадлежит $1\overline{A}$-системе, то, на основании теоремы 1, справедливо равенство

$$\overset{n-1}{B}(x_1^n) = \overset{n=1}{\overline{B}}(\alpha_1^n x_1^n),$$

откуда равенство

$$(8_1) \qquad \overset{n-1}{B}(x_1^n) = \overline{B}\left[\overline{B}(\alpha_1 x_1 \alpha_2 x_2),\ \overset{n=3}{\overline{B}}(\alpha_3^n x_3^n)\right].$$

Если в (8_1) положим $x_3 = \cdots = x_n = e$, где e-единице группы B, получаем, что

$$B(x_1^2) = \overline{B}(\alpha_1 x_1,\ R\alpha_2 x_2).$$

Таким образом B и $\overline{B}$ главноизотопыне группы, откуда, ввиду доказатеьства теоремы 1.4. из [2], стр. 17, получаем, что справедливы равенства

$$(8_2) \qquad B(x_1, x_2) = \overline{B}[x_1, \overline{B}(k, x_2)] = \overline{B}[\overline{B}(x_1, k), x_2],$$

где e-единица группы B, $k = e^{-1}$ ее обратны в $\overline{B}$.

Учитывая (8_2), получаем следующую цепь равенств

$$\overset{n-1}{B}(x_1^n) = B\left[x_1, \overset{n-2}{B}(x_2^n)\right] = \cdots =$$

$$= \overset{n=1}{\overline{B}}\left[\overline{B}(x_1, k), \ldots, \overline{B}(x_{n-1}, k), \overset{n-n}{B}(x_n^n)\right]^{*)} =$$

$$= \overline{B}\left[\overset{n=2}{\overline{B}}(\{\overline{B}(x_i, k)\}_{i=1}^{n-1}), x_n\right].$$

Таким же способом разматривается случай для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

6. Об максимальных iA системах

Образом из конца доказательства теоремы 2, учитывая теорему 2, получаем что множество

$$(9) \qquad \Sigma_B = \left\{A \mid A(x_1^n) = B\left[\overset{n-1}{B}(\{\varphi_i x_i\}_{i=1}^n), k\right] \wedge k \in Q \wedge \varphi_i \in \mathcal{A}_B\right\}$$

$\mathcal{A}_B$ — множество всех автоморфизмов группы B, является $1A$-системой.

Таким же образом получается что Σ_B является iA-системой и для каждого $i \in \{2, \ldots, n\}$, т.е. A-системой.

Теорема 4. *iA-система Σ_B из (9) является максимальной, т.е. ее нельзя включить в болое широкую iA-систему.*

Доказательство. Предложим, что существует iA-система Σ' такая, что

$$(a) \qquad \Sigma_B \subseteq \Sigma'.$$

---

*) $\overset{n-n}{B}(x_n^n) = \overset{\circ}{B}(x_n) = x_n$.

На основании Теоремы 2, каждая операция из Σ' имеет следующий вид

(0) $$C(x_1^n)=\overline{B}\left[\overline{B}^{n-1}(\{\overline{\varphi}_i\ x_i\}_{i=1}^n),\ \overline{k}\right],$$

где $\varphi_i\in\mathcal{A}_{\overline{B}}$, а $\overline{k}\in Q$. Отсюда имеем

(b) $$\Sigma_B\subseteq\Sigma'\subseteq\Sigma_{\overline{B}}$$

Из (b) получаем, что

(c) $$\Sigma_B\subseteq\Sigma_{\overline{B}}.$$

Из (c), так как B и $\overline{B}$ группы, учитывая первую часть доказательства Теоремы 3, находим, что B и $\overline{B}$ главноизотопные группы, и поэтому справедливы равенства

(d_1) $$\overline{B}(x_1,\ x_2)=B[B(x_1,\ \overline{e}^{(-1)}),\ x_2]=B[B(x_1,t),\ x_2],\ \text{и}$$

(d_2) $$\overline{B}^{n-1}(x_1^n)=B\left[\overset{n-2}{B}(\{B(x_1,\ \overline{e}^{(-1)})\}_{i-1}^{n-1}),\ x_n\right]=$$
$$=B\left[\overset{n-2}{B}(\{B(x_i,\ t)\}_{i=1}^{n-1})\ x_n\right].$$

Учитывая (d_1) и (d_2) в (0), получаем

(d) $$C(x_1^n)=B\left[B\left\{\overline{B}^{n-1}(\{\overline{\varphi}_i\ x_i\}_{i=1}^n),\ t\right\},\ \overline{k}\right]=B\left[\overline{B}^{n-1}(\{\varphi_i\ x_i\}_{i=1}^n),\ h\right];$$

$\varphi_i\in\mathcal{A}_B$, $h\in Q$. Таким, образом, справедливо следующее равенство:

($\overline{o}$) $$C(x_1^n)=B\left[\overline{B}^{n-1}(\{\varphi_i\ x_i\}_{i=1}^n,\ h\right[,\ \varphi_i\in\mathcal{A}_B,\ h\in Q.$$

Так как C из ($\overline{o}$) и ($\overline{o}$) одна и та же квазигруппа, и C любая из $\Sigma_{\overline{B}}$, то справедливо положение

($\overline{b}$) $$\Sigma_{\overline{B}}\subseteq\Sigma_B.$$

Наконец, из (b) и ($\overline{b}$) получаем, что $\Sigma_B=\Sigma_{\overline{B}}=\Sigma'$.

Следствие 1. Если система Σ максимальна, то она имеет вид Σ_B из (9).

Действительно, любая операция из Σ, на основании теоремы 2, имеет вид (7), где B-группа. Следовательно $\Sigma\subseteq\Sigma_B$. Так как Σ-максимальная система, то $\Sigma=\Sigma_B$.

Следствие 2. Любая максимальная $1A$-система является iA-системой и для любого $i\in\{2,\ldots,n\}$.

Это утверждение доказаывается проверкой; см. текст в 6, предшествующий теореме 4.

Учитывая свойство P6, как и в бинарном случае (см [1] стр. 234), получаем, что спроведливо и следующее положение:

Следствие 3. Число операции из максимальной iA-системы Σ_B, $i\in\{1,\dots,n\}$, определенных на конечном множестве Q состоящему из m элементов, равно $m\cdot f^n$, где $f=k_{\mathcal{A}_B}$.

Следствие 4. Две максимальные iA-системы, либо не имеют общих элементов, либо совпадают.

Доказательство. Предположим, что $C\in\Sigma_B\cap\Sigma_{\bar B}$. Тогда C выражается через B и $\bar B$ образом (o) и $(\bar o)$ из доказательства теоремы 4, и справедливо равенство

$$(\bar{\bar o})\qquad B\left[\overset{n-1}{B}\left(\{\varphi_i\, x_i\}_{i=1}^{n}\right),\ k\right]=\bar B\left[\overset{n-1}{\bar B}\left(\{\bar\varphi_i\, x_i\}_{i=1}^{n}\right),\ \bar k\right].$$

Учитывая (8_1), полагая $x_3=\cdots=x_n=e$, где e-единица группы B, из $(\bar{\bar o})$ получим

$$B(\varphi_1 x_1,\ R\ \varphi_2 x_2)=\bar B(\bar\varphi_1 x_1,\ \bar R\bar\varphi x_2).$$

Таким образом B и $\bar B$ главноизотопные группы, и поэтому справедливы равенства (d_1) и (d_2), и равенства

$$(\bar{\bar d}_1)\qquad B(x_1,\ x_2)=\bar B\,[\bar B(x_1,\ e^{-1}),\ x_2]$$

$$(\bar{\bar d}_2)\qquad \overset{n-1}{B}\,(x_1^n)=\bar B\left[\overset{n-2}{B}\left(\{B(x_i,\ e^{-1})\}_{i=1}^{n-1}\right),\ x_n\right].$$

Наконец, если A любая операция из $\Sigma_{\bar B}$, учитывая (d_1) и (d_2), образом (d) получаем, что $\Sigma_{\bar B}\subseteq\Sigma_B$. Таким же образом, учитывая $(\bar d_1)$ и $(\bar d_2)$ получаем, что $\Sigma_B\subseteq\Sigma_{\bar B}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белоусов В. Д., *Ассоциативные в целом системы квазигупп*, Мат. сб. 55. (97) № 2 (1961), 221—236.

[2] Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп и луп*, Наука, Москва, 1967.

[3] Белоусов В. Д., *n-Арные квазигруппы*, „Штиница“, Кишинев, 1972.

[4] Hosszú M., *Algebrai rendszereken értelmezett függvény egyenletek* I—II, MTA III. Ozst. Közl., 12 (1962), 303—315, 13 (1963), 1—15.

[5] Глускин Л. М., *О позиционных оперативах*, Доклады Академ. Наук ССР 157, 4 (1964), 767—770.

[6] Ушан Я., *Обобщение теоремы В. Д. Белоусова о четырех квазигруппах на тернарный случай*, Билтен на Друшт. на мат. и физ. од СРМ, кн. XX, 1969, 13—17.

[7] Ушан Я., *n-Арный аналогон теоремы Белоусова о чешырех квазигруппах*, Билтен на Друшт. на мат. и физ. од СР Македонија, кн. XXI, 5—17.

[8] Ушан Я., *Ассоциативные в целом системы тернарных квазигрупп, Тернарный аналогон теоремы Шауфлера*, Mathematica Balkanica, 1 (1971) 273—281.

[9] Ушан Я., *Ассоциативные в целом системы тернарных квазигрупп*, Mathematica Balcanika, 2 (1972) 270—287.

[10] Ушан Я., *Об одной системе функциональных уравнений общей н-арной ассоциативности на алгебре n-арных квазигрупп*, Math. Balk., 2 (1972), 288—295.