PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 19 (33), 1975, pp. 9—15

SUR LE THÉORÈME MERCERIEN DE ČAKALOV

S. Aljančić

(Reçu le 30 mai 1975)

1. Introduction et résultats

Supposons que

$$p_n \geqslant 0 \, (n=0, 1, \dots) \quad \text{et} \quad 0 < P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \to \infty \, (n \to \infty). \tag{1.1}$$

Soient

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \tag{1.2}$$

les moyennes pondérées de la suite de nombres réels (s_n) et posons

$$\tau_n(\lambda) = s_n + \lambda \sigma_n \tag{1.3}$$

où λ est un paramètre réel.

Alors on a le

Théorème (de Čakalov [1]). *Supposons que la suite* (p_n) *satisfait aux conditions* (1.1). *Si* $\lambda > -1$, *alors*

$$\tau_n(\lambda) \to (1+\lambda) s \Rightarrow s_n \to s \quad (n \to \infty)^{1)}. \tag{1.4}$$

Lorsque $p_n = 1$ $(n=0,1, \dots)$, c'est le théorème célèbre de J. Mercer [2]. I. Schur [3] a prouvé que dans ce cas particulier la condition $\lambda > -1$ est même nécessaire pour la validité du théorème de Mercer. Dans le cas général des moyennes pondérées, Čakalov a laissé ouverte la question sur la nécessité de la condition $\lambda > -1$.

Dans la présente note nous allons donner, en premier lieu, une nouvelle démonstration du théorème de Čakalov. Quant à la nécessité de la condition $\lambda > -1$, nous allons prouver qu'elle a lieu pour les moyennes pondérées σ_n qui, outre (1.1), satisfont à la condition supplémentaire

$$\frac{p_{n+1}}{P_n} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{1.5}$$

---

1) En vertu du théorème de Toeplitz (v.p. 2), l'implication inverse a lieu pour tout λ.

Cette dernière restriction est essentielle comme le démontre l'exemple des moyennes σ_n définies par $p_0 = P_0 = 2$, $p_n = 2^n$, $P_n = 2^{n+1} (n \geqslant 1)$. En effet, de (1.3) avec $\lambda = -2$ résulte alors $s_n = \tau_n(-2) - 2\tau_{n+1}(-2)$ et l'on vérifie aisément que l'implication (1.4) a lieu pour $\lambda = -2$.[1]

Nos démonstrations reposent sur la résolution explicite de l'équation (1.3) par rapport à (s_n) tant que fonction de (τ_n) et sur l'application du théorème classique de Toeplitz.

Théorème (de Toeplitz). *Soit* $[a_{n\nu}]$ *une matrice infinie donnée et posons*

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Alors,

1° $$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \leqslant M \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

2° $$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

3° $$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = 1$$

sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que

$$s_n \to s \Rightarrow t_n \to s \quad (n \to \infty).$$

Lemme 1. *Supposons que la suite* (p_n) *satisfait aux conditions* (1.1). *Alors* (1.3) *définit une transformation* $(s_n) \to (\tau_n(\lambda))$ *pour tout* λ, *dont l'inverse est donnée, lorsque* $\lambda \neq \lambda_k = -P_k/p_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *par*

$$s_n = \tau_n(\lambda) - \frac{\lambda}{P_n a_{n+1}(\lambda)} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu a_\nu(\lambda) \tau_\nu(\lambda), \tag{1.6}$$

pour tout $n = 0, 1, \ldots$, *où*[2]

$$a_n(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(1 + \lambda \frac{p_\nu}{P_\nu}\right).^{3)} \tag{1.7}$$

Lorsque $\lambda = \lambda_k$ (k fixe), nous allons supposer que la valeur λ_k n'apparaît dans la suite (λ_n) q'un nombre fini de fois[4]. Désignons par $K = K(k)$ le plus grand indice tel que $\lambda_K = \lambda_k$. Alors[5], on a pour $n \geqslant K$

---

[1] C'est à D. Arandjelović que nous devons ce contreexemple.

[2] Une fois pour toutes nous remarquons que sous $\prod_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu$ et $\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu$, lorsque $n = 0$, il faut entendre 1 et 0 respectivement.

[3] En particulier, si $p_n = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ on a $a_n(\lambda) = \binom{\lambda + n}{n}$.

[4] C'est bien rempli, pour tout k fixe, lorsque la condition (1.5) a lieu, car

$$\lambda_n = -\frac{P_n}{p_n} = -\frac{P_n}{p_{n-1}} \cdot \frac{P_{n-1}}{p_n} \leqslant -\frac{P_{n-1}}{p_n} \to -\infty \, (n \to \infty).$$

[5] Remarque analogue à celle dans[1] se rapportant à $\sum_{\nu=m+1}^{n} \alpha_\nu$ et $\prod_{\nu=m+1}^{n} \alpha_\nu$ pour $n = m$.

$$(1.6') \qquad s_n = \tau_n(\lambda_k) - \lambda_k \frac{P_K}{P_n a_{n+1}^{K+1}(\lambda_k)} \sigma_K - \frac{\lambda_k}{P_n a_{n+1}^{K+1}(\lambda_k)} \sum_{\nu=K+1}^{n} p_\nu a_\nu^{K+1}(\lambda_k) \tau_\nu(\lambda_k)$$

où $(n \geqslant m)$

$$(1.7') \qquad a_n^m(\lambda) = \prod_{\nu=m}^{n-1} \left(1 + \lambda \frac{p_\nu}{P_\nu}\right).$$

La suite $(a_n(\lambda))$ possède des propriétés remarquables:

Lemme 2. *Supposons que la suite (p_n) satisfait aux conditions* (1.1). *Alors, pour tout $n = 0, 1, \ldots$ et $n \to \infty$ respectivement,*

1° $P_n a_{n+1}(\lambda) = (1+\lambda) p_0 \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(1 + (1+\lambda)\frac{p_{\nu+1}}{P_\nu}\right)$;

2° $1 + \lambda \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{p_\nu}{P_\nu} a_\nu(\lambda) = a_n(\lambda)$;

3° $(1+\lambda) \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu a_\nu(\lambda) = P_n a_{n+1}(\lambda)$;

4° $a_n(\lambda) > 0$ *lorsque* $\lambda > -1$;

5° $a_n(\lambda) \nearrow \infty$ *lorsque* $\lambda > 0$;

6° $a_n(\lambda) \searrow 0$ *lorsque* $-1 < \lambda < 0$;

7° $P_n a_{n+1}(\lambda) \nearrow \infty$ *lorsque* $\lambda > -1$.

Lemme 3. *Posons*

$$(1.8) \qquad L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}}{P_n}.$$

Alors,

1° $a_n(\lambda)$ *est du signe constant à partir d'un certain rang pour tout*

$$-\frac{L+1}{L} < \lambda < -1;$$

2° $a_n(\lambda)$ *prend des valeurs positives et négatives une infinité de fois pour tout* $\lambda < -\frac{L+1}{L}$;

3° $P_n a_{n+1}(\lambda) \to 0 \ (n \to \infty)$ *pour tout* $-\frac{L+1}{L} < \lambda < -1$.

En particulier, lorsque (p_n) satisfait à la condition supplémentaire (1.5), *on a* 1° *et* 3° *pour tout $\lambda < -1$ et* 2° *ne peut avoir lieu.*

En vertu de (1.1) et de 4°, 3° et 7° du lemme 2, les éléments de la matrice

$$(1.9) \qquad a_{n\nu} = (1+\lambda) \frac{p_\nu a_\nu(\lambda)}{P_n a_{n+1}(\lambda)} \ (0 \leqslant \nu \leqslant n) \ \text{et} \ a_{n\nu} = 0 \ (\nu > n)$$

satisfont lorsque $\lambda > -1$ (donc, $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 0, 1, \ldots$) aux conditions du théorème de Toeplitz et il n'y a que de l'appliquer à (1.6) pour obtenir le résultat de Čakalov.

Théorème *Si la suite* (p_n) *satisfait aux conditions* (1.1) *et, en plus, à la condition* (1.5), *alors* $\lambda > -1$ *est une condition nécessaire pour la validité du théorème de Čakalov.*

En effet, si $\lambda < -1$ et si $\lambda \neq \lambda_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, le point de départ est la formule (1.6). En vertu de 3° du lemme 3 (avec $L=0$) la matrice (1.9) ne satisfait pas à la condition nécessaire 2° du théorème de Toeplitz. Par conséquent, l'implication (1.4) ne peut être vraie. Lorsque $\lambda = \lambda_k$ (donc $\lambda < -1$), on vient à la même conclusion en partant de la formule (1.6′), étant donné que 3° du lemme 3 implique $P_n a_{n+1}^{k+1}(\lambda_k) \to 0$ $(n \to \infty)$. Enfin, lorsque $\lambda = \lambda_0 = -1$, on procède de la même manière en utilisant le fait que

$$P_n a_{n+1}^1(-1) = P_n \prod_{\nu=1}^{n} \frac{P_\nu - p_\nu}{P_\nu} = P_n \prod_{\nu=1}^{n} \frac{P_{\nu-1}}{P_\nu} = P_0. \tag{1.10}$$

2. Démonstrations

Lemme 1. En multipliant (1.3) par $p_n a_n(\lambda)$ et en sommant cette relation de $n=0$ à n, on obtient

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu a_\nu(\lambda) \tau_\nu(\lambda) = \sum_{\mu=0}^{n} p_\nu a_\nu(\lambda) s_\nu + \lambda \sum_{\nu=0}^{n} \frac{p_\nu}{P_\nu} a_\nu(\lambda) \sum_{\mu=0}^{\nu} p_\mu s_\mu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu a_\nu(\lambda) s_\nu + \lambda \sum_{\mu=0}^{n} p_\mu s_\mu \sum_{\nu=\mu}^{n} \frac{p_\nu}{P_\nu} a_\nu(\lambda).$$

Or, d'après 2° du lemme 2, on a pour tout $0 \leqslant \mu \leqslant n$ $(n=0, 1, \ldots)$

$$\lambda \sum_{\nu=\mu}^{n} \frac{p_\nu}{P_\nu} a_\nu(\lambda) = a_{n+1}(\lambda) - a_\mu(\lambda),$$

de sorte que

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu a_\nu(\lambda) \tau_\nu(\lambda) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu a_\nu(\lambda) s_\nu + a_{n+1}(\lambda) \sum_{\mu=0}^{n} p_\mu s_\mu - \sum_{\mu=0}^{n} p_\mu s_\mu a_\mu(\lambda).$$

Par conséquent, on a pour tout λ[1])

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu a_\nu(\lambda) \tau_\nu(\lambda) = a_{n+1}(\lambda) P_n \sigma_n. \tag{2.1}$$

---

[1]) On peut démontrer (2.1) aussi par récurrence sur n:

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} p_\nu a_\nu(\lambda) \tau_\nu(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu a_\nu(\lambda) \tau_\nu(\lambda) + p_{n+1} a_{n+1}(\lambda) \tau_{n+1}(\lambda)$$

$$= a_{n+1}(\lambda) (P_n \sigma_n + p_{n+1} \tau_{n+1}(\lambda)) = a_{n+1}(\lambda) (P_{n+1} \sigma_{n+1} + \lambda p_{n+1} \sigma_{n+1})$$

$$= a_{n+1}(\lambda) \left(1 + \lambda \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}\right) P_{n+1} \sigma_{n+1} = a_{n+2}(\lambda) P_{n+1} \sigma_{n+1},$$

Les seuls zéros de $a_n(\lambda)\,(n=1, 2, \dots)$ étant les points finis parmis $\lambda_k = -P_k/p_k$ $(k=0, 1, \dots, n-1)$, il en résulte, en vertu de (1.3), la relation (1.6). Pour obtenir la relation correspondante lorsque $\lambda=\lambda_k$ (k fixe), nous allons, d'abord, écrire (2.1) sous la forme

$$a_{K+1}(\lambda)\,P_K\,\sigma_K + \sum_{\nu=K+1}^{n} p_\nu\, a_\nu(\lambda)\,\tau_\nu(\lambda) = a_{n+1}(\lambda)\,P_n\,\sigma_n \quad (n \geqslant K)$$

en supposant toujours $\lambda \neq \lambda_k$, Or,

$$a_n(\lambda) = a_m(\lambda)\, a_n^m(\lambda) \ (n \geqslant m;\ a_m^m = 1),$$

de sorte que

$$P_K\,\sigma_K + \sum_{\nu=K+1}^{n} p_\nu\, a_\nu^{K+1}(\lambda)\,\tau_\nu(\lambda) = a_{n+1}^{K+1}(\lambda)\,P_n\,\sigma_n.$$

En y faisant $\lambda \to \lambda_k$, on obtient

$$P_K\,\sigma_K + \sum_{\nu=K+1}^{n} p_\nu\, a_\nu^{K+1}(\lambda_k)\,\tau_\nu(\lambda_k) = a_{n+1}^{K+1}(\lambda_k)\,P_n\,\sigma_n \quad (n \geqslant K).$$

Étant donné que, d'après la définition même du nombre K, $a_{n+1}^{K+1}(\lambda_k) \neq 0$ pour tout $n \geqslant K$, il en résulte

$$\sigma_n = \frac{P_K\,\sigma_K}{P_n\, a_{n+1}^{K+1}(\lambda_k)} + \frac{1}{P_n\, a_{n+1}^{K+1}(\lambda_k)} \sum_{\nu=K+1}^{n} p_\nu\, a_\nu^{K+1}(\lambda_k)\,\tau_\nu(\lambda_k).$$

La formule (1.6′) est immédiate alors.

Lemme 2. 1° Par définition,

$$P_n\, a_{n+1}(\lambda) = P_n \prod_{\nu=0}^{n} \frac{P_\nu + \lambda\, p_\nu}{P_\nu} = (P_0 + \lambda\, p_0) \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{P_{\nu+1} + \lambda\, p_{\nu+1}}{P_\nu},$$

de sorte que

$$P_n\, a_{n+1}(\lambda) = (1+\lambda)\, p_0 \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(1 + (1+\lambda)\frac{p_{\nu+1}}{P_\nu}\right).$$

2° D'après (1.7) on a pour tout $\nu = 0, 1, \dots$

$$a_{\nu+1}(\lambda) - a_\nu(\lambda) = \lambda \frac{p_\nu}{P_\nu} \prod_{\mu=0}^{\nu-1} \left(1 + \lambda \frac{p_\mu}{P_\mu}\right),$$

c.-à.-d.

$$a_{\nu+1}(\lambda) - a_\nu(\lambda) = \lambda \frac{p_\nu}{P_\nu}\, a_\nu(\lambda) \tag{2.2}$$

et il n'y a que de sommer (2.2) de $\nu = 0$ à $\nu = n-1$.

3° En sommant (2.2) par parties on obtient

$$\lambda \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu a_\nu(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu (a_{\nu+1}(\lambda) - a_\nu(\lambda))$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\lambda)(P_\nu - P_{\nu-1}) + a_{n+1}(\lambda) P_n - a_0(\lambda) P_0$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu(\lambda) + a_{n+1}(\lambda) P_n - p_0 a_0(\lambda),$$

d'où l'affirmation.

4° est une conséquence légère de la représentation 1°.

5° $a_n(\lambda) \nearrow (\lambda > 0)$ résulte immédiatement de 2° les termes de la somme au premier membre étant nonnégatifs. Par conséquent, $a_n(\lambda) \geqslant a_0(\lambda) = 1$, de sorte que, en vertu de 2°,

$$a_n(\lambda) \geqslant 1 + \lambda \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{p_\nu}{P_\nu}.$$

Il en résulte $a_n(\lambda) \to \infty$, car, d'après le théorème classique d'Abel-Dini,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu = +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{p_\nu}{P_\nu} = +\infty \tag{2.3}$$

(voir p.ex. [4], IX Kapitel, § 39).

6° $a_n(\lambda) \searrow (-1 < \lambda < 0)$ résulte aussi de 2°, les termes de la somme au premier membre étant nonnégatifs et son facteur λ étant négatif. Or, $a_n(\lambda) > 0$, de sorte que $a_n(\lambda)$ converge, soit vers $a \geqslant 0$. Supposons que $a > 0$. Alors $a_n \geqslant a$ et $\lambda < 0$ implique

$$a_n(\lambda) \leqslant 1 + \lambda a \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{p_\nu}{P_\nu} \to -\infty (n \to \infty),$$

en vertu du théorème d'Abel-Dini. Contradiction. Donc, $a = 0$.

7° L'affirmation résulte de 3°. D'abord, les termes de la somme au premier membre étant nonnégatifs lorsque $\lambda > -1$, on en conclu que $P_n a_{n+1}(\lambda) \nearrow$. Par conséquent, en partant de 3°,

$$P_n a_{n+1}(\lambda) = (1+\lambda)\left(p_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu}{P_{\nu-1}} \cdot P_{\nu-1} a_\nu(\lambda)\right) \geqslant$$

$$\geqslant (1+\lambda)\left(p_0 + P_0 a_1(\lambda) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu}{P_{\nu-1}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant (1+\lambda)\left(p_0 + P_0 a_1(\lambda) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu}{P_\nu}\right).$$

En appliquant le théorème d'Abel-Dini, il en résulte que

$$P_n a_{n+1}(\lambda) \to +\infty (n \to \infty).$$

Lemme 3. 1° Étant donné que pour tout $\lambda > -\frac{a+1}{a}$ $(a \geqslant 0)$ il existe un $\varepsilon = \varepsilon_\lambda > 0$ (suffisamment petit), tel que

$$1 + (1+\lambda)x > 0 \text{ lorsque } 0 \leqslant x < a + \varepsilon,$$

on en conclu, en posant $x = \frac{p_{n+1}}{P_n}$ et $a = L$, que, à partir d'un certain rang n_0,

$$1 + (1+\lambda)\frac{p_{n+1}}{P_n} > 0.$$

2° Si $\lambda < -\frac{a+1}{a}$ il existe un $\varepsilon = \varepsilon_\lambda > 0$ tel que

$$1 + (1+\lambda)x < 0 \text{ lorsque } x > a - \varepsilon.$$

En posant, donc, $x = \frac{p_{n+1}}{P_n}$ et $a = L$, on en conclu que

$$1 + (1+\lambda)\frac{p_{n+1}}{P_n} < 0$$

pour une infinité de valeurs de n.

3° Or, il est bien connu (voir p.ex. [4], Kapitel VII, Bemerkungen und Beispiele 126(2), p. 222) que

$$0 \leqslant \alpha_n < 1 \text{ et } \sum \alpha_n = +\infty \Rightarrow \prod_{\nu=1}^{n} (1-\alpha_\nu) \to 0 \; (n \to \infty). \tag{2.4}$$

Si l'on pose $\alpha_n = -(1+\lambda)p_{n+1}/P_n$, en vertu de $-\frac{L+1}{L} < \lambda < -1$, la première des hypothèses dans (2.4) est bien satisfaite à partir d'un certain rang n_0.[1] Si $\lambda < -1$ c'est aussi le cas de la seconde, car, d'après le théorème d'Abel-Dini,

$$\sum p_{n+1} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{p_{n+1}}{P_n} = +\infty.$$

Par conséquent, notre affirmation résulte de 1° du lemme 2.

RÉFÉRENCES

[1] L. N. Čakalov, *Généralisation d'un théorème de Mercer sur la convergence*, Izvestija Mat. inst. Acad. bulgare sci. 1 (1954), 85 — 88.

[2] J. Mercer, *On the limits of real variants*, Proc. London Math. Soc. (2) 5 (1906), 206 — 224.

[3] I. Schur, *Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte*, Math. Annalen 74 (1913), 447 — 458.

[4] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* 2. Auflage Berlin 1924.

Proleterskih brigada 62
Beograd (Yougoslavie)

[1] Cela ne présente aucun inconvénient.