PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 19 (33), 1975, pp. 61—66

L'ESPACE VECTORIEL PSEUDO-BOOLÉEN GÉNÉRALISÉ

Coriolan Ghilezan

(Communiqué le 15 oktobre 1974)

Dans le travail [1] M. Michel Carvallo décrit l'espace vectoriel booléen des expression booléennes sur le corps $(\{0, 1\}, \oplus, \cdot)$ où les opération binaires sont „$\oplus$" et „$\cdot$" l'addition et la multiplication d'après le mod 2, de même que l'espace vectoriel postien sur le corps $(\{-1, 0, 1\}, \oplus, *)$ où l'opération binaire „$\oplus$" est une addition d'après le mod 3, tandis que l'opération binaire „$*$" minimum.

Dans ce travail, on élargit cette idée sur les expressions pseudo-booléennes généralisées (c'est-à-dire les expressions pseudo-booléennes) sur le corps commutatif $(P, +, \cdot)$.

Soit $(P, +, \cdot)$ le corps commutatif (ou un anneau commutatif à un élément neutre 1). L_p est un ensemble fini contenant au moins deux élément et $Lp \subset P$.

Introduisons les relations (les projections):

$$(1) \qquad [x_i]_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{pour } x_i = \alpha \\ 0, & \text{pour } x_i \neq \alpha, \ x_i, \ \alpha \in L_p, \end{cases}$$

pour les variables $x_1, \ldots, x_n$, où 0 est un élément neutre pour l'opération binaire „$+$", tandis que 1 est l'élément neutre pour l'opération binaire „$\cdot$" (si $L_p = \{0, 1\}$ alors $[x]_0 = \bar{x}$, $[x]_1 = \bar{\bar{x}}$).

Directement de (1) résulte que pour chaque $x_1, \ldots, x_n$, $\alpha, \beta \in Lp$ valent les propriétés suivantes:

$$\text{(i)} \quad [x_i]_\alpha [x_i]_\alpha = [x_i]_\alpha,$$

$$(2) \qquad \text{(ii)} \quad [x_i]_\alpha [x_i]_\beta = 0 \quad \text{si et seulement si } \alpha \neq \beta,$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{\alpha = Lp} [x_i]_\alpha = 1,$$

$$\text{(iv)} \quad \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Lp^n} [x_1]_{\alpha_1} [x_2]_{\alpha_2} \ldots [x_n]_{\alpha_n} = 1, \quad \text{où } L_p^n \text{ est le produit}$$

cartésien de l'ensemle Lp,

$$\text{(v)} \quad x_i = \sum_{\alpha \in Lp} \alpha [x_i]_\alpha, \quad x_i^n = \sum_{\alpha \in Lp} \alpha^n [x_i]_\alpha,$$

où $x_i^n = x_i \cdot x_i \ldots x_i$ (n-fois).

Définition 1.

1. Les constantes de l'ensemble P sont des expressions pseudo-booléennes généralisées.

2. Les variables

$$[x_1]_\alpha,\ [x_2]_\alpha,\ \ldots,\ [x_n]_\alpha,\ \alpha\in L_p$$

sont les expressions pseudo-booléennes généralisées.

3. Si A et B sont des expressions pseudo-booléennes généralisées, alors $A+B$, $A\cdot B$ sont aussi des expressions pseudo-booléennes généralisées.

4. Les expressions pseudo-booléennes généralisées se forment par l'application 1., 2. et 3. dans un nombre fini de reprises.

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble des expressions pseudo-booléennes généralisées. Directment de (1), (2) et de la définition résulte que $(\mathcal{P},\ +,\ \cdot)$ est un anneau commutatif contenant l'élément neutre 1.

Définition 2. L'application f de l'ensemble L_p en P, c'est-à-dire

$$f\colon L_p^n\rightarrow P \tag{3}$$

nous l'appelons une fonction pseudo-boolléenne généralisée.

Théorème 1. *Pour chaque fonction pseudo-booléenne généralisée f vaut l'égalité*

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\sum_{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)\in L_p{}^n} f(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)\,[x_1]_{\alpha_1}\cdot[x_2]_{\alpha_2}\ldots[x_n]_{\alpha_n} \tag{4}$$

(c'est-à-dire, la fonction f peut être représentée dans une forme canonique).

Démonstration: Soit

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n)\neq\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n)= \tag{5}$$

$$=\sum_{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)\in L_p{}^n} f(x_1,\ \ldots,\ x_n)\ [x_1]_{\alpha_1}\cdot[x_2]_{\alpha_2}\ldots[x_n]_{\alpha_n}.$$

Pour chaque vecteur $(a_1,\ \ldots,\ a_n)$ de l'ensemble L_p^n

$$\varphi(a_1,\ \ldots,\ a_n)= \tag{6}$$

$$=\sum_{(n_1,\ \ldots,\ \alpha_n)\in L_p{}^n} f(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)\,[a_1]_{\alpha_1}\cdot[a_2]_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot[a_n]_{\alpha_n}.$$

En base de la relation (1) résulte

$$[a_1]_{\alpha_1}\cdot[a_2]_{\alpha_2}\ldots[a_n]_{\alpha_n}=\begin{cases}1, & \text{pour } (a_1,\ \ldots,\ a_n)=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)\\ 0, & \text{pour } (a_1,\ \ldots,\ a_n)\neq(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n).\end{cases} \tag{7}$$

Donc, tous les produits

$$[a_1]_{\alpha_1}\cdot[a_2]_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot[a_n]_{\alpha_n},\ (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)\in L_p^n,$$

sont égaux à 0, excepte l'un, qui est égal à 1, quand

$$(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)=(a_1,\ \ldots,\ a_n). \tag{8}$$

Par conséquent, en base de (6), (7) et (8) résulte que

$$\varphi(a_1, \ldots, a_.) = f(a_1, \ldots, a_n)$$

pour chaque vecteur $(a_1, \ldots, a_n)$ de l'ensemble L_p^n, ce qui est en contradiction aves (5). Donc

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n), \ (x_1, \ldots, x_n) \in L_p^n.$$

Ainsi, nous avons démontré le théorème,

Soit $p(x_1, \ldots, x_n)$ un polynome de l'ordre k, c'est-à-dire

$$p(x_1, \ldots x_n) = \sum_{k_1 + \cdots + k_n \leq k} c_{k_1 \ldots k_n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}, \tag{9}$$

où les coefficients $c_{k_1 \ldots k_n}$ appartiennent à l'ensemble P, et les variables $x_1, \ldots, x_n$ à L_p et $x_i^{k_i} = x_i x_i \ldots x_i$ (k_i – fois).

Théorème 2. *Chaque polynome* (9) *de l'ordre* k, *peut être transformé en une expression pseudo-booléenne généralisée.*

Démonstration: Si on substitue (V) dans le polynome (9), le polynome se transforme en

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1 + \cdots + k_n \leq k} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} [x_1]_{\alpha_1} [x_2]_{\alpha_2} \cdots [x_n]_{\alpha_n},$$

qui est une expression pseudo-booléenne généralisée. Ainsi, le théorème est démontré.

Théorème 3. *Chaque expression pseudo-bnoléenne généralisée*, $p(x_1, \ldots, x_m)$. $m \leq n$ *peut être transformée en* (*forme canonique*)

$$p(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p{}^n} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} [x_1]_{\alpha_1} \cdot [x_2]_{\alpha_2} \cdot \ldots [x_n]_{\alpha_n}, \tag{10}$$

où $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ *sont les constantes de l'ensemble* P.

Démonstration: Soit p une expression pseudo-booléenne généralisée. Utilisant les propriétés des expressions pseudo-booléenne généralisée, l'expression donnée peut être transformée en (10), et ceci si p a justement la forme (10), la démonstration prend fin; si l'expression p n'a pas la forme (10), alors il y a au moins un produit p_i, c'est-à-dire

$$p_i = c_i [x_{i_1}]_{\alpha_{i_1}} \cdot [x_{i_2}]_{\alpha_{i_2}} \cdots [x_{ij}]_{\alpha_{ij}},$$

qui ne contienne tous les variables. Si p_i ne contient les variables $[x_k]_\alpha$, $\alpha \in L_p$, ont peut écrire

$$p_i = p_i \sum_{\alpha \in L_p} [x_k]_\alpha = \sum_{\alpha \in L_p} p_i [x_k]_\alpha.$$

Par conséquent, chaque produit peut être transformé de manière à contenir une des variables $[x_k]_\alpha$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha \in L_p$.

Ainsi on a démontré le théorème.

Soit $\mathcal{P}_n$ un ensemble des expressions pseudo-booléennes généralisées en forme canonique, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_n = \{p(x_1, \ldots, x_n) \mid p(x_1, \ldots x_n) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p{}^n} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} [x_1]_{\alpha_1} \ldots [x_n]_{\alpha_n},\ c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \in P\}.$$

L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel (un espace vectoriel pseudo-booléen généralisé) sur le corps ou modul sur l'anneau $(P, +, \cdot)$ avec les opérations binaires „$+$" et „$\cdot$", qui sont définies de la manière suivante: si

$$P = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p{}^n} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} [x_1]_{\alpha_1} \cdot [x_2]_{\alpha_2} \ldots [x_n]_{\alpha_n},$$

$$p' = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p{}^n} c'_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} [x_1]_{\alpha_1} \cdot [x_2]_{\alpha_2} \ldots [x_n]_{\alpha_n}$$

alors

$$p + p' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p{}^n} (c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} + c'_{\alpha_1 \ldots \alpha_n})\ [x_1]_{\alpha_1} \cdot [x_2]_{\alpha_2} \ldots [x_n]_{\alpha_n}$$

$$\alpha \cdot p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p{}^n} \alpha c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} [x_1]_{\alpha_1} \cdot [x_2]_{\alpha_2} \ldots [x_n]_{\alpha_n},$$

Une base B dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n$ est un ensemble des expressions

$$[x_1]_{\alpha_1} \cdot [x_2]_{\alpha_2} \ldots [x_n]_{\alpha_n}, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p^n$$

c'est-à-dire

$$B = \{f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} / f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = [x_1]_{\alpha_1} \ldots [x_n]_{\alpha_n}, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p^n\}.$$

Le nombre des éléments dans la base B est p^n.

La substitution des bases.

Soit une base $B' = \{e_1, e_2, \ldots, e_{p^n}\}$ où les éléments sont linéairement indépendents. En base de (4), les éléments

$$e_i = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p{}^n} \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) [x_1]_{\alpha_1} \ldots [x_n]_{\alpha_n}, \ i = 1, 2, \ldots, p^n, \tag{11}$$

sont représentés dans la base B.

La substitution est possible si la matrice

$$A = \| \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \|, \quad i = 1, \ldots p^n, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p^n,$$

est non-singulière.

Soit f représenté dans les bases B et B', c'est-à-dire:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p{}^n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\ [x_1]_{\alpha_1} [x_2]_{\alpha_2} \ldots [x_n]_{\alpha_n} \tag{12}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{p^n} a_i e_i.$$

De (11) et (12) résulte

$$\sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p^n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) [x_1]_{\alpha_1} \ldots [x_n]_{\alpha_n}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p^n}}^{p^n} a_i \varphi_i (\alpha_1 \ldots \alpha_n) [x_1]_{\alpha_1} \ldots [x_n]_{\alpha_n}$$

d'où résulte

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{p^n} a_i \varphi_i (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p^n, \tag{13}$$

c'est-à-dire un système d'équations avec p^n inconnues ayant des coefficients du corps commutatif (ou de l' anneau) P.

Exemple 1. Soit $(R, +, \cdot)$ des nombres réels.

a) Si $L_p = \{0, 1\}$, $(p = 2)$, alors $\mathcal{P}$ est un ensemble des expressions pseudo-booléennes, tandis que $\mathcal{P}_n$ un ensemble des expressions pseudo-booléennes dans une forme canonique (voir [2], [3]).

b) Si $L_p \subset R$, alors $\mathcal{P}$ est un ensemble des expressions pseudo-booléennes généralisées, tandis que $\mathcal{P}_n$ un ensemble des expressions pseudo-booléennes généralisées dans une forme canonique (voir [2], [3]).

$$(p, p') \overset{\text{def}}{=} \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p^n} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} c'_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}, \quad \| p \| \overset{\text{def}}{=} \Big(\sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L_p^n} c^2_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Donc, la base B est orthogonale, et pour chaque $x B$, $\| x \| = 1$.

Soit donné le polynome réel

$$P(x, y) = x^2 y - 3x + 3, \quad (x, y) \in L_3^2,$$

où $L_3 = \{0, 1, 3\}$ $(+, -, \cdot$ sont des opérations arithmétiques ordinaires).

En base de (V), on obtient.

Substituons les relations (14) dans le polynome $P(x, y)$. On obtient une expression pseudo-booléenne généralisée:

$$P(x, y) = [x]_1 [y]_1 + 9 [x]_3 [y]_1 + 3 [x_1] [y]_3 + 27 [x]_3 [y]_3 - 3 [x]_1 - 9 [x]_3 + 3.$$

En base du théorème 3., on transforme l'expression pseudo-booléenne généralisée en une forme canonique.

Donc:

$$P(x, y) = 3 [x]_0 [y]_0 + 3 [x]_0 [y]_1 + 3 [x]_0 [y]_3 + [x]_1 [y]_1$$
$$+ 3 [x]_1 [y]_3 - 6 [x]_3 [y]_0 + 3 [x]_3 [y]_1 + 21 [x]_3 [y]_3 .$$

Exemple 2. Soit $(\{0, 1\}, \oplus, \cdot)$ le corps où les opérations binaires $\oplus$ et. sont l'addition et la multiplication mod 2. La fonction $f: L_2^n \to L_2$, en base du théorème 1., peut être représentée

$$f(x, y) = f(0, 0) \bar{x} \bar{y} \oplus f(0, 1) \bar{x} y \oplus f(1, 0) x \bar{y} \oplus f(1, 1) x y.$$

En base de (12), (13) et (11) la fonction f représentée dans les bases $B_1=\{1, x, y, xy\}$. et $B_2=\{1, \bar{x}, y, \bar{x}y\}$ a les formes

$$f(x, y)=f(0, 0)\oplus[f(0, 0)\oplus f(1. 0)]x\oplus[f(0, 0)\oplus f(0, 1)]y\oplus$$
$$\oplus[f(0, 0)\oplus f(0, 1)\oplus f(1, 0)\oplus(1, 1)]xy$$

et

$$f(x, y)=f(1, 0)\oplus[f(1, 0)\oplus f(0, 0)]\bar{x}\oplus[f(1, 0)\oplus f(1, 1)]y\oplus$$
$$\oplus[f(0, 0)\oplus f(0, 1)\oplus f(1, 0)+f(1, 1)]\bar{x}y \quad \text{(voir [4])}.$$

Exemple 3. Soit $(\{0, 1, 2, 3,\}, \oplus, \cdot)$ l'anneau où les opérations binaires $\oplus$ et sont l'addition el la multiplication mod 4.

Chaque fonction $f: L_4^2 \to L_4$, ($L_4=\{0, 1, 2, 3\}$), en base du théorème 1., peut être représentée

$$f(x, y)=\sum_{(\alpha_1, \alpha_2)\in L_4^2} f(\alpha_1, \alpha_2)[x]_{\alpha_1}[y]_{\alpha_2}.$$

En base de (11), (12) et (13), la fonction f représentée dans la base

$$\{1, [x]_0, [x]_1, [x]_2, [y]_0, [y]_1, [y]_2, [x]_0[y]_0, [x]_0[y]_1, [x]_0[y]_2, [x]_1[y]_0,$$
$$[x]_1[y]_1, [x]_1[y]_2, [x]_2[y]_0, [x]_2[y]_1, [x]_2[y]_2\}$$

a la forme

$$\begin{aligned}
f(x, y)=f(3, 3)&+[f(0, 3)+3f(3, 3)][x]_0+[f(1, 3)+3f(3, 3)][x]_1\\
&+[f(2, 3)+3f(3, 3)][x]_2+[f(3, 0)+3f(3, 3)]\,[y]_0\\
&+[f(3, 1)+3f(3, 3)][y]_1+[f(3, 2)+3f(3, 3)][y]_2\\
&+[f(0, 0)+3f(0, 3)+3f(3, 0)+f(3, 3)][x]_0[y]_0\\
&+[f(0, 1)+3f(0, 3)+3f(3, 1)+f(3, 3)][x]_0[y]_1\\
&+[f(0, 2)+3f(0, 3)+3f(3, 2)+f(3, 3)][x]_0[y]_2\\
&+[f(1, 0)+3f(1, 3)+3f(3, 2)+f(3, 3)][x]_1[y]_0\\
&+[f(1, 1)+3f(1, 3)+3f(3, 1)+f(3, 3)][x]_1[y]_1\\
&+[f(1, 2)+3f(1, 3)+3f(3, 2)+f(3, 3)][x]_1[y]_2\\
&+[f(2, 0)+3f(2, 3)+3f(3, 0)+f(3, 3)][x]_2[y]_0\\
&+[f(2, 1)+3f(2, 3)+3f(3, 1)+f(3, 3)][x]_2[y]_1\\
&+[f(2, 2)+3f(2, 3)+3f(3, 2)+f(3, 3)][x]_2[y]_2
\end{aligned}$$

(Suivent les differentes partiels des fonctions pseudo-booléennes généralisées).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Carvallo, *Espaces vectoriels booléens et postiens. Formules d'interpolation*, G. R. Acad. Sc. Paris, t. 272 (24 mai 1971.)

[2] Ghilezan, *Quelques généralisations de la programmation pseudo-booléenne*, Mathematica Balkanica 1 (1971) 93—104.

[3] P. Hammer et S. Rudeanu, *Méthodes booléennes en recherche opérationnelle*, Dunod, (1970), Paris

[4] M. Stojaković, *On the exponential properties of the implication*, Publ. Inst. Math. Beograd, tome 13 (27), 1972.