

## DER WIDERSTAND EINES ELLIPSOIDES BEI DER BEWEGUNG IN RICHTUNG DER ROTATIONSACHSE IN EINER ROTIERENDEN FLÜSSIGKEIT

*Svetislav M. Čantrak*

(Dargestellt am 6. November 1974)

### 1. Einleitung

Die Strömungen in rotierenden Systemen besitzen interessante Eigenschaften, von denen manche ursprünglich durch die Experimente bemerkt und danach auch theoretisch erklärt wurden. Die Bewegungsgrundgleichungen einer rotierenden Flüssigkeit, ihre dimensionslose Form und die Analyse des Wertes der Ekmanschen und Rossbyschen Zahl [1] geben die Bedingungen bei welchen physikalisch berechtigt ist, die Strömungsvorgänge mit der linearen oder nicht-linearen Theorie einer zähen oder reibungsfreien rotierenden Flüssigkeit zu beschreiben. Die Strömungen, die als Folge einer langsamen relativen Bewegung eines Körpers in einer rotierenden Flüssigkeit entstehen, werden mit linearen Bewegungsgleichungen [1] definiert, denn für kleine relative Geschwindigkeit des Körpers die Rossby Zahl ist genug klein (viel kleiner als eins), so daß wir nichtlineare, inertielle Glieder in diesem Fall vernachlässigen können. Wenn dabei die Flüssigkeit als reibungsfrei betrachtet wird, entsteht dann die in der Literatur [1] und [3] bekannte instationäre oder stationäre geostrophische Strömung. Indessen, wegen der Vernachlässigung der Zähigkeit in einzelnen Teilen des Strömungsgebietes entstehen physikalisch unreaale Vorgänge wie z. B. eine singuläre Zylinderströmungsfläche, derer Achse parallel zur Rotationsachse [3] ist, die das langsam bewegte Ellipsoid umhüllt, oder die erhebliche Abweichung von der Realität in der Nähe der Oberfläche des obengennanten umströmten Ellipsoides.

Im ersten Fall zeigt Stewartson, daß die Zähigkeit in der Nähe des Zylinders nicht vernachlässigt werden kann und daß die Strömung in diesem Gebiet die Eigenschaften der Grenzschichtströmungen hat. Stewartson gibt die Größenordnung der Dicke dieser Grenzschicht [3] (Stewartson layer).

Im zweiten Fall kann man die Zähigkeit in der Nähe der Oberfläche des Körpers auch nicht vernachlässigen, denn die Zusammenwirkung zwischen der Zähigkeitskräften und der inertialen Corioliskraft beschränkt den Einfluß der Zähigkeit auf das enge Gebiet der Flüssigkeit in der Nähe der Körperober-

fläche. So bildet sich eine dünne Grenzschicht (Ekman-layer) [1] aus, in der der Einfluß der Zähigkeitskräfte berücksichtigt werden muß. Außerhalb dieser dünnen Schicht kann der Zähigkeitseinfluß vernachlässigt werden. Die Berechnung einer solchen Grenzschicht wird in [2] gegeben.

Djordjević [2] hat die Grenzschichtgleichungen für eine beliebige, glatte sich durch die rotierende Flüssigkeit langsam bewegte Fläche abgeleitet, und er hat diese Gleichungen im Falle einer ruckartigen Bewegung aus der Ruhe bei beliebigen Außengeschwindigkeiten gelöst.

Das Ziel in der vorliegenden Arbeit ist, Ergebnisse aus [2] mittels Stewartsons Außengeschwindigkeiten [3] auf den Fall eines Ellipsoides das sich mit geringer Relativgeschwindigkeit in der rotierenden Flüssigkeit in Richtung der Rotationsachse bewegt, anzuwenden.

## 2. Geschwindigkeitsfeld

Betrachten wir das Ellipsoid, das sich in der relativen Ruhe in einer Flüssigkeit befindet, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert. Die Flüssigkeit ist in Richtung der Rotationsachse unendlich ausgedehnt. Die Längen der Hauptachsen des Ellipsoides sind  $2a$ ,  $2b$  und  $2c$ . Die Achse, die die Länge  $2c$  hat, ist parallel zur Rotationsachse der Flüssigkeit. Die Gleichung des Ellipsoides im kartesischen Orthogonalkoordinatensystem  $Oxyz$ , dessen Koordinatenursprung im Mittelpunkt des Ellipsoides ist, lautet  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ , wobei wir, wegen der Bestimmtheit, voraussetzen müssen, daß  $a > b$  [3] ist. Die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse werden immer längs der Hauptachsen des Ellipsoides  $2a$ ,  $2b$  und  $2c$  gerichtet.

Im Zeitpunkt  $t=0$  wird das Ellipsoid ruckartig in Bewegung parallel zur Rotationsachse mit einer nach Richtung und Betrag konstanten, geringen Relativgeschwindigkeit  $W_0$  gesetzt. Es wird eine stationäre Umströmung des Ellipsoides erreicht und eingestellt. Führen wir nun räumliche elliptische Koordinaten  $(\lambda, \mu, \nu)$  ein, werden dann rechtwinklige, krummlinige Koordinaten und die entsprechende Geschwindigkeitskomponenten [2]

$$q_1 = \mu, \quad q_2 = \nu, \quad q_3 = \lambda; \quad u = v_\mu, \quad v = v_\nu, \quad w = v_\lambda.$$

Mit  $\gamma = \gamma(\mu, \nu)$  wird der Winkel zwischen der Flächennormale im Punkt  $(\mu, \nu, 0)$  der Ellipsoidefläche und der Rotationsachse bezeichnet. Hierbei sind  $V_\mu$ ,  $V_\nu$  und  $V_\lambda$  die Außengeschwindigkeiten. In diesem Fall ist aber nach Stewartson [3] nur eine für einen auf dem Ellipsoid befindlichen Beobachter Außengeschwindigkeitskomponente von Null verschieden. Dementsprechend werden die bekannten Transformationsformeln der kartesischen und elliptischen Koordinaten [4] eingeführt. Die Außengeschwindigkeit wird in folgender Form

$$(1) \quad V_\nu = \mp \frac{W_0}{aE} \left[ \frac{rb^2(a^2 + \mu)(a^2 + \nu) - na^2(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)}{mnr - r(a^2 + \mu)(a^2 + \nu) + n(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

dargestellt, wobei  $m = a^2 - b^2$ ,  $n = a^2 - c^2$ ,  $r = b^2 - c^2$  und  $E$ -volles elliptisches Integral zweiter Ordnung des Moduls  $k = (a^2 - b^2)^{1/2}/a$ , sind. Das Zeichen „-“ gilt für  $\cos \gamma > 0$  und „+“ für  $\cos \gamma < 0$ .

Die Grenzschichtgeschwindigkeiten [2] für die Außengeschwindigkeit (1) werden

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} v_\mu &= -V_v e^{-\eta\sqrt{\cos\gamma}} \sin(\eta\sqrt{\cos\gamma}), \\ v_\nu &= V_v [1 - e^{-\eta\sqrt{\cos\gamma}} \cos(\eta\sqrt{\cos\gamma})] \end{aligned} \right\} 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

und

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} v_\mu &= V_v e^{-\eta\sqrt{-\cos\gamma}} \sin(\eta\sqrt{-\cos\gamma}), \\ v_\nu &= V_v [1 - e^{-\eta\sqrt{-\cos\gamma}} \cos(\eta\sqrt{-\cos\gamma})] \end{aligned} \right\} \frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi.$$

Die neue Variable  $\eta = \lambda \sqrt{\omega/v^*}$  wurde eingeführt, wobei  $v^*$  die konstante kinematische Zähigkeit ist.

Die Geschwindigkeitskomponente  $v_\lambda$  wird aus der Kontinuitätsgleichung bestimmt

$$(4) \quad v_\lambda = \int_0^\lambda f(\lambda, \mu, \nu) d\lambda,$$

wobei

$$f(\lambda, \mu, \nu) = -\frac{1}{H_\mu H_\nu} \left( H_\nu \frac{\partial v_\mu}{\partial \mu} + v_\mu \frac{\partial H_\nu}{\partial \mu} + H_\mu \frac{\partial v_\nu}{\partial \nu} + v_\nu \frac{\partial H_\mu}{\partial \nu} \right)$$

bedeutet. Die Laméschen Koeffizienten, da die Werte von  $\lambda$  für Punkte innerhalb der Grenzschicht sehr klein sind, haben die Form  $H_\mu = H_\mu(\mu, \nu)$ ,  $H_\nu = H_\nu(\mu, \nu)$  und  $H_\lambda = 1$ . Mit den Zeichen

$$a_k = a^2/4mn(a^2 + k), \quad b_k = -b^2/4mr(b^2 + k) \quad \text{und} \quad c_k = c^2/4nr(c^2 + k)$$

erhält man

$$H_k(\mu, \nu) = [a_k(a^2 + l) + b_k(b^2 + l) + c_k(c^2 + l)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial l} = \frac{a_k + b_k + c_k}{2H_k}$$

mit  $k, l = \mu, \nu$  und  $k \neq l$ . Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial v_\mu}{\partial \mu}$  und  $\frac{\partial v_\nu}{\partial \nu}$  werden leicht aus (2) und (3) gewonnen.

Außerhalb der Grenzschicht entsteht reine geostrophische Bewegung [3] und die Corioliskraft [2] nimmt auf der Ellipsoidefläche wegen der Zähigkeit auf Null ab. Hierin liegt die Ursache für die Entstehung der  $v_\mu$ -Komponente in der Grenzschicht. Der Wert und das Zeichen der Ableitung der Geschwindigkeit  $v_\mu$  auf dem Ellipsoid werden aus den Ausdrücken (2) und (3) gewonnen

$$(5) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial v_\mu}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} &= -V_v \sqrt{\frac{\omega}{v^*}} \sqrt{\cos\gamma}, \quad 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial v_\mu}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} &= V_v \sqrt{\frac{\omega}{v^*}} \sqrt{-\cos\gamma}, \quad \frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi. \end{aligned} \right\}$$

Hieraus ziehen wir mittels (1) den Schluß, daß diese Ableitung in jedem Punkt der Ellipsoidesfläche größer als Null oder Null gleich ist. Das bedeutet, daß die Grenzschicht auf dem Ellipsoid keine Ablösungspunkte hat, so daß wir den Gesamtwiderstand bei einer solchen Bewegung des Ellipsoides berechnen können.

### 3. Der Widerstand bei der Bewegung des Ellipsoides

Die Komponenten des Spannungstensors in elliptischen Koordinaten können wir auf die folgende Weise ausdrücken (über  $k$  und  $l$  wird nicht summiert)

$$(6) \quad p_{kk} = -p + 2\eta^* \left( \frac{1}{Hk} \frac{\partial v_k}{\partial k} + \frac{v_l}{H_k H_l} \frac{\partial H_k}{\partial l} \right),$$

$$p_{kl} = \eta^* \left[ \frac{1}{H_l} \frac{\partial v_k}{\partial l} + \frac{1}{H_k} \frac{\partial v_l}{\partial k} - \frac{1}{H_k H_l} \left( v_k \frac{\partial H_k}{\partial l} + v_l \frac{\partial H_l}{\partial k} \right) \right],$$

wobei  $k, l = \mu, \nu, \lambda$   $l \neq k$ ,  $\frac{\partial H_k}{\partial \lambda} = \frac{\partial H_\lambda}{\partial k} = 0$  und  $\eta^*$  die konstante dynamische Zähigkeit der Flüssigkeit darstellt. Die Werte der Geschwindigkeitskomponenten und ihrer Ableitungen auf der Ellipsoidesfläche können wir aus (2), (3) und (4) erhalten

$$v_k|_{\lambda=0} = \frac{\partial v_k}{\partial l} \Big|_{\lambda=0} = 0, \quad \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \equiv f(\lambda, \mu, \nu)|_{\lambda=0} = 0,$$

$$\frac{\partial v_\nu}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \mp \frac{\partial v_\mu}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \quad (, - " \text{ für } \cos \gamma > 0, \text{ „ } + " \text{ für } \cos \gamma < 0),$$

wobei  $k = \mu, \nu, \lambda$ ,  $l = \mu, \nu$ , und  $\frac{\partial v_\lambda}{\partial l} = \int_0^\lambda \frac{\partial}{\partial l} f(\lambda, \mu, \nu) d\lambda$ , sind. Der Ausdruck

$\frac{\partial v_\mu}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}$  ist aus (5) bekannt.

Nach dem Einsetzen dieser Werte in (6) erhalten wir die Spannungen in jedem Punkt der Ellipsoidesfläche und nach einer Projektion der Spannungskomponenten auf die vertikale  $z$ -Achse erhält man den Gesamtwiderstand bei einer solchen Bewegung des Ellipsoides

$$(7) \quad F_w = \int_A \left( -p \cos \gamma + \eta^* \frac{\partial v_\mu}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \sin \gamma \right) dA.$$

Die Ableitung  $\frac{\partial v_\mu}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}$  ist mit (5) bestimmt, während der Druck  $p$  aus Stewartsons Theorie [3] bekannt ist.

Zwecks der Integration des Ausdruckes (7) wird die Parameterform der Ellipsoidesgleichung eingeführt

$$x = a \cos \varphi \sin \theta, \quad y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c \cdot \cos \theta, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

So lautet die Außengeschwindigkeit (1)

$$(8) \quad V_v = -\frac{W_0}{aE} \cdot \operatorname{tg} \theta \sqrt{f(\varphi)},$$

wobei  $f(\varphi) = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi$  bedeutet.

Nun kann man die Formel (7) mittels (5) und (8) und nach der Integration des Druckes  $p$  in folgender Form schreiben

$$(9) \quad F_w = \frac{8\pi}{3E} \omega \varphi ab^2 W_0 \left( 1 + \frac{3c}{\pi ab} \sqrt{\frac{v}{\omega ab}} \int_0^{\pi/2} \Phi[f(\varphi)] f(\varphi) d\varphi \right).$$

Die Funktion  $\Phi[f(\varphi)]$  stellt den Wert des uneigentlichen Integrals

$$(10) \quad \Phi[f(\varphi)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \sin^3 \theta \cos^{-\frac{1}{2}} \theta [f(\varphi) c^2 \sin^2 \theta + a^2 b^2 \cos^2 \theta]^{-\frac{1}{4}} d\theta$$

dar, das, wegen der Eigenschaft der integrierenden Funktion, konvergiert. Das Integral (10) ist also ein konvergentes uneigentliches Integral.

Nach dem Einsetzen neuer Integrationsvariable  $\theta$  durch  $\cos \theta = t$  in (10) erhält man das binomische Integral

$$(10') \quad \Phi[f(\varphi)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 (1-t^2) t^{-\frac{1}{2}} [f(\varphi) c^2 + s(\varphi) t^2]^{-\frac{1}{4}} dt,$$

wobei  $s(\varphi) = a^2 b^2 - c^2 f(\varphi)$  ist. Das konvergente uneigentliche binomische Integral (10') können wir in diesem Fall durch ein Integral von den rationalen Funktionen ausdrücken

$$(10'') \quad \Phi[f(\varphi)] = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{\sqrt{ab}}^B \left\{ \frac{2\xi^2}{\xi^4 - s(\varphi)} - \frac{2c^2 f(\varphi) \xi^2}{[\xi^4 - s(\varphi)]^2} \right\} d\xi.$$

Die Funktion  $\Phi[f(\varphi)]$  wird mit der Lösung dieses Integrals völlig bestimmt.

Für  $s(\varphi) > 0$  folgt

$$(11) \quad \Phi[f(\varphi)] = \frac{1}{\sqrt[4]{s(\varphi)}} \left[ 1 + \frac{c^2 f(\varphi)}{4s(\varphi)} \right] \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{ab} + \sqrt[4]{s(\varphi)}}{\sqrt{ab} - \sqrt[4]{s(\varphi)}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{s(\varphi)}} + \frac{\pi}{2} \right] - \frac{(ab)^{3/2}}{2s(\varphi)},$$

und für  $s(\varphi) < 0$

$$(12) \quad \Phi[f(\varphi)] = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{-s(\varphi)}} \left[ 1 + \frac{c^2 f(\varphi)}{4s(\varphi)} \right] \left[ \ln \frac{ab + \sqrt{2ab}\sqrt[4]{-s(\varphi)} + \sqrt{-s(\varphi)}}{ab - \sqrt{2ab}\sqrt[4]{-s(\varphi)} + \sqrt{-s(\varphi)}} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2ab}\sqrt[4]{-s(\varphi)}}{\sqrt{-s(\varphi)} - ab} \right] - \frac{(ab)^{3/2}}{2s(\varphi)}.$$

Das singuläre Verhalten der Grenzschicht für  $\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}$  [2] stört bei der Gesamtwiderstandsberechnung jedoch nicht, da das Integral (10) konvergiert. Der Gesamtwiderstand der Bewegung des Ellipsoides wird mit dem Ausdruck (9) gegeben, in dem die Funktion  $\Phi[f(\varphi)]$  mit (11) bzw. (12) bestimmt ist. Falls, daß die Flüssigkeit reibunglos ist, geht der Ausdruck (9) in die Formel von Stewartson [3] über.

Obleich das Integral im Ausdruck (9) in der abgeschlossenen Form keine Lösung hat, wurde jedoch die numerische Integration in dieser Arbeit nicht durchgeführt, denn eine qualitative Analyse der Resultate, die wir dabei bekämen, wäre gleich wie für des Sphäroid ( $a=b$ ,  $a \leq c$ ), das eine exakte Lösung des Integrals erlaubt, wie das aus dem folgenden Paragraph zu sehen ist.

#### 4. Exakte Lösung für ein Sphäroid

Für ein Sphäroid ( $a=b$ ,  $a \leq c$ ) existiert die Lösung des Integrals im Ausdruck (9) in abgeschlossener Form. Wir werden nun diese Lösung, betrachtend die Variationen des Sphäroids, von der Scheibe bis zum Kreiszyylinder, über abgeplattetes Sphäroid, Sphäre und sehr längliche Sphäroid, analysieren.

Zu diesem Zweck wird ein veränderlicher Parameter  $\alpha = \frac{c}{a}$  eingeführt, wobei  $a$ -immer ein endlicher positiver Wert hat und  $0 \leq \alpha < \infty$ .

Für  $a=b$  ist  $f(\varphi) = a^2$  und  $s(\varphi) = a^4(1-\alpha^2)$ . Dann werden die Ausdrücke (11) und (12)

$$\Phi(a^2)|_{\alpha \leq 1} = \frac{3\zeta^4 + a^4}{4\zeta^5} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{a+\zeta}{a-\zeta} - \arctg \frac{a}{\zeta} + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{a^3}{2\zeta^4},$$

$$\Phi(a^2)|_{\alpha \geq 1} = \frac{3\zeta^4 - a^4}{4\sqrt{2}\zeta^5} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + a\sqrt{2}\zeta + \zeta^2}{a^2 - a\sqrt{2}\zeta + \zeta^2} - \arctg \frac{a\sqrt{2}\zeta}{\zeta^2 - a^2} \right) + \frac{a^3}{2\zeta^4},$$

wobei  $\zeta = a\sqrt{|1-\alpha^2|}$  eine neue Variable ist.

Der Gesamtwiderstand bei der Bewegung des Sphäroids wird aus dem Ausdruck (9) gefunden und lautet

$$(13) \quad F_w = \frac{16}{3} \omega \rho a^3 W_0 \left[ 1 + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{v^*}{\omega a^2}} \cdot c \Phi(a^2) \right],$$

Die Funktion  $c \Phi(a^2)$  kann mittels des eingeführten Parameters  $\alpha = \frac{c}{a}$  dargestellt werden. Führt man die Funktion  $\Phi_1(\alpha)$  durch die Ausdrücke  $\Phi_1(\alpha) \equiv c \Phi(a^2)$  ein, so erhält man

$$(14) \quad \Phi_1(\alpha \leq 1) = -\frac{\alpha}{2(1-\alpha^2)} + \frac{4\alpha - 3\alpha^3}{4(1-\alpha^2)^{5/4}} f_1(\alpha),$$

$$(15) \quad \Phi_1(\alpha \geq 1) = \frac{\alpha}{2(\alpha^2-1)} + \frac{3\alpha^3 - 4\alpha}{4\sqrt{2}(\alpha^2-1)^{5/4}} f_2(\alpha),$$

wobei

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt[4]{1-\alpha^2}}{1 - \sqrt[4]{1-\alpha^2}} - \arctg \frac{1}{\sqrt[4]{1-\alpha^2}} + \frac{\pi}{2},$$

$$f_2(\alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{2} \sqrt[4]{\alpha^2-1} + \sqrt{\alpha^2-1}}{1 - \sqrt{2} \sqrt[4]{\alpha^2-1} + \sqrt{\alpha^2-1}} - \arctg \frac{\sqrt{2} \sqrt[4]{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1} - 1}$$

bedeutet.

Für  $\alpha = 1$  aus (14) und (15) folgt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \Phi_1(\alpha \leq 1) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \Phi_1(\alpha \geq 1) = \frac{8}{5}.$$

Die Formel (13) geht, für  $\alpha = 1$ , in die bekannte Formel von Đorđević [2] über. Für  $v = 0$  wird aus dem gefundenen Ausdruck (13) das bekannte Resultat von Stewartson [3] erhalten.

Für die Extremwerte von  $\alpha$  (Sphäroid wird in die Scheibe oder in den Zylinder deformiert) können wir aus (14) und (15) finden

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Phi_1(\alpha \leq 1) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Phi_1(\alpha \leq 1) = 0.$$

Ein solches Resultat hat folgenden physikalischen Grund: Die Zähigkeit einer Flüssigkeit bzw. das Bestehen der Tangentialspannung  $p_{\lambda\mu}$  (5) in jedem Punkt der Scheibeoberfläche und der Zylinderbasis beeinflusst den Wert des Widerstands nicht, denn die Projektion von  $p_{\lambda\mu}$  in der Formel (7) erscheint, wegen  $\gamma = 0$ , nicht; da doch  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  in jedem Punkt des Zylindermantels ist, folgt aus (5), daß der zweite Glied in (7) nicht existiert. Selbstverständlich müssen diese Ergebnisse mit einigen Vorbehalten betrachten werden, da im Bereich  $\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}$  wahrscheinlich eine Wechselwirkung der Späroidsgrenzschicht mit Stewartsons Scherschicht berücksichtigt werden soll.

Aus dem Ausdruck (13) kann man den dimensionslosen Gesamtwiderstand finden

$$(16) \quad \frac{F_w}{\frac{16}{3} \omega \rho a^3 W_0} = 1 + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{v^*}{\omega a^2}} \cdot \Phi_1(\alpha),$$

wobei die Funktion  $\Phi_1(\alpha)$  mit (14) und (15) bestimmt ist. Wenn der Winkel mit  $\beta$  bezeichnet wird, der die Kurventangente (16) im Koordinatensystem  $(\alpha, F_w \left| \frac{16}{3} \omega \rho a^3 W_0 \right.)$  mit der  $\alpha$ -Achse bildet, dann erhält man aus (16)

$$\beta/\alpha \rightarrow 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{d}{d\alpha} \Phi_1(\alpha \leq 1) = 0, \text{ woraus folgt } \beta/\alpha \rightarrow \infty = 0$$

und

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{d}{d\alpha} \Phi_1(\alpha \leq 1) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \frac{d}{d\alpha} \Phi_1(\alpha \leq 1) = \frac{8}{9}.$$

Wenn man voraussetzt, daß  $\sqrt[3]{\omega a^2} = 0,01$  ist, wird  $\beta/\alpha_{=1} = \arctg 0,133\bar{3} = 7,595^\circ$ ,

Die Tabelle der numerischen Werte  $\left(\frac{\sqrt[3]{\omega a^2}}{\omega a^2} = 0,01\right)$

$\alpha$	0,1	0,2	0,5	0,8	0,9	0,95	0,98	1	1,002
$\Phi_1(\alpha)$	0,363	0,593	1,070	1,411	1,505	1,554	1,582	1,600	1,601
$\frac{F_w}{\frac{16}{3} \omega \rho a^3 W_0}$	1,054	1,089	1,160	1,211	1,226	1,233	1,237	1,24	1,2402

$\alpha$	1,005	1,01	1,1	1,2	1,4	1,5	1,8	2	3
$\Phi_1(\alpha)$	1,604	1,608	1,686	1,768	1,922	0,261	0,111	0,072	0,016
$\frac{F_w}{\frac{16}{3} \omega \rho a^3 W_0}$	1,2406	1,241	1,252	1,265	1,288	1,039	1,016	1,010	1,002

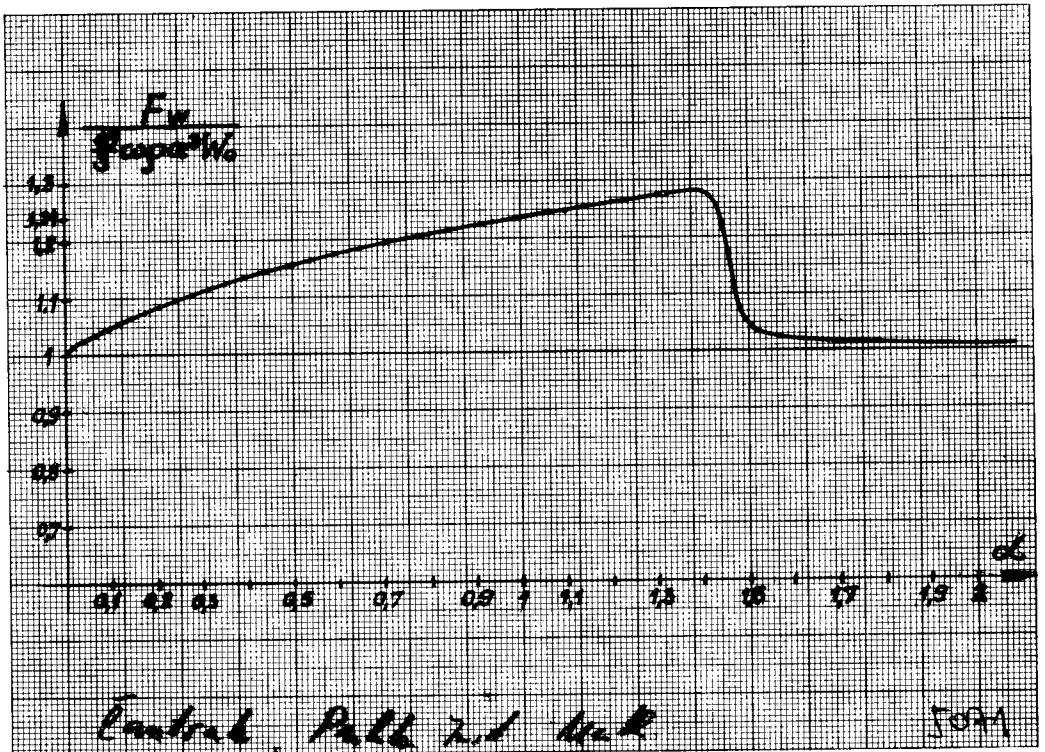


Abb. Die Abhängigkeit des dimensionslosen Gesamtwidestandes von Parameter  $\alpha$  nach der Gleichung (16).



Der Widerstand wächst im Gebiet  $0 < \alpha < 1$  (verschiedene abgeplattete Sphäroide). Für die Kugel ( $\alpha = 1$ ) ist  $F_w \left| \frac{16}{3} \omega \rho a^3 W_0 = 1,24 \right.$  (gleichwertig in [2]). Der Gesamtwiderstand wächst immer weiter bis  $\alpha \approx 1,4$ . Für  $\alpha > 1,4$  wird der Widerstand schnell vermindert und darauf strebt asymptotisch nach der Eins. Die Analyse derart gewonnener Ergebnisse wurde in dieser Arbeit etwas vorher gegeben.

## L I T E R A T U R

- [1] Grenspan, H. P. *The Theory of Rotating Fluids* (Cambridge University Press 1968).
- [2] Djodjević, V., *Instationäre Grenzschichten an langsam bewegten Körpern in einer rotierenden Flüssigkeit*, ZAMP, Vol. 22, (1971).
- [3] Stewartson, K., *On the Slow Motion of an Ellipsoid in a Rotating Fluid*, Quart. J. Appl. Mech. Math., 4, 142 (1953).
- [4] Kašanin, R., *Viša matematika*, II<sub>1</sub>, Naučna knjiga, Beograd, 1949.