PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 18 (32), 1975, pp. 197—206

EINIGE ABBILDUNGEN VOM β-TYPUS (der Fixpunkt)

Milan Tasković

(Dargestellt am 15. März 1974)

Einleitung

Wir werden in dieser Abhandlung, unter anderen, an metrischen Räumen zeigen die allgemeine Behauptung bezüglich allen bekannten Resultaten über fixen Punkten bei der Abbildung. Die Idee ist, von Banachschen Satze [1] ausgehend. Derselbe lautet:

Es sei (X, ρ) ein kompleter metrischer Raum und die Abbildung $T: X \to X$ begnügt die Bedingung

$$\text{(B)} \qquad \rho[Tx, Ty] \leqq \alpha\rho[x, y], \quad \alpha \in [0, 1); \; x, y \in X.$$

Sodann existiert im Raume X ein einziger fixer Punkt ξ, so dass $T\xi = \xi$.

Aus dieser Behauptung folgen effektiv zwei Tatsachen, die sich nicht direkt beweisen u. zw. dass man ξ als Grenzwert einer ganz bestimmter Folge erhält, dessen Konvergenzgeschwindigkeit abschätzen möglich ist. *Deshalb ist es gebräuchlich unter Banachabbildungen (d. h. Typus β)* solche Abbildungen zu verstehen die alle drei karakteristische Eigenschaften des vorherigen Banachsatz [1] besitzen:

1. *Die Abbildung $T: X^k \to X (k \in N)$ besitzt einen einzigen Fixpunkt $\xi \in X$, im Sinne dass $F(\xi) \overset{\text{def}}{=} T(\xi, \ldots, \xi) = \xi$ ist,*

2. *Der Fixpunkt ξ ist der Grenzwert der Folge, unabhängig vom Anfangspunkt.*

3. *Es ermöglicht die Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit.*

Auch hier wird man streben, dass die Sätze vom diesen Typus sind, nur werden sie den vorherigen, wie such andere bekannte, sogar auch ein Satz von Kannan [5] erweitern, obgleich ihre entsprechende Bedingungen unvergleichlich sind. Kannan [6] nähmlich zeigte folgende Behauptung:

Satz K. *Wenn man in kompleten metrischen Raume X den Abstand mit ρ bezeichnet und wenn die Abbildung T: $X \to X$ die Bedingung*

$$\text{(K)} \qquad \rho[Tx, Ty] \leqq \alpha\{\rho[x, Tx] + \rho[y, Ty]\}, \quad \alpha \in [0, 1/2)$$

befriedigt, wo $x, y \in X$, dann besitzt T einen einheitlichen Fixpunkt $\xi \in X$.

Führen wir jetzt den Begriff der f_k-(generalisierter) Kontraktion im metrischen Raume (X, ρ) ein.

Definition. *Die Abbildung* $f: R^n \to R\,(n \in N)$ *nennt man semihomogen, wenn*

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \leqq \lambda f(x_1, \ldots, x_n), \ \lambda \geqq 0; \quad \textit{ist.}$$

Definition. *Die Abbildung* $T: X^k \to X\ (k \in N)$ *nennt man* f_k*-Kotraktion, wenn für reelle Zahl* $\alpha_i, q_j\ (i = 1, \ldots 5;\ j = 1, 2, \ldots, k)$ *existieren monoton zunehmende semihomogene Abbildung* $f: R^6 \to R$ *und stetige in der Punkt* $x = 1$ *der Abbildung* $\bar{g}(x) = f(\alpha_1 x, \ldots \alpha_6 x^6)$

$$\sup_{x,\, y \in X^k} f\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_5, \sum_{i=1}^{k} q_i\right) = \lambda \in (0,1) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} (f_k) \qquad & \rho[T(u_1, \ldots, u_k), T(u_2, \ldots, u_{k+1})] \leqq f(\alpha_1 \rho[u_k, T[u_1, \ldots, u_k)], \\ & \alpha_2 \rho[u_{k+1}, T(u_2, \ldots, u_{k+1})], \alpha_3 \rho[T(u_1, \ldots, u_k), T(u_2, \ldots, u_{k+1})], \\ & \frac{\alpha_4}{2} \rho[u_k, T(u_2, \ldots, u_{k+1})], \frac{\alpha_5}{2} \rho[u_{k+1}, T(u_1, \ldots, u_k)], \sum_{i=1}^{k} q_i \rho[u_i, u_{i+1}]) \end{aligned}$$

ist, wo $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1} \in X$.

Geben wir noch einen Satz von solchen Typus an.

Satz [14]. *Wenn die Abbildung* $T_n: X^k \to X (k \in N)\, F_\lambda$*-Kontraktion im kompleten metrischen Raum* (X, ρ) *ist, so ist sie vom Typus* β,

Bemerkung: Speziell wird die F_λ-Kontraktivität der Folgenabbildung definiert in [14], [12] mit der Relation

$$\begin{aligned} \rho[T_n x, T_{n+1} y] \leqq \alpha\rho[u_k, T_n x] + \beta\rho[u_{k+1}, T_{n+1} y] + \\ + \gamma\{\rho[u_k, T_{n+1} y] + \rho[u_{k+1} T_n x]\} + \sum_{i=1}^{k} q_i \rho[u_i, u_{1+1}] \end{aligned}$$

wo

$$x = (u_1, \ldots, u_k), \quad y = (u_2, \ldots, u_{k+1}), \quad \alpha + \beta + 2\gamma + \Sigma q_i = \lambda \in [0, 1),$$
$$(\alpha, \beta, \gamma, q_i \geqq 0).$$

Satz 1. *Die Abbildung* $T: X^k \to X\ (k \in N)$ *sei eine* f_k*-(generalisierte) Kontraktion im kompleten metrischen Raum* (X, ρ). *Dann*

(I) *die Menge der Fixpunkte*

$$I(X, T) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid T(x, \ldots, x) = x\}$$

nichtleer ist.

(II) *Dieser Fixpunkt* $\xi \in I$ *ist der Grenzwert der Folge*

$$x_{n+k} = T(x_n, \ldots, x_{n+k-1}), \quad (n \in N) \tag{2}$$

unabhängig vom Anfangsglied $\bar{x}_i \overset{\text{def}}{=} (x_i, \ldots, x_{i+k-1}) \in X^k$

(III) *Die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge* $\{x_{n+k}\}$ *zu dem Punkte* $\xi \in I$ *schätzt man mittels der Ungleichung*

$$\rho[x_{n+k}, \xi] \leqq \frac{\theta^n}{1-\theta} \max_{i=1,2,\ldots,k} \left\{\frac{\rho[x_i, x_{i+1}]}{\theta^i}\right\}, \quad \theta \in (0, 1), \quad (n=1, 2, \ldots);$$

ab.

(IV) *Wenn die Abbildung* $T: X^k \to X$ $(k \in N)$ f_1*-Kontraktion und*

$$\sup_{x,\, y \in X} f\left(0, 0, \alpha_3, \frac{\alpha_4}{2}, \frac{\alpha_5}{2}, q_1\right) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_0 < 1$$

oder

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}(t_6) = f(0, \ldots, 0, t_6); \quad \hat{f}(q_1) + \cdots + \hat{f}(q_k) < 1,$$

dann $\xi \in I$ *ein einziger Fixpunkt der Menge* $I(X, T)$, *ist.*

Beweis. Den Beweis führen wir, indem wir, bevor einige Lemmas beweisen, welche generalisierte Resultate von *S. Prešić* [9] sind.

Lemma. *Die Abbildung* $f: R^{k+2} \to R$ $(k \in N)$ *sei monoton aufsteigend, semihomogen und Abbildung* $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(a_0, a_1 x, \ldots, a_{k+1} x^{k+1})$ *stetig in der Punkt* $x=1$. *Es sei* $\{x_n\}$ *eine Folge nichtnegativer Zahlen die Bedingungen*

$$f(a_0, \ldots, a_{k+1}) \in (0,1) \tag{2}$$

und

$$x_{n+k} \leqq f(a_0 x_n, \ldots, a_k x_{n+k}, a_{k+1} M)$$

$(n=1, 2, \ldots;$ *k eine fixierte natürliche Zahl) erfüllen und wo* $a_0, \ldots, a_{k+1}, M$ *reelle Konstanten. Dann bestehen Zahlen* $\mathscr{L} \in R_+$ *und* $\theta \in (0, 1)$, *so dass*

$$x_n \leqq \mathscr{L}\, \theta^n \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Beweis. Wenn sei (siehe [12], *propos.* 1, p 164.)

$$x_{n+k} \leqq f(a_0 x_n, \ldots, a_k x_{n+k}, a_{k+1} M)$$

$$X_{n+k} \geqq f(a_0, X_n, \ldots, a_k X_{n+k}, a_{k+1} M), \quad n \in N$$

dann ist

$$(\exists\, \mathscr{L} \in R)\, x_n \leqq \mathscr{L}\, X_n \quad (n \in N);$$

und da die Abbildung f semi homogen ist, so existiert [12] ein $\theta \in (0, 1)$ so dass

$$\theta^k \geqq f(a_0, a_1 \theta, \ldots, a_k \theta^k, a_{k+1} \theta^{k+1})$$

das ist

$$\theta^{n+k} \geqq f(a_0 \theta^n, a_1 \theta^{n+1}, \ldots, a_k \theta^{n+k}, a_{k+1} M)$$

ist; und wenn man

$$\mathscr{L} = \max \left\{\frac{x_1}{\theta^1}, \ldots, \frac{x_k}{\theta^k}\right\}$$

setzt; so folgt mittels vollständiger Induktion die Behauptung (3) und ähnlich auch (2) des Lemmas, wenn man die Abbildung $g: R \to R$ ins Auge fasst, welches mit

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(a_0, \ldots, a_k x^k, a_{k+1} x^{k+1})$$

definiert ist, die monoton abnehmend oder aufsteigend ist unter vorherigen Bedingungen, so dass ein $\theta \in (0, 1)$ existiert mit der Eigenschaft $g(\theta) < 1$, woraus folgt die Behauptung (3) des Lemmas.

Beweis des Satzes. Für die Folge (2) ist

$$\rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}] = \rho[T(x_n, \ldots, x_{n+k-1}), T(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})] \leqq$$
$$\leqq f(\alpha_1 \rho[x_{n+k-1}, x_{n+k}], \alpha_2 \rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}], \alpha_3 \rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}],$$
$$, \frac{\alpha_4}{2} \rho[x_{n+k-1}, x_{n+k+1}], \frac{\alpha_5}{2} 0, \sum_{i=1}^{k} q_i \rho[x_{n+i-1}, x_{n+i}])$$

und diese Ungleichung hat die Ungleichung

$$(4) \quad \begin{cases} \rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}] \leqq f(\alpha_1 \rho[x_{n+k-1}, x_{n+k}], \alpha_2 \rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}], \\ \alpha_3 \rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}], \alpha_4 \rho[x_{n+k-1}, x_{n+k}], 0, \sum_{i=1}^{k} q_i \rho[x_{n+i-1}, x_{n+i}]) \\ \text{oder} \\ \rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}] \leqq f(\alpha_1, \rho[x_{n+k-1}, x_{n+k}], \alpha_2 \rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}], \\ \alpha_3 \rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}], \alpha_4 \rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}], 0, \sum_{i=1}^{k} q_i \rho[x_{n+i-1}, x_{n+i}]) \end{cases}$$

zu Folge.

Wenn mann jetzt das vorige Lemma auf die Folge

$$\{x_n\} \overset{\text{def}}{=} (\rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}])$$

anwendet, so erhält man aus (4) dass die Folge (2) eine Cauchyfolge ist, so dass im kompleten metrischen Raum (X, ρ) der Punkt $\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+k}$ existiert Beweisen wir dass ξ auch ein fixer Punkt dieser Abbildung ist. Die Abbildung T aber, ist eine f_k-Kontraktion und es ist

$$(5) \quad \rho[\xi, T(\xi, \ldots, \xi)] \leqq \rho[\xi, x^0_{n+k}] + \rho[x^0_{n+k}, x^1_{n+k}] + \\ + \cdots + \rho[x^{k-1}_{n+k}, x^k_{n+k}]$$

wo

$$x^i_{n+k} = T(x_{n+i}, x_{n+i+1}, \ldots, x_{n+k-1}, \xi, \ldots, \xi)$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$; $i = 0, 1, 2, \ldots, k$. Speziell,

$$x^0_{n+k} = T(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}) = x_{n+k}, \quad x^k_{n+k} = T(\xi, \ldots, \xi)$$

woraus folgt für

$$\Delta^j = \Delta_n^j = \rho[x^j_{n+k}, x^{j+1}_{n+k}] \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1)$$

$$\Delta^j \leqq f(\alpha_1 \rho[\xi, x^j_{n+k}], \alpha_2 \rho[\xi, x^{j+1}_{n+k}], \alpha_3 \rho[x^j_{n+k}, x^{j+1}_{n+k}],$$
$$\frac{\alpha_4}{2} \rho[\xi, x^{j+1}_{n+k}], \alpha_5 \rho[\xi, x^j_{n+k}], \sum_{i=1}^{k} q_i \rho[x_{n+i-1}, x_{n+i}])$$

und wenn $n \to \infty$ so folgt in (5)

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+k} = T(\xi, \ldots, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} F(\xi).$$

Dass ξ ein einziger Fixpunkt ist, folgt unmittelbar aus der Ungleichung

$$\rho[\xi, \xi^*] \leqq \rho[\xi, \xi^*] f\left(0_1, 0, \alpha_3, \frac{\alpha_4}{2}, \frac{\alpha_5}{2}, q_1\right),$$

und

$$\begin{aligned}\rho[\xi, \xi^*] &= \rho[T(\xi, \ldots, \xi), T(\xi^*, \ldots, \xi^*)]\\ &\leqq \rho[T(\xi, \ldots, \xi), T(\xi, \ldots, \xi, \xi^*)] +\\ &+ \rho[T(\xi, \ldots, \xi, \xi^*), T(\xi, \ldots, \xi, \xi^*, \xi^*)] + \cdots\\ &+ \rho[T(\xi, \xi^*, \ldots, \xi^*). T(\xi^*, \ldots, \xi^*)]\\ &\leqq \rho[\xi, \xi^*](\hat{f}(q_1) + \cdots + \hat{f}(q_k)).\end{aligned}$$

Die Behauptung unter (III) ist eine unmittelbare Folge des Lemmas, sobald man es an die Folge $(\rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}])$ anwendet, und an die Ungleichung (für $s, n \in N$)

$$\rho[x_{n+k}, x_{n+k+s}] \leqq \rho[x_{n+k}, x_{n+k+1}] + \cdots + \rho[x_{n+k+s-1}, x_{n+k+s}].$$

Satz 2. *Es sei (X, ρ) ein kompleter metrischer Raum und für die Abbildung $T: X \to X$ existiert eine nichtnegative Zahl k, so dass $T^k = T(T^{k-1})$ f_1-Kontraktion und $\lambda < 1$ ist, dann*

(I) *Existiert ein einziger Fixpunkt $\xi \in X$*

(II) *Dieser Fixpunkt ξ is der Grenzwert der Folge*

$$x_0, x_1 = Tx_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \ldots$$

und damit

(III) $$\rho[x_n, \xi] \leqq \lambda^{n/k} \rho[x, Tx],$$

wo

$$\rho[x, Tx] = \max\{\lambda^{-1}\rho[T^r x, T^{r+k} x] : r = 0, 1, \ldots, k-1\} \quad \textit{ist.}$$

Beweis. Die Behauptungen (I) u (II) sind unmittelbare Folgen des Satzes **1.** Beweisen wir nur (III). Es sei n eine positive Zahl.

Wenn T^k eine f_1-Kontraktion ist, und $n = mk + r$,

$m = \left[\frac{n}{k}\right], 0 \leqq r < k$; es folgt die Behauptung (III) weil

$$\begin{aligned}\rho[T^n x, \xi] &= \rho[T^{mk} T^r x, \xi] \leqq \lambda^m \rho[T^r x, T^k T^r x]\\ &\leqq (\lambda^{1/k})^{mk+r-r} \rho[T^r x, T^{k+r} x]\\ &\leqq (\lambda^{1/k})^{mk+r-k} \rho[T^r x, T^{r+k} x] =\\ &= \lambda^{m/k} \lambda^{-1} \rho[T^r x, T^{r+k} x]\end{aligned}$$

ist. Sodann folgt die Relation.

$$\rho[T^n x, \xi] \leqq \lambda^{n/k} \cdot \max\{\lambda^{-1}\rho[T^r x, T^{r+k} x] : r = 0, 1, 2, \ldots, k-1\}.$$

Satz 3. *Es sei* $x_0 \in X$ *und*

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}(x_0, r) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : \rho[x_0, x] \leqq r\}$$

wo (X, ρ) *ein kompleter metrischer Raum ist, so dass die Abbildung* $T: \mathscr{B} \to X$ f_1*-Kontraktion und* $\lambda_0 < 1$ *ist, und*

$$\rho[x_0, Tx_0] \leqq (1-\lambda) r; \tag{5}$$

dann

(I) *Existiert ein einziger Fixpunkt* $\xi \in \mathscr{B}$ *der Abbildung* T.

(II) *Fixpunkt* ξ *ist der Grenzwert der Folge*

$$x_0, x_1 = Tx_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1}, \ldots$$

und

$$\rho[x_n, \xi] \leqq \lambda^n r, \tag{III}$$

wo $\lambda = \operatorname*{Sup}_{x, y \in X} f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, q_1)$ *ist.*

Beweis. Für $\lambda < 1$, aus (6) folgt $x_1 \in \mathscr{B}$. Durch Induktion ersieht man dass diese Folge aus $\mathscr{B}$ ist. Es sei $x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathscr{B}$. Aus der Relation

$$\rho[x_n, x_{n+p}] \leqq \frac{\lambda^n \rho[x, Tx]}{1-\lambda} \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \; p = m+1, \quad \text{ist}$$

$$\rho[x_0, x_{m+1}] \leqq \frac{1}{1-\lambda} \rho[x_0, Tx_0]$$

und aus (6)

$$\rho[x_0, x_{m+1}] \leqq r$$

das ist $x_{m+1} \in \mathscr{B}$ und $\{T^n x_0 : n \in N\} \in \mathscr{B}$. Der zweite Teil des Beweises (Cauch folge, einziger Fixpunkt) ist eine unmittelbare Kopie des vorangehenden Beweises für den Satz 1, wenn $k = 1$ ist.

Folgen des Satzes. Folgen 1, 2. Durch Spezifikation erhält man aus unserem Satz zwei unvergleichbare Resultate (zitiert am Anfang) von Banach [1] und Kannan [5]. Erstens, durch Spezifizierung der Dimension $k = 1$ und des Parameters q_i, α_i, β, γ und dann durch die Annahme dass die Abbildung $f = x$ ist.

Anderseits ist unser Resultat eine Verallgemeinerung der erwähnten zwei Resultate. Ein Beispiel für dieses geben wir später.

Folge 3 [13]. Es sei (X, ρ) ein kompleter metrischer Raum; die Abbildung $T: X \to X$ besitzt die Eigenschaft

$$\rho[Tx, Ty] \leqq \alpha\rho[x, T(x)] + \beta\rho[y, Ty] + \gamma\rho[x, y] \tag{R}$$

wo $x, y \in X$, $x \neq y$ und α, β, γ nichtnegative Funktionen, definiert in $(0, \infty)$ mit der Eigenschaft

$$\sup_t \{\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)\} \in [0, 1).$$

Sodann besitzt die Abbildung T einen einzigen Fixpunkt.

Auf ein ähnliches Resultat von D. W. Boyd-I. S. W. Wong [2] kann sich die obige Folge soeben beziehen, sowie auch auf einige Resultate von M. Edelstein [4] und E. Rakotch [11], Đ. Kurepa [7], [8], Hardy-Rogers [15].

Folge 4. (S. Prešić, [9] p.p. 75—78). Es sei (X, ρ) ein vollständinger metrischer Raum, und $T: X^k \to X (k \in N)$ befriedigt die Bedingung

$$\rho [T(u_1, \ldots, u_k), T(u_2, \ldots, u_{k+1})] \leqq \sum_{i=1}^{k} q_i \rho [u_i, u_{i+1}]$$

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1} \in X, \ \Sigma q_i < 1, \quad q_i \geqq 0)$$

Sodann konvergiert jede Folge welche die Relation

$$x_{n+k} = T(x_n, \ldots, x_{n+k-1}), \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

erfüllt, und $\lim_n (x_n)$ ist die einzige Lösung der Gleichung $x = T(x, \ldots, x)$.

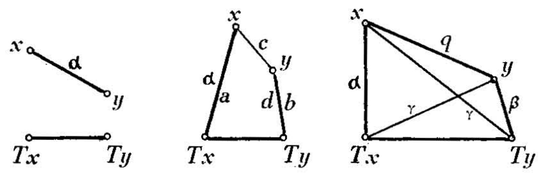
Folge 5 [3] Wenn man die Bedingung (R) der vorangehender Folge mit der Bedingung von Lj. Ćirić

$$(\acute{c}) \quad \rho [Tx, Ty] \leqq a \rho [x, Tx] + b \rho [y, Ty] + c \{\rho [x, Ty] + \rho [y, Tx]\} + q \rho [x, y];$$

$$\operatorname*{Sup}_{x, y \in X} \{a(x, y) + b(x, y) + 2c(x, y) + q(x, y)\} = \lambda < 1,$$

vertauscht, so enthält die Abbildung $T: X \to X$ alle drei Eigenschaften der Banachsche Abbildungen.

Bemerkung 1. Erwähnen wir jetzt ein Beispiel dass Erweiterungen unserer Resultaten bestätigt, wenn es nicht möglich ist die bekannte Resultate anwenden, und welche auf folgende Weise sich geometrisch interpretieren lassen:



(B) (K,R) (Ć)

2. Beispiel. Es sei $X = [0, 10] \subset R^1$ und die Abbildung $T: X \to X$ sei gegeben mit

$$Tx = 0, \ 0 \leqq x < 1; \quad Tx = \frac{10}{11} x, \ 1 \leqq x \leqq 10.$$

Dann sind die Bedingungen von Banach [1], Kannan [5], S. Reich [13], Lj. Ćirić [3], nicht erfüllt, weil schon

(B) Für die Punkte $x = \frac{10}{11}, \quad y = 1$

$$\rho [Tx, Ty] = \frac{10}{11} > \alpha \rho [x, y] = \frac{\alpha}{11}, \quad \alpha \in [0, 1);$$

(K) Für die Punkte $x=\frac{10}{11}$, $y=1$ die Bedingung von Kannan

$$\rho[Tx\,Ty]=\frac{10}{11}>\alpha\left(0+\frac{1}{11}\right)=\alpha\{\rho[x,Tx]+\rho[y,Ty]\},\quad \alpha\in[0,1/2)$$

(R) Für die Punkte $x=\frac{10}{11}$, $y=1$

$$\rho[Tx,Ty]=\frac{10}{11}>\alpha\frac{10}{11}+\beta\frac{1}{11}+\gamma\frac{1}{11}=\alpha\rho[x,Tx]+$$

$$+\beta\rho[y,Ty]+\gamma\rho[x,y],\ (\alpha+\beta+\gamma\in[0,1)].$$

(Ć) Für die Punkte $x=\frac{10}{11}$, $y=1$ die Bedingung von Ćirić

$$\rho[Tx,Ty]=\frac{10}{11}>a\frac{1}{11}+b\frac{10}{11}+q\frac{1}{11}+c\left\{\left|\frac{10}{11}-\frac{10}{11}\right|+|1-0|\right\}=$$

$$=a\rho[x,Ty]+b\rho[y,Ty]+q\rho[x,y]+c\{\rho[x,Ty]+\rho[y,Tx]\}$$

$$(a+b+2c+q\in[0,1)),$$

während unsere Bedingung der verallgemeinerten f_k-Kontraktion ($k=1$) erfüllt ist, schon für die Abbildung $f\colon R^6\to R$ gegeben mit

$$\rho[Tx,Ty]\leqq\frac{(\alpha_1\rho[Tx,Ty]+\alpha_2\rho[x,Tx]+\alpha_3\rho[y,Ty])^2}{\alpha_1\rho[Tx,Ty]+\alpha_2\rho[x,Tx]+\alpha_3\rho[y,Ty]-\alpha_4\rho[x,y]}+\frac{\alpha_5}{2}\rho[x,Ty]+$$

$$+\frac{\alpha_6}{2}\rho[y,Tx]$$

welche monoton zunehmend und auch homogen ist. Wenn man setzt $x=\frac{10}{11}$, $y=1$, unsere Bedingung ist erfüllt schon für $\alpha_1=\alpha_2=1$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=-3$, $\alpha_5=\alpha_6=0$.

3. Es schliesst man eingentlich, das man die Abstandsgliederungen $\rho[Tx,Ty]$ mit verschiedenen Funktionen, was von der Spezifikation der Abbildung, $f\colon R^6\to R$ abhängt, abschätzen kann.

B e i s p i e l 1. Die Kontraktionbedingung aus dem Satz 1 kann man spezifizieren auch mit

$$\rho[Tx,Ty]\leqq mAx\Big(\alpha_1\rho[u_k,Tx],\ \alpha_2\rho[u_{k+1},Ty],\ \frac{\alpha_3}{2}\rho[u_{k+1},Tx],\ \frac{\alpha_4}{2}\rho[u_k,Ty],$$

$$,\ \alpha_5\rho[Tx,Ty],\ q_1\rho[u_1,u_3],\ \ldots,\ q_k\rho[u_k,u_{k+1}]\Big),$$

wo $x=(u_1,\ldots,u_k)$, $y=(u_2,\ldots,u_{k+1})$ ist.

B e i s p i e l 2. Führen wir ein Beispiel der vorangehenden Bemerkung an. Die Abbildung $f: R^6 \to R$, gegeben mit $f = \sum_x \frac{ax+b}{cx+d}$, besitzt alle notwendigen Eigenschaften des Theorems, und die Abschätzung kann man mit

$$\rho[Tx, Ty] \leqq \frac{a_1\rho[x, Tx]+b_1}{c_1\rho[x, Tx]+d_1} + \frac{a_2\rho[y, Ty]+b_2}{c_2[\rho_2[y, Ty]+d_2} + \frac{a_3\rho[x, y]+a_3}{c_3\rho[x, y]+d_3}$$

$$\left(\sum_i \frac{a_i+b_i}{c_i+d_i} < 1; \quad a_i d_i - b_i c_i \geqq 0\right),$$

darstellen.

Die Bedingung (f_k) der f_k-generalisierten Kontraktion gilt und bezieht sich für $f: R^6 \to R$. Wenn man nämlich (f_k) und (1) mit der Bedingung $T: X^k \to X$ vertauscht und für $f: R^{k+5} \to R\,(k \in N)$

$$(f^*_k) \qquad \rho[T(u_1, \ldots, u_k), T(u_2, \ldots, u_{k+1})] \leqq$$

$$\leqq f[\alpha_1\rho[u_k, T(u_1, \ldots, u_k)], \alpha_2\rho[u_{k+1}, T(u_2, \ldots, u_{k+1})], \alpha_3\rho[T(u_1, \ldots, u_k),$$

$$T(u_2, \ldots, u_{k+1})], \frac{\alpha_4}{2}\rho[u_k, T(u_2, \ldots, u_{k+1})], \frac{\alpha_5}{2}\rho[u_{k+1}, T(u_1, \ldots, u_k)],$$

$$, q_1\rho[u_1, u_2], q_2\rho[u_2, u_3], \ldots, q_k\rho[u_k, u_{k+1}])$$

wo

$$u_1, \ldots, u_{k+1} \in X; \qquad \sup_{x, y \in X^k}\{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_5, q_1, \ldots, q_k)\} \in (0,1);$$

ist, dann gilt eine ähnliche Behauptung und zwar unter dieser Bedingung. Wir können nämlich den folgenden Satz formulieren:

Wenn die Abbildung $T: X^k \to X$ $(k \in N)$ die Bedingung (f_k^*) der f_k^*-Kontraktion im kompleten metrischem Raume (X, ρ) befriedigt, so gelten für die Abbildung $F(x) \overset{\text{def}}{=} T(x, \ldots, x)$ die Behauptungen (I), (II), (III), (IV) *des Satzes* 1.

Der Beweis dieser Behauptung führt man auf dieselbe Weise durch, wie auch die Behauptung 1.

B e m e r k u n g. Der Satz 1 gilt auch im Falle, wenn die Bedingung (f_k) oder (f_k^*) die Abbildungsfolge $T_n: X^k \to X$ $(k \in N)$ befriedigt, wenn man nur anstatt der Folge (2) die Folge $x_{n+k} = T_n(xn, \ldots, x_{n+k-1})$, $n \in N$, betrachtet.

LITERATUR

[1] S. B a n a c h, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales*, Fund. Math., 3 (1922). pp. 133—181.

[2] D. W. B o y d — J. S. W. W o n g, *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. math. Soc., 20 (1969), pp. 458—464.

[3] Lj. Ć i r i ć, *Generalized contractions and fixed point theorem*, Publ. Inst. Math. N. S. 12 (26), 1971, pp. 19—26.

[4] M. E d e l s t e i n, *On fixed and periodic pointes under centractive mappings*, J. London Math. Soc. 37 (1962), pp. 74—79.

[5] Kannan R., *On sertain sets and fixed-poit therorens*, Roum. Math. pure appl. 14 (1969), 51—54.

[6] Kannan R., *Some results on fixed points* — II, Amer. Math. Monthly, 76 (1969), p. 406.

[7] Kurepa Đ., *Some fixed point theorems*, Math. Balkanica 2 (1972) pp. 102—108.

[8] Kurepa Đ., *Some cases in the fixed point theory*, Topology and its Applications, Budva 1972. pp. 144—152.

[9] S. Prešić, *Sur une classe d'inéquations aux différences finies et sur la convergence de certaines suites*, Publ. Inst. Math. 5 (19), 1965, pp. 75—78.

[10] Prešić — Marjanović, *Remark on the convergence of a sequence*, Publ. Elec. Fac., 155 (1965).

[11] E. Rakotch, *A note on alqha-lecolly contractive mappings*, Bull. Res. Counc. Israel 10 F (1962), pp. 188—191.

[12] M. R. Tasković, *Monotone mappings on orJeted sets, a class of inequalities with finite differences anl fixee points*, Publ. Inst. Math. t. 17 (31), pp. 163—172, (1974). Beograd.

[13] Reich, *FixeJ points of contractive functions*, Boll. Un. mat. Ital., S. IV, (1971), pp. 1—11.

[14] M. R. Tasković, *Banachräume von Folgenabbildung*, Wien, 17—21, 9. 73 (ÖMK).

[15] Hardy — Rogers, *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull. Vol. 16 (2), 1973, p. 201—206.