PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 18 (32), 1975, pp. 5—18

DEUX THÉORÈMES MERCERIENS ASYMPTOTIQUES POUR DES SUITES A COMPORTEMENT LENT

S. Aljančić

(Communiqué le 21 Novembre 1974)

1. Introduction et résultats

On dit avec J. Karamata ([1], [2]) que la suite à termes positifs (L_n) est à comportement lent si[1])

$$\frac{L_{[tn]}}{L_n} \to 1 \qquad (n \to \infty) \tag{1.1}$$

pour tout $t > 0$. Nous désignerons par $\mathscr{L}$ la classe de suites à comportement lent. (Voir aussi R. Bojanic et E. Seneta [7].)

On dit qu'une matrice $(a_{n\nu})$ (ou la transformation correspondante) est $\mathscr{L}$-permanente si elle transforme toute suite $(L_n) \in \mathscr{L}$ en une suite

$$L_n' = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu} L_\nu$$

telle que

$$L_n' \cong A\, L_n \qquad (n \to \infty)^{2)}.$$

Récemment, M. Vuilleumier [3] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour la $\mathscr{L}$-permanence d'une matrice:

Théorème A. *La matrice $(a_{n\nu})$ est $\mathscr{L}$-permanente si et seulement si il existe un $\eta > 0$ tel que, lorsque $n \to \infty$,*

$$1^\circ \qquad \sum_{\nu=n}^{\infty} |a_{n\nu}|\, \nu^{\eta} = O(n^{\eta}),$$

$$2^\circ \qquad \sum_{\nu=1}^{n} |a_{n\nu}|\, \nu^{-\eta} = O(n^{-\eta}),$$

$$3^\circ \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu} \to A.$$

---

[1]) $[x]$ désigne le plus grand entier $\leqslant x$.

[2]) C'est-à-dire: $L_n'/L_n \to A\ (n \to \infty)$.

Dans la suite nous avons besoin de quelques cas particuliers du théorème A que nous allons formuler dans le corollaire suivant.

Corollaire. *Soit* $\operatorname{Re}(\alpha) > -1$ *et supposons que*

$$s_n \cong L_n \qquad (n \to \infty),$$

où L_n *est une suite à comportement lent. Alors, lorsque* $n \to \infty$,

(a) $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\alpha+n-\nu}{n-\nu} s_\nu \cong \binom{\alpha+n+1}{n} L_n,$

(b) $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\alpha+\nu}{\nu} s_\nu \cong \binom{\alpha+n+1}{n} L_n,$

(c) $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\alpha+\nu}{\nu} \left(\sum_{\mu=\nu+1}^{n+1} \frac{1}{\alpha+\mu} \right) s_\nu \cong \frac{1}{\alpha+1} \binom{\alpha+n+1}{n} L_n.$

Les moyennes de Cesàro d'ordre $k (=1, 2, \ldots)$ de la suite (s_n) sont définies par

$$c_n^{(k)} = \frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k}{n}} \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

où

$$s_n^{(k)} = s_0^{(k-1)} + s_1^{(k-1)} + \cdots + s_n^{(k-1)} \qquad \left(s_n^{(0)} = s_n\right).$$

Posons

$$t_n^{(k,\lambda)} = s_n + \lambda c_n^{(k)} \tag{1.2}$$

où λ est un paramètre complexe en général.

Étant donné que (voir, par exemple, [6], Ch. III, (1.13))

$$s_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+k-\nu-1}{k-1} s_\nu,$$

on a

$$t_n^{(k,\lambda)} = s_n + \frac{\lambda}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{k-1+n-\nu}{n-\nu} s_\nu, \tag{1.3}$$

d'où, en vertu du corollaire (a) (avec $\alpha = k-1$) résulte que

$$s_n \cong L_n \qquad (n \to \infty) \tag{1.4}$$

entraîne

$$t_n^{(k,\lambda)} \cong (1+\lambda) L_n \qquad (n \to \infty) \tag{1.5}$$

pour tout $\lambda \neq -1$. L'inversion de cette affirmation est un théorème de type mercerien, à savoir

Théorème 1. *Supposons* λ *tel que toutes les racines* $\alpha_j\,(j=1, 2, \ldots, k)$ *de l'équation en* α,

$$\binom{k-1-\alpha}{k}+\lambda=0, \tag{1.6}$$

satisfont à

$$\operatorname{Re}(\alpha_j)>-1. \tag{1.7}$$

Alors de (1.5) *avec* $\lambda\neq-1$ *résulte* (1.4).

Remarque 1. Soit $\lambda=\mu+i\nu$. La condition (1.7) est satisfaite dans le cas: 1° $k=1$ si $\mu+1>0$; 2° $k=2$ si $\mu+1>\frac{2}{9}\nu^2$. En effet, dans le premier cas la seule racine de l'équation (1.6) est égale à λ. Dans le second cas on a

$$\alpha_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1-8\lambda}}{2}=\frac{1\pm u}{2}+i\,\frac{v}{2}$$

où

$$\sqrt{1-8\lambda}=u+iv.$$

Étant donné que

$$u^2-v^2=1-8\mu,\quad 2uv=-8\nu.$$

on obtient

$$u^4+(8\mu-1)u^2-16\nu^2=0$$

et, par conséquent,

$$2u^2=1-8\mu\pm\sqrt{(8\mu-1)^2+64\nu^2}.$$

Il en résulte l'affirmation, car la condition (1.7), à savoir $\frac{1\pm u}{2}>-1$, est équivalente à $u^2>9$.

Des résultats pareils ont lieu pour les moyennes arithmétiques iterées ou celles de Hölder d'ordre k de la suite (s_n), définies par

$$h_n^{(k)}=\frac{h_0^{(k-1)}+h_1^{(k-1)}+\cdots+h_n^{(k-1)}}{n+1}\quad\left(k=1, 2, \ldots;\ n=0, 1, \ldots;\ h_n^{(0)}=s_n\right).$$

Posons

$$\tau_n^{(k,\lambda)}=s_n+\lambda h_n^{(k)}. \tag{1.8}$$

Alors, en appliquant k fois le corollaire (a) ou (b) avec $\alpha=0$ (qui coïncident dans ce cas), on voit immédiatement que (1.4) entraîne

$$\tau_n^{(k,\lambda)}\cong(1+\lambda)L_n\qquad(n\to\infty) \tag{1.9}$$

pour tout $\lambda\neq-1$. L'implication inverse est traité dans le

Théorème 2. *Supposons* λ *tel que toutes les racines* $\alpha_j\,(j=1, 2, \ldots, k)$ *de l'équation en* α,

$$(-\alpha)^k+\lambda=0, \tag{1.10}$$

satisfont à (1.7). *Alors* (1.9) *avec* $\lambda\neq-1$ *implique* (1.4).

Remarque 2. Pour $k=1$ les théorèmes 1 et 2 coïncident. Pour $k=2$ la condition du théorème 2 est satisfaite si $\mu+1>\frac{1}{4}\nu^2$. En effet, les racines de l'équation (1.10) sont alors

$$\alpha_{1/2}=\pm\sqrt{-\lambda}=\pm(u+iv)$$

de sorte que

$$u^2-v^2=-\mu, \quad 2uv=-\nu.$$

Donc,

$$4u^4+4\mu u^2-\nu^2=0$$

et, par conséquent,

$$2u^2=-\mu\pm\sqrt{\mu^2+\nu^2}.$$

Il en résulte l'affirmation, car la condition (1.7), à savoir $\pm u>-1$, est équivalente à $u^2<1$.

Si l'on désigne par $\Lambda(C_k)$ et $\Lambda(H_k)$ les ensembles des λ-valeurs admissibles dans les théorèmes 1 et 2 respectivement, on constate donc que $\Lambda(H_2)$ est un vrai sous-ensemble de $\Lambda(C_2)$: au point de vue des théorèmes merceriens le procédé C_2 est plus efficace que le procédé H_2.

Remarque 3. Pour obtenir une idée sur l'ensemble $\Lambda(H_k)$ dans le cas général, il est commode d'utiliser le fait que le complément de $\Lambda(H_k)$ est l'image d'un certain ensemble du plan z par l'application $f_k(z)=-(-z)^k$. En effet, si l'on pose

$$A_\lambda=\{z:f_k(z)=\lambda\} \text{ et } B=\{z:\operatorname{Re}(z)>-1\}$$

on a, par définition,

$$\lambda\in\Lambda(H_k) \Leftrightarrow A_\lambda\subseteq B.$$

Par conséquent,

$$\lambda\notin\Lambda(H_k) \Leftrightarrow \text{il existe un } z\in A_\lambda \text{ tel que } z\notin B$$

ou bien,

$$\lambda\in\mathbf{C}\,\Lambda(H_k) \Leftrightarrow \text{il existe un } z\in\mathbf{C}\,B \text{ tel que } f_k(z)=\lambda,$$

ce qui veut dire que

$$\mathbf{C}\,\Lambda(H_k)=f_k(\mathbf{C}\,B)^{1)}.$$

Or,

$$\mathbf{C}\,B=\left\{z=r\,e^{i(\pi+\varphi)}:r\geqslant\frac{1}{\cos\varphi},\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right\}$$

---

[1] La fonction f_k étant une application de C *sur* C, on en peut impliquer $\Lambda(H_k)\subseteq f_k(B)$, Mais cela ne nous permet pas auqune conclusion sur l'ensemble $\Lambda(H_k)$, car l'égalité est ici exclue sauf lorsque $k=1$, le seul cas où f_k est une application biunivoque. En effet, lorsque $k\geqslant 2$, l'ensemble B contient au moins un angle d'ouverture $2\pi/k$, dont le sommet est à l'origine, de sorte que, d'une part, $f_k(B)$ contient tout le plan C. D'autre part, l'ensemble $\Lambda(H_k)$ ne contient pas le point $\lambda=-1$ (par exemple), car dans ce cas l'équation $f_k(z)=\lambda$ admet $z=-1$ comme racine. On pourrait se passer de cet inconvénient en introduisant au lieu du plan λ la surface riemannienne λ^* à k feuilles, qui correspond à la fonction f_k. Alors, f_k sera une application biunivoque du plan z sur λ^*.

de sorte que pour $k \geqslant 2$

$$\complement\,\Lambda(H_k)=\left\{\lambda=\rho\, e^{i(\pi+\psi)} : \rho \geqslant \frac{1}{\cos^k \psi/k},\ -k\frac{\pi}{2}<\psi<k\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$=\left\{\lambda=\rho\, e^{i(\pi+\psi)} : \rho \geqslant \frac{1}{\cos^k \psi/k},\ -\pi<\psi\leqslant\pi\right\}.$$

En effet, la fonction $1\big/\cos^k \dfrac{\psi}{k}$ étant paire et croissante dans l'intervalle $(0, k\pi/2)$, c'est seulement sa restriction à l'intervalle $-\pi<\psi\leqslant\pi$[1] qui compte dans l'inégalité $\rho \geqslant 1\big/\cos^k \dfrac{\psi}{k}$. Par conséquent,

$$\Lambda(H_k)=\left\{\lambda=\rho\, e^{i(\pi+\psi)} : \rho < \frac{1}{\cos^k \psi/k},\ -\pi<\psi\leqslant\pi\right\}$$

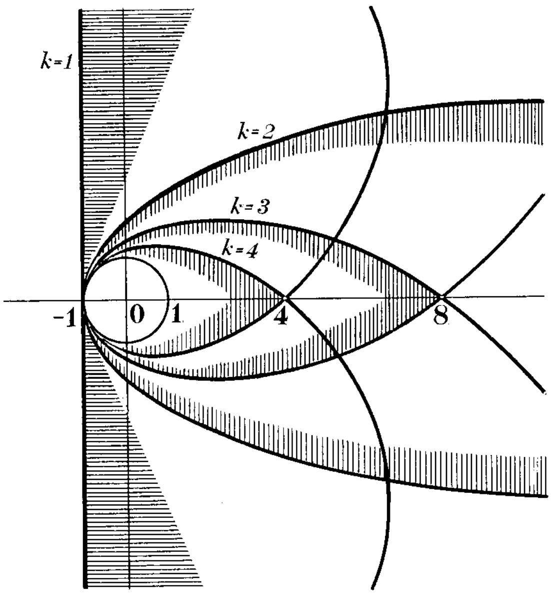
(Voir figure pour $\Lambda(H_k)$, $k=1, 2, 3, 4$.)

Étant donné que pour tout $-\pi<\psi\leqslant\pi$ la suite de fonctions

$$\frac{1}{\cos^k \psi/k} \nearrow 1 \text{ lorsque } k\to\infty,$$

on en conclut que $\Lambda(H_k)\supset\Lambda(H_{k+1})$, que $\Lambda(H_k)$ contient le circle-unité

$$\Lambda(H_\infty)=\{\lambda=\rho\, e^{i(\pi+\psi)} : \rho\leqslant 1,\ \psi\neq 0\}$$



[1] Sauf dans le cas $k=2$ où l'on a $-\pi<\psi<\pi$.

pour tout k et que, à la limite $(k \to \infty)$ il vient de se confondre avec lui. Il aurait quelque intérêt de repondre à la question s'il existe un procédé particulier tel que le théorème mercerien correspondant admet $\Lambda(H_\infty)$ comme son domain de validité.

Le cas particulier $k=1$ du théorème 1 fut démontré par S. Zimering [4]. Dans une note antérieure [5], nous avons traité des questions analogues pour les fonctions, à savoir le comportement asymptotique des transformations intégrales de Cesàro et de Hölder d'ordre k. Le cas des transformations analogues pour les suites, que nous traitons ici, présente un intérêt car le cas discret possède ses propres caractéristiques.

Enfin, nous citons quelques propriétés des suites à comportement lent dont nous aurons besoin.

(i) Le passage à la limite (1.1) a lieu uniformément par rapport à $t \in [a, b]$ pour tout $0<a<b<\infty$.

(ii) Si $s_n \simeq L_n\ (n \to \infty)$, alors s_n est de même une suite à comportement lent.

(iii) Quelque soit $\sigma>0$ et pour tout $L \in \mathscr{L}$, on a

$$n^\sigma L_n \to \infty \text{ et } n^{-\sigma} L_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

2. Démonstrations

Corollaire (a). Avant d'appliquer le théorème A aux sommes figurant dans le corollaire, nous remarquons que

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\alpha+\nu}{\nu} = \binom{\alpha+n+1}{n} \tag{2.1}$$

et

$$\binom{\alpha+n}{n} \simeq \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (n \to \infty;\ \alpha \neq -1, -2, \ldots) \tag{2.2}$$

(voir, par exemple, [6], Ch. III, (1.11) et (1.15) respectivement).

Le fait que les sommes dans le corollaire, contrairement à celles dans le théorème A, commencent par l'indice $\nu=0$, ne peut provoquer aucun inconvénient car, d'après (2.2), le premier terme dans les sommes (a) et (b) est $O\left(\frac{1}{n}\right)$ et celui dans (c) est $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$, de sorte qu'il peut être négligé par rapport à L (en vertu de la propriété (iii) des suites à comportement lent). Nous remarquons aussi que c'est seulement en apparence que la formulation du corollaire est plus générale que celle du théorème A. En effet, d'après la propriété (ii) des suites à comportement lent, l'hypothèse $s_n \simeq L_n$ est équivalente à $s_n = \overset{*}{L}_n$, où $\overset{*}{L}_n$ est aussi une suite à comportement lent telle que $\overset{*}{L}_n \simeq L_n$.

Dans le premier cas, on a

$$a_{n\nu} = \frac{\binom{\alpha+n-\nu}{n-\nu}}{\binom{\alpha+n+1}{n}} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n \text{ et } a_{n\nu}=0 \quad (\nu>n).$$

L'hypothèse 3° avec $A=1$ est satisfaite en vertu de (2.1) et de la remarque déjà faite. Quant à l'hypothèse 2°, elle est bien satisfaite, car, en vertu de (2.2),

$$\sum_{\nu=1}^{n} |a_{n\nu}| \left(\frac{\nu}{n}\right)^{-\eta} = \frac{1}{\left|\binom{\alpha+n+1}{n}\right|} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left|\binom{\alpha+\nu}{\nu}\right| \left(\frac{n-\nu}{n}\right)^{-\eta}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{\mathrm{Re}(\alpha)} \left(1-\frac{\nu}{n}\right)^{-\eta} \frac{1}{n}$$

et on n'a que de remarquer que

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{\mathrm{Re}(\alpha)} \left(1-\frac{\nu}{n}\right)^{-\eta} \frac{1}{n} \to \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(\alpha)} \quad (1-t)^{-\eta}\, dt < \infty$$

pour tout $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$ et tout $0<\eta<1$.

Corollaire (b). On a

$$a_{n\nu} = \frac{\binom{\alpha+\nu}{\nu}}{\binom{\alpha+n+1}{n}} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n) \text{ et } a_{n\nu}=0 \quad (\nu>n)$$

et, comme dans le cas précédent, c'est seulement l'hypothèse 2° qu'il faut vérifier.

Or, en vertu de (2.2), on a pour tout $0<\eta<\mathrm{Re}(\alpha)+1$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |a_{n\nu}|\, \nu^{-\eta} \cong \frac{|\Gamma(\alpha+2)|}{n^{\mathrm{Re}(\alpha)+1}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu^{\mathrm{Re}(\alpha)-\eta}}{|\Gamma(\alpha+1)|} \cong \frac{|\alpha+1|}{\mathrm{Re}(\alpha)-\eta+1} n^{-\eta}.$$

Corollaire (c). Étant donné que

$$\frac{\alpha+1}{\binom{\alpha+n+1}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\alpha+\nu}{\nu} \left(\sum_{\mu=\nu+1}^{n+1} \frac{1}{\alpha+\mu}\right) s_\nu =$$

$$= \frac{\alpha+1}{\binom{\alpha+n+1}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\alpha+\nu}{\nu} \left(\sum_{\mu=\nu}^{n} \frac{1}{\alpha+\mu+1}\right) s_\nu =$$

$$= \frac{1}{\binom{\alpha+n+1}{n}} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\alpha+1}{\alpha+\mu+1} \binom{\alpha+\mu+1}{\mu} \frac{1}{\binom{\alpha+\mu+1}{\mu}} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\alpha+\nu}{\nu} s_\nu =$$

$$= \frac{1}{\binom{\alpha+n+1}{n}} \sum_{\mu=0}^{n} \binom{\alpha+\mu}{\mu} \left\{ \frac{1}{\binom{\alpha+\mu+1}{\mu}} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\alpha+\nu}{\nu} s_\nu \right\}$$

et il n'y a que d'appliquer deux fois le corollaire (b).

Théorème 1. En multipliant (1.2) par $\binom{\alpha+n}{n}$ et en sommant par rapport à n de 0 à n, on obtient

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}t_\nu^{(k,\lambda)}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}s_\nu+\lambda\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}c_\nu^{(k)}. \tag{2.13}$$

Une sommation par parties donne

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}c_\nu^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}\frac{s_\nu^{(k)}}{\binom{\nu+k}{k}}=$$

$$=\frac{\binom{\alpha+n+1}{n+1}}{\binom{n+k+1}{k}}s_n^{(k+1)}+\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{\binom{\alpha+\nu}{\nu}}{\binom{\nu+k}{k}}-\frac{\binom{\alpha+\nu+1}{\nu+1}}{\binom{\nu+k+1}{k}}\right)s_\nu^{(k+1)}=$$

$$=\binom{\alpha+n+1}{n+1}\frac{n+1}{k+1}c_n^{(k+1)}=\frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{n}\left(\binom{\alpha+\nu}{\nu}(\nu+k+1)-\binom{\alpha+\nu+1}{\nu+1}(\nu+1)\right)c_\nu^{(k+1)}$$

de sorte que

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}c_\nu^{(k)}=\binom{\alpha+n+1}{n+1}\frac{n+1}{k+1}c_n^{(k+1)}+\frac{k-\alpha}{k+1}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}c_\nu^{(k+1)}.$$

En appliquant cette formule avec $k=0, 1, \ldots,$ on obtient successivement

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}c_\nu^{(0)}=\binom{\alpha+n+1}{n+1}\frac{n+1}{1}c_n^{(1)}+\frac{(-\alpha)}{1}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}c_\nu^{(1)}=$$

$$=\binom{\alpha+n+1}{n+1}\frac{n+1}{1}c_n^{(1)}+\frac{(-\alpha)}{1}\binom{\alpha+n+1}{n+1}\frac{n+1}{2}c_n^{(2)}+\frac{(-\alpha)(1-\alpha)}{1\cdot 2}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}c_\nu^{(2)}$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, par induction,

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}c_\nu^{(0)}=(n+1)\binom{\alpha+n+1}{n+1}\sum_{m=1}^{k}\binom{m-2-\alpha}{m-1}\frac{c_n^{(m)}}{m}+\binom{k-1-\alpha}{k}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{n}c_\nu^{(k)}$$

En introduisant cette relation[1] dans (2.13) on obtient

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}t_\nu^{(k,\lambda)}=\left(\binom{k-1-\alpha}{k}+\lambda\right)\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}c_\nu^{(k)}$$
$$+(n+1)\binom{\alpha+n+1}{n+1}\sum_{m=1}^{k}\binom{m-2-\alpha}{m-1}\frac{c_n^{(m)}}{m}. \tag{2.14}$$

---

[1] Notons que $c_\nu^{(0)}=s_\nu$.

Soient $\alpha_j\,(j=1,2,\ldots,k)$ les racines de l'équation

$$(1.6)\qquad \binom{k-1-\alpha}{k}+\lambda=0 \qquad (\lambda\neq 0^{2)});$$

elles diffèrent nécessairement de $0, 1, \ldots, k-1$. En posant $\alpha=\alpha_j$ dans (2.14) on obtient un système de k équations linéaires en $c_n^{(m)}\,(m=1,2,\ldots,k)$, à savoir:

$$(2.15_j)\qquad \sum_{m=1}^{k}\binom{m-2-\alpha_j}{m-1}\frac{c_n^{(m)}}{m}=\frac{1}{(\alpha_j+1)\binom{\alpha_j+n+1}{n}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha_j+\nu}{\nu}t_\nu^{(k,\nu)}.$$

$$(j=1,2,\ldots k)$$

Soit

$$(2.16)\qquad D_k=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}\binom{-\alpha_1}{1} & \cdots & \frac{1}{k}\binom{k-2-\alpha_1}{k-1}\\ 1 & \frac{1}{2}\binom{-\alpha_2}{1} & \cdots & \frac{1}{k}\binom{k-2-\alpha_2}{k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \frac{1}{2}\binom{-\alpha_k}{1} & \cdots & \frac{1}{k}\binom{k-2-\alpha_k}{k-1}\end{vmatrix}=\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le k}(\alpha_i-\alpha_j)}{1!\,2!\ldots k!}$$

le déterminant du système (2.15_j) et désignons par $D_{jk}\,(j=1,2,\ldots,k)$ les compléments algébriques des éléments de la k-ième colonne. Supposons d'abord que les racines $\alpha_j\,(j=1,2,\ldots,k)$ de l'équation (1.6) sont deux à deux différentes. Alors $D_k\neq 0$ et la règle de Cramer donne

$$c_n^{(k)}=\frac{1}{D_k}\sum_{j=1}^{k}\frac{D_{jk}}{(\alpha_j+1)\binom{\alpha_j+n+1}{n}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha_j+\nu}{\nu}t_\nu^{(k,\lambda)}.$$

Si

$$(2.17)\qquad t_n^{(k,\lambda)}\cong(1+\lambda)L_n \qquad (n\to\infty),$$

une appliquation du corollaire (b) donne

$$(2.18)\qquad c_n^{(k)}\cong\frac{(1+\lambda)}{D_k}L_n\sum_{j=1}^{k}\frac{D_{jk}}{\alpha_j+1},$$

compte tenu de la relation (2.1). Étant donné que $1-\binom{k-1-\alpha}{k}$ est un polynôme algébrique d'ordre k en α avec un zéro simple pour $\alpha=-1$ on a l'identité

$$(2.19)\qquad 1-\binom{k-1-\alpha}{k}=(\alpha+1)\left(a_0+\frac{a_1}{2}\binom{-\alpha}{1}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{k}\binom{k-2-\alpha}{k-1}\right).$$

[2)] Ce n'est qu'une restriction apparente, car pour $\lambda=0$ le théorème 1 est trivialement vrai.

C'est seulement le coefficient a_{k-1} qui nous intéresse dans cette identité; on trouve immédiatement que $a_{k-1}=1$. Les α_j étant les racines de l'équation (1.6) on a

$$\sum_{j=1}^{k} D_{jk}\frac{1+\lambda}{\alpha_j+1}=\sum_{j=1}^{k} D_{jk}\frac{1-\binom{k-1-\alpha_j}{k}}{1+\alpha_j}$$
$$=\sum_{j=1}^{k} D_{jk}\left(a_0+\frac{a_1}{2}\binom{-\alpha_j}{1}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{k}\binom{k-2-\alpha_j}{k-1}\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{k} D_{jk}\frac{a_{k-1}}{k}\binom{k-2-\alpha_j}{k-1}=D_k.$$

De (2.18) résulte, donc,

$$c_n^{(k)}\cong L_n \qquad (n\to\infty).$$

En introduisant cette relation asymptotique et la relation (2.17) dans (1.2), on obtient l'affirmation du théorème 1.

Supposons maintenant que deux racines de l'équation (1.6), soit α_1 et α_2, sont égales. Alors les deux premières équations du système (2.15_j) se confondent et il faut substituer l'équation (2.15_1) par une autre. Dans ce but on remarquera que

$$\frac{\binom{\alpha+\nu}{\nu}}{\binom{\alpha+n+1}{n+1}}=\frac{\binom{n+1}{\nu}}{\binom{\alpha+n+1}{n+1-\nu}}$$

de sorte que (2.14) prend la forme

$$\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{\nu}}{\binom{\alpha+n+1}{n+1-\nu}}t_\nu^{(k,\lambda)}=\left(\binom{k-1-\alpha}{k}+\lambda\right)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{\nu}}{\binom{\alpha+n+1}{n+1-\nu}}c_\nu^{(k)}$$
$$(2.14^*)\qquad +(n+1)\sum_{m=1}^{k}\binom{m-2-\alpha}{m-1}\frac{c_n^{(m)}}{m}.$$

Étant donné que

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\binom{\alpha+n+1}{n+1-\nu}}=-\frac{1}{\binom{\alpha+n+1}{n+1-\nu}}\sum_{\mu=\nu+1}^{n+1}\frac{1}{\alpha+\mu},$$

on obtient, en dérivant (2.14*) par rapport à α,

$$-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{\nu}}{\binom{\alpha+n+1}{n+1-\nu}}\sum_{\mu=\nu+1}^{n+1}\frac{1}{\alpha+\mu}t_\nu^{(k,\lambda)}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{\nu}}{\binom{\alpha+n+1}{n+1-\nu}}c_\nu^{(k)}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\binom{k-1-\alpha}{k}+\lambda\right)$$

$$-\left(\binom{k-1-\alpha}{k}+\lambda\right)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{\nu}}{\binom{\alpha+n+1}{n+1-\nu}}\sum_{\mu=\nu+1}^{n+1}\frac{1}{\alpha+\mu}c_\nu^{(k)}$$

$$+(n+1)\sum_{m=1}^{k}\frac{d}{d\alpha}\binom{m-2-\alpha}{m-1}\frac{c_n^{(m)}}{m}.$$

Si l'on pose $\alpha=\alpha_2$ dans cette relation, les premiers deux termes au second membre s'annulent car α_2 est un zéro double de la fonction $\binom{k-1-\alpha}{k}+\lambda$ en α. Par conséquent,

$$(2.15_1^*)\qquad \sum_{m=1}^{k}\left[\frac{d}{d\alpha}\binom{m-2-\alpha}{m-1}\right]_{\alpha=\alpha_2}\frac{c_n^{(m)}}{m}=$$

$$=-\frac{1}{(n+1)\binom{\alpha_2+n+1}{n+1}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha_2+\nu}{n}\sum_{\mu=\nu+1}^{n+1}\frac{1}{\alpha_2+\mu}t_\nu^{(k,\lambda)}.$$

Désignons par (2.15_j^*) le système (2.15_j) dans lequel on a substitué l'équation (2.15_1) par l'équation (2.15_1^*). Le déterminant du système (2.15_j^*) est

$$D_k^*=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left[\frac{d}{d\alpha}\binom{-\alpha}{1}\right]_{\alpha=\alpha_2} & \cdots & \frac{1}{k}\left[\frac{d}{d\alpha}\binom{k-2-\alpha}{k-1}\right]_{\alpha=\alpha_2}\\ 1 & \frac{1}{2}\binom{-\alpha_2}{1} & \cdots & \frac{1}{k}\binom{k-2-\alpha_2}{k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \frac{1}{2}\binom{-\alpha_k}{1} & \cdots & \frac{1}{k}\binom{k-2-\alpha_k}{k-1}\end{vmatrix}=\left[\frac{d}{d\alpha_1}D_k\right]_{\alpha_1=\alpha_2}.$$

En tenant compte de (2.16), on a donc

$$1!\,2!\dots k!\,D_k^*=\left[\frac{d}{d\alpha_1}\prod_{1\leq i<j\leq k}(\alpha_i-\alpha_j)\right]_{\alpha_1=\alpha_2}=$$

$$=\prod_{2\leq i<j\leq k}(\alpha_i-\alpha_j)\left[\frac{d}{d\alpha_1}\prod_{j=2}^{k}(\alpha_1-\alpha_j)\right]_{\alpha_1=\alpha_2}=\prod_{2\leq i<j\leq k}(\alpha_i-\alpha_j)\cdot\prod_{j=3}^{k}(\alpha_2-\alpha_j)\neq 0.$$

Si l'on désigne par $D_{j,k}^*$ $(j=1,2,\dots,k)$ les compléments algébriques des éléments de la k-ième colonne du déterminant D_k^*, on a d'après la règle de Cramer

$$c_n^{(k)}=\frac{1}{D_k^*}\left\{-\frac{D_{1,k}^*}{(\alpha_2+1)\binom{\alpha_2+n+1}{n}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha_2+\nu}{\nu}\sum_{\mu=\nu+1}^{n+1}\frac{1}{\alpha_2+\mu}t_\nu^{(k,\lambda)}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=2}^{k}\frac{D_{j,k}^*}{(\alpha_j+1)\binom{\alpha_j+n+1}{n}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha_j+\nu}{\nu}t_\nu^{(k,\lambda)}\right\}.$$

En appliquant aux sommes au second membre les corollaires (c) et (b) respectivement, on obtient

$$\frac{c_n^{(k)}}{L_n} \to \frac{1+\lambda}{D_k^*}\left\{-\frac{D_{1,k}^*}{(\alpha_2+1)^2}+\sum_{j=2}^{k}\frac{D_{j,k}^*}{\alpha_j+1}\right\}=\frac{A_k}{D_k^*} \quad (n\to\infty)$$

et il n'y a de démontrer que $A_k = D_k^*$.

En dérivant (2.19) par rapport à α il résulte

$$(2.19^*)\qquad \begin{aligned} &-\frac{(\alpha+1)\dfrac{d}{d\alpha}\binom{k-1-\alpha}{k}+\left(1-\binom{k-1-\alpha}{k}\right)}{(\alpha+1)^2}= \\ &=\frac{a_1}{2}\frac{d}{d\alpha}\binom{-\alpha}{1}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{k}\frac{d}{d\alpha}\binom{k-2-\alpha}{k-1}. \end{aligned}$$

Étant donné que $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ sont des racines de l'équation (1.6) et parmis eux α_2 une racine double, de (2.19) et (2.19*) on obtient

$$\frac{1+\lambda}{\alpha_j+1}=a_0+\frac{a_1}{2}\binom{-\alpha_j}{1}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{k}\binom{k-2-\alpha_j}{k-1} \quad (j=2, 3, \ldots, k)$$

et

$$-\frac{1+\lambda}{(\alpha_2+1)^2}=\frac{a_1}{2}\left[\frac{d}{d\alpha}\binom{-\alpha}{1}\right]_{\alpha=\alpha_2}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{k}\left[\frac{d}{d\alpha}\binom{k-2-\alpha}{k-1}\right]_{\alpha=\alpha_2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} A_k &= D_{1,k}^*\sum_{m=1}^{k-1}\frac{a_m}{m+1}\left[\frac{d}{d\alpha}\binom{m-1-\alpha}{m}\right]_{\alpha=\alpha_2}+ \\ &\quad+\sum_{j=2}^{k}D_{j,k}^*\sum_{m=0}^{k-1}\frac{a_m}{m+1}\binom{m-1-\alpha_j}{m} \\ &=\sum_{m=0}^{k-1}\frac{a_m}{m+1}\left\{D_{1,k}^*\left[\frac{d}{d\alpha}\binom{m-1-\alpha}{m}\right]_{\alpha=\alpha_2}+\sum_{j=2}^{k}D_{j,k}^*\binom{m-1-\alpha_j}{m}\right\}. \end{aligned}$$

Or, en vertu des propriétés élémentaires des déterminants, on a

$$D_{1,k}^*\left[\frac{d}{d\alpha}\binom{m-1-\alpha}{m}\right]_{\alpha=\alpha_2}+\sum_{j=2}^{k}D_{j,k}^*\binom{m-1-\alpha_j}{m}=0$$

pour $m=0, 1, \ldots, k-2$ de sorte que

$$A_k=\frac{a_{k-1}}{k}\left\{D_{1,k}^*\left[\frac{d}{d\alpha}\binom{k-2-\alpha}{k-1}\right]_{\alpha=\alpha_2}+\sum_{j=2}^{k}D_{j,k}^*\binom{k-2-\alpha_j}{m-1}\right\}=D_k^*.$$

Théorème 2. En multipliant (1.8) par $\binom{\alpha+n}{n}$ et en sommant par rapport à n de 0 à n, on obtient

$$(2.20)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}\tau_\nu^{(k,\lambda)}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}s_\nu=\lambda\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}h_\nu^{(k)}.$$

Une sommation par parties donne

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}h_\nu^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}\left((\nu+1)\,h_\nu^{(k+1)}-\nu\,h_{\nu-1}^{(k+1)}\right)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\left[\binom{\alpha+\nu}{\nu}-\binom{\alpha+\nu+1}{\nu+1}\right](\nu+1)\,h_\nu^{(k+1)}+\binom{\alpha+n+1}{n+1}(n+1)\,h_n^{(k+1)},$$

de sorte que

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}h_\nu^{(k)}=\binom{\alpha+n+1}{n+1}(n+1)\,h_n^{(k+1)}-\alpha\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}\,h_\nu^{(k+1)}.$$

En appliquant cette formule avec $k=0,\ 1,\ \ldots$ successivement on obtient

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}h_\nu^{(0)}=\binom{\alpha+n+1}{n+1}(n+1)\,h_n^{(1)}+(-\alpha)\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}h_\nu^{(1)}$$

$$=\binom{\alpha+n+1}{n+1}(n+1)\,h_n^{(1)}+(-\alpha)\binom{\alpha+n+1}{n+1}(n+1)\,h_n^{(2)}+(-\alpha)^2\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}h_\nu^{(2)}$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et, par induction,

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}h_\nu^{(0)}=(n+1)\binom{\alpha+n+1}{n+1}\sum_{m=1}^{k}(-\alpha)^{m-1}\,h_n^{(m)}+(-\alpha)^k\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}h_\nu^{(k)}.$$

En introduisant cette relation dans (2.20), on obtient

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}\tau_\nu^{(k,\lambda)}=\left((-\alpha)^k+\lambda\right)\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}s_\nu$$

(2.21)

$$+(n+1)\binom{\alpha+n+1}{n+1}\sum_{m=1}^{k}(-\alpha)^{m-1}\,h_n^{(m)}.$$

Soient $\alpha_j\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ les racines de l'équation

(2.22) $$(-\alpha)^k+\lambda=0\qquad(\lambda\neq 0).$$

En posant $\alpha=\alpha_j$ dans (2.21) on obtient un système de k équations algébriques linéaires en $h_n^{(m)}$ $(m=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$, à savoir:

(2.23) $$\sum_{m=1}^{k}(-\alpha_j)^{m-1}\,h_n^{(m)}=\frac{1}{(\alpha_j+1)\binom{\alpha_j+n+1}{n}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha_j+\nu}{\nu}\tau_\nu^{(k,\lambda)}.$$

Soit

$$D_k=\begin{vmatrix}1 & (-\alpha_1)\cdots(-\alpha_1)^{k-1}\\ 1 & (-\alpha_2)\cdots(-\alpha_2)^{k-1}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ 1 & (-\alpha_k)\cdots(-\alpha_k)^{k-1}\end{vmatrix}$$

le déterminant du système (2.23) et désignons par $D_{jk}(j=1, 2, \ldots, k)$ les compléments algébriques des éléments de la k-ième colonne. La règle de Cramer donne alors

$$h_n^{(k)} = \frac{1}{D_k} \sum_{j=1}^{k} \frac{D_{jk}}{(\alpha_j+1)\binom{\alpha_j+n+1}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\alpha_j+\nu}{\nu} \tau_\nu^{(k,\lambda)}.$$

Si

$$\tau_n^{(k,\lambda)} \cong (1+\lambda) L_n \qquad (n \to \infty), \tag{2.24}$$

une application du corollaire (b) donne

$$h_n^{(k)} \cong \frac{1+\lambda}{D_k} L_n \sum_{j=1}^{k} \frac{D_{jk}}{\alpha_j+1} \tag{2.25}$$

compte tenu de la relation (2.1). Or, les α_j étant les racines de l'équation (2.22), on a

$$\sum_{j=1}^{k} D_{jk} \frac{1+\lambda}{1+\alpha_j} = \sum_{j=1}^{k} D_{jk} \frac{1-(-\alpha_j)^k}{1-(-\alpha_j)}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} D_{jk} (1+(-\alpha_j)+\cdots+(-\alpha_j)^{k-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{k} D_{jk} (-\alpha_j)^{k-1} = D_k.$$

De (2.25) résulte donc

$$h_n^{(k)} \cong L_n \qquad (n \to \infty). \tag{2.26}$$

En introduisant (2.24) et (2.26) dans (1.8) on obtient l'affirmation du théorème 2.

RÉFÉRENCES

[1] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Matematica (Cluj) 4 (1930), 38—53.

[2] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière, théorèmes fondamentaux*, Bull. Soc. Math. France 61 (1933), 55—62.

[3] M. Vuilleumier, *Sur le comportement asymptotique des transformations linéaires des suites*, Math. Zeitschr. 98 (1967), 126—139.

[4] S. Zimering, *Some Mercerian Theorems for Regularly Varying Sequences*, Publ. Inst. Math. Belgrade, 15 (29) (1973), 171—177.

[5] S. Aljančić, *Asymptotische Mercersätze für Hölder- und Cesàro-Mittel*, Publ. Inst. Math. Belgrade, 17 (31) (1974), 5—16.

[6] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press 1959.

[7] R. Bojanic and E. Seneta, *A Unified Theory of Regularly Varying Sequences*, Math. Zeitschr. 134 (1973), 91—106.

Belgrade, Yougoslavie
Proleterskih brigada 62