

UNE CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA COUCHE LIMITE
MAGNETOHDRODYNAMIQUE D'UN ECOULEMENT
DE REVOLUTION EN REGIME NON STATIONNAIRE

Tomislav Ašković et Radomir Ašković

(Communiqué pendant le XI Congrès yougoslave de la Mécanique rationnelle et appliquée
en 1972 à Baško Polje)

Abstract. The axisymmetrical unsteady laminar magnetohydrodynamic boundary layer on a body in non-uniform motion in the presence of some given magnetic induction is discussed. An universalisation of the unsteady magnetohydrodynamic boundary layer equations is first made in the sense that neither equations nor boundary conditions depend on particular problem conditions. The universality is achieved by transferring sets of parameters which express the influence of time, external conditions and shape of a body, as well as of the given magnetic induction, characteristic for each particular problem, into the independent variables. Subsequently, the solution of the obtained universal equation is given in the form of series in mentioned parameters.

1. Dans la théorie de la couche limite laminaire pour les problèmes à deux dimensions, la méthode approximative la plus connue est celle des quantités de mouvement, énoncée par Pohlhausen. Pour résoudre l'équation différentielle intégrale on exprime toutes les grandeurs inconnues de la couche limite en fonction d'un ou bien de plusieurs paramètres. Cette méthode intuitive est bien maniable et utile pour la pratique, mais malheureusement elle ne possède pas une base systématique pour obtenir des corrélations nécessaires afin d'avoir une possibilité des améliorations du procédé. C'est Loitsianskii [1] qui a proposé une méthode paramétrique avec une base mathématiquement ferme. En fait, il a transformé l'équation de la couche limite d'un écoulement à deux dimensions sous la forme universelle dont les corrélations obtenues sont indépendantes des conditions extérieures.

Il est possible de faire une extension de l'idée de l'universalisation de Loitsianskii au système des équations de la couche limite magnétohydrodynamique en régime non stationnaire dans le cas d'un écoulement de révolution, ce qui est le sujet de ce travail. Le problème analogue mais dans le cas plan d'un cylindre dans les deux régimes: stationnaire [2] et non stationnaire [3], ont été résolus récemment.

2. Les équations de la couche limite magnétohydrodynamique d'un écoulement de révolution dans le cas où le nombre de Reynolds magnétique est

petit, si bien que le champ magnétique induit par l'écoulement est négligeable par rapport à l'induction magnétique appliquée B et en absence du champ électrique, peuvent s'écrire sous la forme:

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \Omega' V + \Omega^2 V V' + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} (u - \Omega V), \\ \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

avec les conditions suivantes:

$$u = U(x, t), \quad v = 0 \quad \text{pour } y = 0, \quad \text{si } t = 0,$$

$$u = v = 0 \quad \text{pour } y = 0, \quad u \rightarrow U(x, t) \quad \text{pour } y \rightarrow \infty, \quad \text{si } t > 0.$$

Nous considérons le cas où la distribution des vitesses extérieures est de la forme: $U(x, t) = \Omega(t) V(x)$, donc, les fonctions dépendant des coordonnées: longitudinale x et temporelle t , sont séparées. y — représente la coordonnée normale, ν — coefficient de viscosité cinématique, ρ — la densité du fluide et σ — la conductivité.

3. Introduisons la fonction de courant $\psi(x, y, t)$ de la façon:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Alors, le système d'équations (1) se réduit en une seule:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + N \frac{\partial \psi}{\partial y} = \\ = r(\Omega' V + \Omega^2 V V' + N \Omega V)$$

avec les conditions suivantes:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = rU, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } y = 0, \quad \text{si } t = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } y = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow rU \quad \text{pour } y \rightarrow \infty, \quad \text{si } t > 0.$$

Des fonctions $\Omega(t)$, $V(x)$, $r(x)$ sont des fonctions de la classe C^k , $0 < k < \infty$, dans le domaine considéré.

1.1 Le calcul de la couche limite magnétohydrodynamique en régime non stationnaire d'un écoulement de révolution peut être basé, semblablement comme en [3] et [4], sur l'équation de quantité de mouvement de la couche limite magnétohydrodynamique sur plaque plane pour une vitesse extérieure non uniforme $\Omega(t)$. Si l'on intègre la première des équations du système (1) par

rapport à y entre 0 et ∞ , on obtient [3], après quelques transformations, l'équation suivante:

$$(3) \quad \frac{d\dot{z}_p}{dt} = 2R$$

où

$$\begin{aligned} R &= \zeta_p - \alpha_1 - \beta_1, \\ \alpha_1 &= \frac{\Omega'}{\Omega} \dot{z}_p, \quad \beta_1 = \frac{\sigma B^2}{\rho} \dot{z}_p = N \dot{z}_p, \\ \zeta_p &= \left[\frac{\partial(u/\Omega)}{\partial(y/\delta_p^*)} \right]_{y=0}, \quad \dot{z}_p = \frac{\delta_p^{*2}}{\nu}. \end{aligned}$$

Ici $\delta_p^*(t) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{\Omega}\right) dy$ représente l'épaisseur de réfolement sur une plaque plane.

1.2. Introduisons maintenant les nouvelles variables; d'abord, une variable normale:

$$(4) \quad \eta = A \frac{y}{\delta_p^*}$$

où A est une constante et ensuite — au lieu de variables x et t — trois ensemble infinis de paramètres de forme:

$$(5) \quad \left. \begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\Omega} \frac{d^k \Omega}{dt^k} \dot{z}_p^k, \\ \gamma_k &= \Omega^k \dot{z}_p^k V^{k-1} \frac{d^k V}{dx^k}, \\ \Delta_k &= \Omega^k \dot{z}_p^k \frac{1}{r} \frac{d^k r}{dx^k} V^k \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3, \dots$$

Au moyen des expressions (3) et (5) on obtient aisément les formules de transformations suivantes:

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{\dot{z}_p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\partial}{\partial \alpha_k} + 2R\beta_1 \frac{\partial}{\partial \beta_1} + c_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k} + g_k \frac{\partial}{\partial \Delta_k} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{\Omega V \dot{z}_p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(G_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k} + j_k \frac{\partial}{\partial \Delta_k} \right), \end{aligned} \right\}$$

où:

$$\begin{aligned} a_k &= (-\alpha_1 + 2kR) \alpha_k + \alpha_{k+1}, \\ c_k &= (k\alpha_1 + 2kR) \gamma_k, \\ g_k &= (k\alpha_1 + 2kR) \Delta_k, \\ G_k &= (k-1) \gamma_1 \gamma_k + \gamma_{k+1}, \\ j_k &= (k\gamma_1 - \Delta_1) \Delta_k + \Delta_{k+1}. \end{aligned}$$

1.3. Cherchons la solution de l'équation (2) sous la forme:

$$(7) \quad \psi(x, y, t) = \frac{r \delta_p^*}{A} \Omega V F(\eta, \beta_1, \{\alpha_k\}, \{\gamma_k\}, \{\Delta_k\})$$

où F est une fonction réelle, continue et infiniment dérivable par rapport à toutes ses variables.

Après l'introduction de l'expression (7) dans l'équation (2) on obtient:

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} & A^2 \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + \gamma_1 \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right] + (\alpha_1 + \beta_1) \left(1 - \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \Delta_1 F \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \\ & + R \eta \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 2R\beta_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \beta_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \alpha_k} + c_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \gamma_k} + g_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \Delta_k} \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_k \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \gamma_k} \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \gamma_k} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) + j_k \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \Delta_k} \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \Delta_k} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) \right], \end{aligned} \right\}$$

avec les conditions aux limites:

$$(9) \quad \begin{aligned} F = \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \quad \text{pour } \eta = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \text{pour } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Puisque ni l'équation (8) ni les conditions (9) ne dépendent pas des données particulières du problème considéré, ce signifie que cette équation est universelle et peut être intégrée une fois pour toujours.

Il reste cependant à résoudre séparément, pour $\Omega(t)$ donné, l'équation différentielle ordinaire (3), afin de trouver la fonction z_p , c'est-à-dire δ_p^* , figurant dans les nouvelles variables (4) et (5).

2.1. L'équation paramétrique à n — paramètres, obtenue de (8), peut être intégrée soit numériquement avec un ordinateur électronique, soit en développant la fonction $F(\eta, \beta_1, \{\alpha_k\}, \{\gamma_k\}, \{\Delta_k\})$ en série des paramètres $\beta_1, \alpha_k, \gamma_k, \Delta_k$.

2.2. Pour le moment nous avons trouvé la solution de l'équation (8) sous forme du développement en série:

$$(10) \quad \begin{aligned} F = & F_0(\eta, \{\alpha_k\}) + \beta_1 F_{01}(\eta, \{\alpha_k\}) + \gamma_1 F_{1a}(\eta, \{\alpha_k\}) + \Delta_1 F_{1b}(\eta, \{\alpha_k\}) + \\ & + \beta_1^2 F_{02}(\eta, \{\alpha_k\}) + \gamma_1^2 F_{11a}(\eta, \{\alpha_k\}) + \Delta_1^2 F_{11b}(\eta, \{\alpha_k\}) + \\ & + \beta_1 \gamma_1 F_{12}(\eta, \{\alpha_k\}) + \beta_1 \Delta_1 F_{13}(\eta, \{\alpha_k\}) + \dots \end{aligned}$$

Si l'on présente, ensuite, les fonctions $F_0, F_{01}, F_{1a}, F_{1b}, \dots$ etc. sous forme des séries vis-à-vis les variables α_k :

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} F_0 &= f_{0,0}(\eta) + \alpha_1 f_{0,1}(\eta) + \alpha_1^2 f_{0,11}(\eta) + \alpha_1^3 f_{0,111}(\eta) + \alpha_2 f_{0,2}(\eta) + \dots, \\ F_{01} &= f_{01,0}(\eta) + \alpha_1 f_{01,1}(\eta) + \alpha_1^2 f_{01,11}(\eta) + \alpha_2 f_{01,2}(\eta) + \dots, \\ F_{1a} &= f_{1a,0}(\eta) + \alpha_1 f_{1a,1}(\eta) + \alpha_1^2 f_{1a,11}(\eta) + \alpha_2 f_{1a,2}(\eta) + \dots, \\ F_{1b} &= f_{1b,0}(\eta) + \alpha_1 f_{1b,1}(\eta) + \alpha_1^2 f_{1b,11}(\eta) + \alpha_2 f_{1b,2}(\eta) + \dots, \\ F_{02} &= f_{02,0}(\eta) + \alpha_1 f_{02,1}(\eta) + \alpha_1^2 f_{02,11}(\eta) + \alpha_2 f_{02,2}(\eta) + \dots, \\ F_{11a} &= f_{11a,0}(\eta) + \alpha_1 f_{11a,1}(\eta) + \alpha_1^2 f_{11a,11}(\eta) + \dots, \\ F_{11b} &= f_{11b,0}(\eta) + \alpha_1 f_{11b,1}(\eta) + \alpha_1^2 f_{11b,11}(\eta) + \dots, \end{aligned} \right\}$$

et la fonction R comme suit:

$$(12) \quad \begin{aligned} R &= R_0 + R_{01} \beta_1 + R_1 \alpha_1 + R_{12} \beta_1 \alpha_1 + R_{02} \beta_1^2 + R_{11} \alpha_1^2 + \\ &+ R_{03} \beta_1^2 + R_{111} \alpha_1^3 + R_{11,2} \beta_1^2 \alpha_1 + R_{1,22} \beta_1 \alpha_1^2 + \dots, \end{aligned}$$

on obtient un système récursif des équations différentielles ordinaires pour les fonctions $f(\eta)$:

$$D_0(f_{0,0}) = 0,$$

$$D_1(f_{0,1}) = -\frac{1}{A^2} (R_1 \eta f_{0,0}'' - f_{0,0}' + 1).$$

$$D_2(f_{0,11}) = \frac{1}{A^2} (2R_1 f_{0,1}' - R_1 \eta f_{0,1}'' - R_{11} \eta f_{0,0}''),$$

$$D_3(f_{0,111}) = \frac{1}{A^2} [(4R_1 - 1)f_{0,11}' - R_1 \eta f_{0,11}'' + 2R_{11} \eta f_{0,1}' - R_{11} \eta f_{0,1}'' - R_{111} \eta f_{0,0}''],$$

$$D_1(f_{01,0}) = -\frac{1}{A^2} (1 - f_{0,0}' + R_{01} \eta f_{0,0}''),$$

$$D_2(f_{01,1}) = \frac{1}{A^2} (f_{01,0}' - R_1 \eta f_{01,0}'' + 2R_1 f_{01,0}' + f_{0,1}' + 2R_{01} f_{0,1}' - R_{01} \eta f_{0,1}'' - R_{12} \eta f_{0,0}''),$$

$$D_1(f_{1a,0}) = -\frac{1}{A^2} (1 - f_{0,0}'^2 + f_{0,0} f_{0,0}''),$$

$$D_2(f_{1a,1}) = \frac{1}{A^2} [2(R_1 + 1)f_{1a,0}' - R_1 \eta f_{1a,0}'' + 2f_{0,0}' f_{0,1}' - f_{0,0} f_{0,1}'' - f_{0,0}'' f_{0,1}],$$

$$D_1(f_{1b,0}) = -\frac{1}{A^2} f_{0,0} f_{0,0}'',$$

$$D_2(f_{1b,1}) = -\frac{1}{A^2} (R_1 \eta f_{1b,0}'' - 2R_1 f_{1b,0}' - 2f_{1b,0}' + f_{0,0} f_{0,1}'' + f_{0,0}'' f_{0,1}).$$

$$D_2(f_{02,0}) = \frac{1}{A^2} [(2R_{01} + 1)f'_{01,0} - R_{01}\eta f''_{01,0} - R_{02}\eta f''_{0,0}],$$

$$D_3(f_{02,1}) = \frac{1}{A^2} [(4R_1 + 1)f'_{02,0} - R_1\eta f''_{02,0} + (4R_{01} + 1)f'_{01,1} - R_{01}\eta f''_{01,1} + 2R_{12}f'_{01,0} - R_{12}\eta f''_{01,0} + 2R_{02}f'_{0,1} - R_{02}\eta f''_{0,1} - R_{11,2}\eta f''_{0,0}],$$

$$D_2(f_{11a,0}) = \frac{1}{A^2} (2f'_{0,0}f'_{1a,0} - f_{0,0}f''_{1a,0} - f''_{0,0}f_{1a,0}),$$

$$D_2(f_{11b,0}) = -\frac{1}{A^2} (f_{0,0}f''_{1b,0} + f'_{0,0}f'_{1b,0}),$$

où:

$$D_k = \frac{d^3}{d\eta^3} + \frac{R_0}{A^2}\eta \frac{d^2}{d\eta^2} - 2\frac{R_0}{A^2}k \frac{d}{d\eta}.$$

Les conditions aux limites sont:

$$f_{0,0}(0) = f'_{0,0}(0) = 0, \quad f'_{0,0}(\infty) \rightarrow 1;$$

$$f_{0,1}(0) = f_{0,11}(0) = f_{01,0}(0) = f_{01,1}(0) = f_{1a,0}(0) = \dots = f'_{0,1}(0) = f'_{0,11}(0) = f'_{01,0}(0) = f'_{1a,0}(0) = \dots = f'_{0,1}(\infty) = f'_{0,11}(\infty) = f'_{01,0}(\infty) = f'_{1a,0}(\infty) = \dots = 0.$$

2.3. Si l'on adapte la fonction (10) à une plaque plane et tenant compte des formules données au § 1.1 on obtient [3]:

$$R = A \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial \eta^2} + \beta_1 \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial \eta^2} + \beta_1^2 \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial \eta^2} + \beta_1^3 \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial \eta^2} + \dots \right)_{\eta=0} - \alpha_1 - \beta_1,$$

d'où, vu les développements (11) et (12):

$$(13) \quad \begin{aligned} R_0 &= Af''_{0,0}(0), & R_{01} &= Af''_{01,0}(0) - 1, \\ R_1 &= Af''_{0,1}(0) - 1, & R_{12} &= Af''_{01,1}(0), \\ R_{02} &= Af''_{02,0}(0), & R_{11} &= Af''_{0,11}(0), \\ R_{03} &= Af''_{03,0}(0). \end{aligned}$$

D'autre part, si l'on veut que les équations différentielles ordinaires pour les fonctions $f(\eta)$, données au § 2.2, deviennent du type parabolique, résolubles analytiquement [3], il convient à choisir que:

$$(14) \quad \frac{R_0}{A^2} = 2.$$

2.4. Les équations différentielles ordinaires pour les fonctions universelles $f(\eta)$ sont donc du type parabolique dont les solutions analytiques peuvent être présentées à l'aide des fonctions de Weber ou de cylindre parabolique [5]. Voici quelques solutions de ces équations exprimées par l'intégrale de la fonction de Gauss $g_\alpha(\eta)$:

$$f_{0,0}(\eta) = \eta + g_{\frac{1}{2}}(\eta) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(3/2)},$$

$$f'_{0,1}(\eta) = f'_{01,0}(\eta) = \frac{1}{A^2} \left[\frac{1}{4} g_0(\eta) + \frac{R_1}{16} g_{-1}(\eta) - g_1(\eta) \right],$$

$$f'_{0,11}(\eta) = \left(\frac{R_{11}}{24A^2} - \frac{R_1^2}{48A^4} - \frac{R_1}{96A^4} \right) g_{-1}(\eta) - \frac{R_1^2}{512A^4} g_{-2}(\eta),$$

$$f'_{01,1}(\eta) = \frac{8\pi - 14\pi^2}{3} g_2(\eta) + \left(\frac{\pi}{12} - \frac{7\pi^2}{48} \right) g_0(\eta) + \left(\frac{7\pi^2}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) g_1(\eta) - \frac{\pi^2}{576} g_{-2}(\eta) + \left(\frac{5\pi^2}{432} - \frac{\pi}{108} + \frac{\pi R_{12}}{24} \right) g_{-1}(\eta),$$

$$f'_{ia,0}(\eta) = \frac{1}{A^2} \left[\frac{1}{2} g_0(\eta) - \frac{1}{2} \left(3 + \frac{4}{3\pi} \right) g_1(\eta) - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} g_{-\frac{1}{2}}(\eta) + \frac{1}{16} g_{-1}(\eta) + \frac{1}{2} g_{\frac{1}{2}}^2(\eta) - \frac{1}{2} g_0(\eta) g_1(\eta) \right],$$

$$f'_{ib,0}(\eta) = \left(\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} \right) g_1(\eta) + \frac{\pi}{16} g_{-1}(\eta) - \frac{\sqrt{\pi}}{6} g_{-\frac{1}{2}}(\eta) - \frac{\pi}{2} g_0(\eta) g_1(\eta).$$

3.1. A l'aide des solutions analytiques, données ci-avant, d'une part, et des formules (13) et (14) d'autre part, nous avons calculé les constantes:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad R_{12} = \frac{1}{45} - \frac{\pi}{90},$$

$$R_0 = \frac{2}{\pi}, \quad R_{11} = \frac{\pi}{72},$$

$$R_1 = R_{01} = -\frac{2}{3}, \quad R_{02} = \frac{\pi}{180},$$

3.2. Cependant, pour chaque cas d'écoulement particulier il faut résoudre encore l'équation (3), i. e.:

$$\frac{d^2 z_p}{dt^2} = 2(R_0 + R_{01}\beta_1 + R_1\alpha_1 + R_{12}\beta_1\alpha_1 + R_{02}\beta_1^2 + R_{11}\alpha_1^2 + \dots).$$

Bien que l'on puisse, en principe, résoudre cette équation différentielle non linéaire avec un ordinateur, il est plus rationnel parfois de la linéariser en négligeant, en première approximation, le terme en \dot{z}_p^2 et les termes suivants (la „simple solution“). On obtient, ainsi, l'intégrale:

$$(15) \quad \dot{z}_p(t) = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{4}{3}Nt} \Omega^{-\frac{4}{3}} \int_0^t e^{\frac{4}{3}Nt} \Omega^{\frac{4}{3}} dt,$$

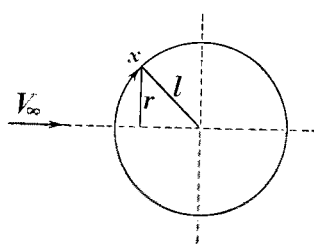
qui peut être calculé facilement pour chaque Ω particulier.

4. A partir des relations obtenues précédemment, nous allons étudier quelques exemples et comparer nos résultats à ceux obtenus par d'autres auteurs:

4.1. On considère une sphère du rayon l qui est mise brusquement en mouvement uniforme de translation avec la vitesse V_∞ en présence d'un champ magnétique transversal dont l'induction est constante $B = \text{const.}$ Donc:

$$\Omega(t) = V_\infty, \quad V(x) = \frac{3}{2} \sin \frac{x}{l},$$

On a encore, d'après le croquis ci-contre, que:



$$r = l \sin \frac{x}{l}.$$

A partir de (15) on obtient:

$$\dot{z}_p = \frac{3}{\pi N} (1 - e^{-\frac{4}{3}Nt}), \quad \text{où: } N = \frac{\sigma B^2}{\rho}$$

La vitesse longitudinale et la contrainte tangentielle dans la couche limite en cas de la „simple solution“ sont:

$$(16) \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \Omega V \left(\frac{\partial F_0}{\partial \eta} + \beta_1 \frac{\partial F_{01}}{\partial \eta} + \gamma_1 \frac{\partial F_{1a}}{\partial \eta} + \Delta_1 \frac{\partial F_{1b}}{\partial \eta} + \dots \right),$$

$$(17) \quad \tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{A}{\delta_p^*} \Omega V \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial \eta^2} + \beta_1 \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial \eta^2} + \gamma_1 \frac{\partial^2 F_{1a}}{\partial \eta^2} + \Delta_1 \frac{\partial^2 F_{1b}}{\partial \eta^2} + \dots \right)_{\eta=0},$$

où d'après les formules (5):

$$\alpha_1 = \frac{\Omega'}{\Omega} \dot{z}_p = 0, \quad \beta_1 = N \dot{z}_p = \frac{3}{\pi} (1 - e^{-\frac{4}{3}Nt}),$$

$$\gamma_1 = \Omega \dot{z}_p \frac{dV}{dx} = \frac{9}{2\pi} \frac{V_\infty}{Nl} (1 - e^{-\frac{4}{3}Nt}) \cos \frac{x}{l},$$

$$\Delta_1 = \Omega \dot{z}_p \frac{V}{r} \frac{dr}{dx} = \frac{9}{2\pi} \frac{V_\infty}{Nl} (1 - e^{-\frac{4}{3}Nt}) \cos \frac{x}{l}.$$

En tenant compte des relations (11) on obtient de (17) que le point de décollement, dans le cas de la „simple solution“, est déterminé par:

$$f''_{0,0}(0) + \beta_1 f''_{01,0}(0) + \gamma_1 f''_{1a,0}(0) + \Delta_1 f''_{1b,0}(0) = 0,$$

d'où on constate que la distance parcourue de la sphère $s_{dec.} = V_\infty t$ jusqu'au moment du premier décollement qui apparaît dans le point d'arrêt postérieur ($\cos \frac{x}{1} = -1$) est présentée par:

$$(18) \quad \frac{s_{dec.}}{1} = \frac{3}{4N^*} \ln \frac{N^* - b}{3N^* - b}$$

où:

$$N^* = \frac{NI}{V} \quad \text{et} \quad b = \frac{9}{2} - \frac{3}{\pi}.$$

La fonction (18) est définie en intervalle $0 < N^* < \frac{1}{3} b$.

Dans le cas d'un fluide „non-conducteur“ on a:

$$\frac{s_{dec.}}{1} = \frac{3}{4} \lim_{N^* \rightarrow 0} \ln \left(\frac{N^* - b}{3N^* - b} \right)^{\frac{1}{N^*}} = \frac{\pi}{3\pi - 2} = 0.423,$$

ce qui est justement la valeur obtenue par Boltze [6].

La figure 1 qui représente le comportement de $\frac{s_{dec.}}{1}$ en fonction du paramètre magnétique N^* montre qu'on peut éviter le décollement si:

$$N^* \rightarrow \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} \right).$$

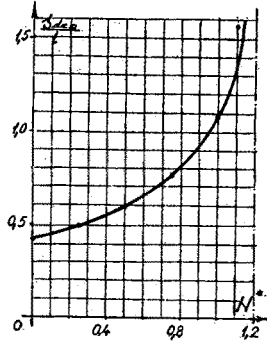


Fig. 1

4.2. Prenons cette fois que la même sphère est mise en mouvement de translation avec la fonction Ω suivante:

$$\Omega(t) = V_\infty e^{ct}, \quad c > 0.$$

Dans ce cas l'intégrale (15) donne:

$$\tilde{z}_p = \frac{3}{\pi(N+c)}$$

de sorte que les paramètres de forme deviennent:

$$\alpha_1 = \frac{3c}{\pi(N+c)}, \quad \beta_1 = \frac{3N}{\pi(N+c)},$$

$$\gamma_1 = \Delta_1 = \frac{9}{2\pi(N+c)} \frac{V_\infty}{1} e^{ct} \cos \frac{x}{1}.$$

En suivant le même procédé comme auparavant on obtient que la distance parcourue $\left(s_{\text{dec.}} = \frac{V_{\infty}}{c} e^{ct}\right)$ jusqu'au premier décollement au point d'arrêt

$$\left(\cos \frac{x}{1} = -1\right)$$

est donnée par:

$$(19) \quad \frac{s_{\text{dec.}}}{1} = \frac{2\pi}{3\pi-2} (N^* + 1) + \frac{2-\pi}{15(3\pi-2)} \frac{N^*}{N^*+1}$$

où:

$$N^* = \frac{N}{c}$$

Dans le cas d'un fluide „non-conducteur“ le paramètre magnétique N^* devient zéro et la formule (19) nous offre:

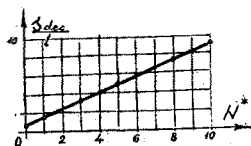


Fig. 2

$$\frac{s_{\text{dec.}}}{1} = \frac{2\pi}{3\pi-2} = 0.846,$$

ce qui est également la valeur déjà trouvée dans le problème analogue de la couche limite dynamique [7].

La figure 2 montre que le décollement de la couche limite apparaît d'autant plus tard si le paramètre magnétique N^* est plus grand.

REFERENCES

- [1] L. G. Loitsianski, *Equations universelles et approximations paramétriques dans la théorie de la couche limite laminaire*, Prikl. Mat. Meh. 29 (1), p. 70—87, 1965.
- [2] Z. Boričić, *Equations universelles de la couche limite magnétohydrodynamique laminaire bidimensionnelle en régime stationnaire*, Thèse en doctorat, Niš, Yougoslavie, 1971.
- [3] R. Ašković, *Parametric approximations for unsteady laminar magnetohydrodynamic boundary layer equations*, Communication personnelle.
- [4] M. Đurić, *On the universal form of unsteady incompressible boundary layer equation and its solution*, Publ. de l'Inst. Math., Tome 9 (23), p. 123—134, 1969.
- [5] T. E. Whittaker and N. G. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge, Univ. Press, 1946.
- [6] E. Boltze, *Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Dissertation, Göttingen, 1908.
- [7] R. Ašković, *Une contribution à l'étude de la couche limite non stationnaire d'un écoulement de révolution*, Publ. de l'Inst. Math. T. 5 (19), 1965 (en russe).