PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 17 (31), 1974, pp. 183—189

КОВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОДНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В. А. Вуйичич

(Сообщено 15 января 1974)

Дифференциальные уравнения движения голономной склерономной механической системы при наличии диссипативных сил $b_{\alpha\beta}\dot{q}^{\beta}$ в общем случае нелинейные относительно координат q^{α} и скоростей $\dot{q}^{\alpha}$ т.е.

$$(0.1)\qquad a_{\alpha\beta}\ddot{q}^{\beta}+\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}=b_{\alpha\beta}\dot{q}^{\beta}\qquad(\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ldots,\ n)$$

так как фундаментальный тензор $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}(q^1,\ q^2,\ldots,\ q^n)$, символы Кристоффеля $\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}=\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}(q^1,q^2,\ldots,q^n)$ и ковариантный тензор $b_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}(q^1,\ q^2,\ldots,\ q^n)$ нелинеийные функции координат. В общем случае это и неявные функции. Поэтому казалось, что эту систему диффененциальных уравнений нельзя интегрировать. Между тем, применяя абсолютный интеграл тензора [3]

$$(0.2)\qquad \hat{\int} DT_{\beta}{}^{\alpha}=T_{\beta}{}^{\alpha}(X)-\mathcal{A}_{\beta}{}^{\alpha}(M,\ X),$$

и ковариантные выражения для скорости [6] в криволинейной системе координат

$$(0.3)\qquad \dot{q}^{\alpha}=\frac{D\rho^{\alpha}}{dt}=\frac{d\rho^{\alpha}}{dt}+\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\rho^{\beta}\frac{dq^{\gamma}}{dt}$$

мы получили [5] n ковариантных интегралов вида

$$(0.4)\qquad a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\beta}-b_{\alpha\beta}\rho^{\beta}=\mathcal{A}_{\alpha}$$

для случая когда $b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}(q^1,\ q^2,\ldots,\ q^n)$ ковариантно постоянный тензор. В статье [4] мы показали способ определения ковариантно постоянного вектора $\mathcal{A}_{\alpha}$. Пусть в начальный момент времени t_0, будет: $\dot{q}^{\alpha}(t_0)=\dot{q}_0{}^{\alpha}=\dot{q}^a$, $a_{\alpha\beta}(q_0{}^1,\ q_0{}^2,\ldots,\ q_0{}^n)=a_{ab}$, $b_{\alpha\beta}(q_0{}^1,\ q^2,\ldots,q^n{}_0)=b_{ab}$, $\rho^{\beta}(q_0{}',\ q_0{}^2,\ldots,\ q_0{}^n)=\rho_0{}^{\beta}=\rho^b$, $q^{\alpha}(t_0)=q_0{}^{\alpha}$.

Тогда получим

$$(0.5)\qquad \mathcal{A}_{\alpha}=a_{\alpha}{}^{a}(a_{ab}\dot{q}^b-b_{ab}\rho^b)$$

где

$$(0.6)\qquad a_{\alpha}{}^{a}=a_{\alpha}{}^{a}(q_0{}^1,\ q_0{}^2,\ldots,\ q_0{}^n;\ q^1,\ q^2,\ldots,\ q^n)$$

двухточечный фундаментальный тензор [1], [7] многообразия V_n в котором рассматривается движение динамической системы. Индексными буквами

$a, b, c, d, \ldots = 1, 2, \ldots, n$ обозначаем тензорные величины в начелной точке M траектории, например $\dot{q}^{\beta}(t_0) = \dot{q}_0{}^{\beta} = \dot{q}^b$; индексами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, \ldots, n$ обозначаем соотвествующие величины в точке X для любого момента времени t.

1. Хотя и указано [3], что все интегралы, которые можно получить при помощи абсолютного интеграла тензора (0.2) ковариантные, все таки иногда появляются сомнения о самом значении ковариантных интегралов в механическом смисле. Известно, что дифференциальные уравнения движения Ньютона $\mathcal{N}_i$ для системы материальных точек (пусть это будет голономная склерономная система) можно посредством преобразования T перевести в дифференциалньные уравнения движения Лагранжа $\mathcal{L}_\alpha$ второго рода. Выразим это символически следующим образом

$$\mathcal{N}_i \xleftrightarrow{T} \mathcal{L}_\alpha \tag{1.1}$$

и будем читать, что дифференциальные уравнения движения Лагранжа $\mathcal{L}_\alpha$ в многообразии V_n эквивалентны дифференциальным уравнениям Ньютона $m_i \dfrac{d\dot{y}_i}{dt} = Y_i$ в многообразию E_{3N}, $n \leqslant 3N$. Если дифференциальные уравнения $\mathcal{L}_\alpha$ выразым через абсолютную производную по времени $\dfrac{D}{dt}$ мы получим одни и тоже варианты (т.е. ковариантные) уравнений $\mathcal{N}_i$ и $\mathcal{L}_\alpha$ в многообразям, соотвественно, E_{3N} и V_n, т.е.

$$m_i \frac{d\dot{y}_i}{dt} = V_i \xleftrightarrow{T} a_{\alpha\beta} \frac{D\dot{q}^{\beta}}{dt} = Q_\alpha \tag{1.2}$$

так как производная в E_{3N} равняется абсолоютной производной, т.е. $\dfrac{d\dot{y}^i}{dt} = \dfrac{D\dot{y}^i}{dt}$. Известно тоже и преобразование T и мы запишем

$$\mathcal{N}_i \frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha} = \mathcal{L}_\alpha, \tag{1.3}$$

где y_i координаты Декарта, а q^α обобщенные координаты Лагранжа. Соотношения (1.3) характеризируют ковариантную природу дифференциальныных уравнений $\mathcal{N}_i$ и $\mathcal{L}_\alpha$. Принято интегрировать дифференциальные уравнения и одним и тем же интегралным оператором. Не трудно показать что эти интегралы не сохраняют свою ковариантную природу, а это означает, что не выражают одны и тоже особенности движения.

Если интегралы дифференциалных уравненый $\mathcal{N}_i$ в E_{3N} обозначим через $\mathcal{J}_i$, а интегралы диференциальных уравнений $\mathcal{L}_\alpha$ в V_n через $\mathcal{J}_\alpha$ их взаимоотношения представим схематически

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_i & \xleftrightarrow{\quad T \quad} & \mathcal{L}_\alpha \\ \updownarrows & & \updownarrows * \\ \mathcal{J}_i & \longleftarrow\!\mid\!\longrightarrow & \mathcal{J}_\alpha \end{array}\right. \tag{1.4}$$

Другими словами $\mathcal{J}_i \frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha} \neq \mathcal{J}_\alpha$, и так-же дифференцируя $\mathcal{J}_\alpha$ не получим „простим способом“ первоначальный вид дифференциальных уравнений $\mathcal{L}_\alpha$. Откуда это происходит? Вспомним, что в многообразии E_{3N}. дифференциалу dy^i вектора соотвествует абсолютный дифференциал $D\rho^\alpha$ того же вектора в многообразии V_n, т.е.

$$d\mathcal{J}^i = \frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha} D\hat{\mathcal{J}}^\alpha. \tag{1.5}$$

Интегрировать эти соотношения известным оператором интеграла нельзя, так как $\frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha} = g_\alpha{}^i(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ в общем случаю неявные функции координат $q^1, q^2, \ldots, q^n$; также из $D\hat{\mathcal{J}}^\alpha = d\hat{\mathcal{J}}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \hat{\mathcal{J}}^\beta dq^\gamma$ не получим первоначальный вектор $\hat{\mathcal{J}}^\alpha = \hat{\mathcal{J}}^\alpha(q^1, q^2, \ldots, q^n)$. Чтобы эту задачу можно было бы решить положительно, оказалось необходимым построить новый интеграл тензора [3], у которого имеются ковариантные особености. В многообразии V_n мы показали [6], что этот интеграл вектора будет:

$$\hat{\int} D\hat{\mathcal{J}}^\alpha = \hat{\mathcal{J}}^\alpha(q^1, q^2, \ldots, q^n) - \mathcal{A}^\alpha(q^1, q^2, \ldots, q^n;\ q_0{}^1, q_0{}^2, \ldots, q_0{}^n)$$

где $\mathcal{A}^\alpha$ ковариантно постоянный вектор. Так как в E_{3N} абсолютний дифференциал вектора равняется обыкновенному дифференциалу того-же вектора, то будет $\hat{\int} D\mathcal{J}^i = \int d\mathcal{J}^i = \mathcal{J}^i + C^i$ где C^i постоянные интегрирования. Таким образом применением абсолютного интеграла тензора мы привели в порядок схему (1.4) и будем иметь:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_i & \xleftrightarrow{\;T\;} & \mathcal{L}_\alpha \\ \uparrow\!\downarrow & & \upharpoonleft\!\downharpoonright \\ \mathcal{J}_i & \longleftrightarrow & \hat{\mathcal{J}}_\alpha \end{array}$$

Другими словами $\hat{\mathcal{J}}_\alpha = \mathcal{J}_i \frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha}$ представляют интегралы $\mathcal{J}_i$ преобразованные в V_n. Но мы их получаем не посредством преобразования T, а применением аболютного интеграла тензора. Отсюда видно, что только посредством абсолютного интеграла тензора в V_n можно получить ковариантные интегралы дифференциальных уравнени движения. В работе [5] мы определили некоторые первые интегралы, в рамках которых и дифференциальные соотнощения (0.4). В продолжении мы ковариантно интегрируем и эти соотношения.

2. Соотношения (0.4) в смисле (0.5), т.е.

$$a_{\alpha\beta}\frac{dq^\beta}{dt} - b_{\alpha\beta}\,\rho^\beta = a_\alpha{}^a\,(a_{ab}\,\dot{q}^b - b_{ab}\,\rho^b) \tag{2.1}$$

очевидно представляют дифференциальные уравнения первого порядка относительно первой обыкновенннной производной по времени $\frac{d}{dt}$. Чтобы было возможно далшье интегрировать эти уравнения в пространстве V_n необходимо производную $\frac{dq^\beta}{dt}$ выразить через абсолютную производную [6] в виде соотношений (0.3). С другой стороны мы предположим что тензоры $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ связаны соотношениями $b_{\alpha\beta}=\lambda_\alpha a_{\alpha\beta}$, где по индексам α не суммируются. Чтобы их отличать от индексов суммирования, если они являются в одном числе или тензоре, их будем обозначать соотвествующими большими буквами. В конкретном случае это будет

$$b_{A\beta}=\lambda_A a_{A\beta} \qquad (\alpha=A=1, 2, \dots, n). \tag{2.2}$$

Поставляя (0.3) и (2.2) в уравнения (2.1) получим

$$a_{A\beta}\frac{D\rho^\beta}{dt}=\lambda_A a_{A\beta}\rho^\beta+a_A{}^a(a_{ab}\dot{q}^b-b_{ab}\rho^b). \tag{2.3}$$

Эти дифференциальные уравнения можно записат в виде

$$\frac{D\rho_1}{\lambda_1 a_{1\beta}\rho^\beta+a_1{}^a(a_{ab}\dot{q}^b-b_{ab}\rho^b)}=\frac{D\rho_2}{\lambda_2 a_{2\beta}\rho^\beta+a_2{}^a(a_{ab}\dot{q}^b-b_{ab}\rho^b)}=\dots$$

$$\dots=\frac{D\rho_n}{\lambda_n a_{n\beta}\rho^\beta+a_n{}^a(a_{ab}\dot{q}^b-b_{ab}\rho^b)}=dt,$$

или короче

$$\frac{D\rho_A}{\lambda_A\rho_A+a_A{}^a(a_{ab}\dot{q}^b-b_{ab}\rho^b)}=Dt.$$

Подставляя

$$\lambda_A\rho_A+a_A{}^a(a_{ab}\dot{q}^b-b_{ab}\rho^b)=U_A\to D\rho_A=\frac{DU_A}{\lambda_A}, \tag{2.4}$$

мы, очевидно, получим простое векторное соотношение

$$\frac{DU_A}{U_A}=\lambda_A Dt. \tag{2.5}$$

Так как $b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}(q^1, q^2, \dots, q^n)$ и $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}(q^1, q^2, \dots, q^n)$ ковариантно постояные тензоры, то из (2 2) следует что и $\lambda_A=\lambda_A(q^1, \dots, q^n)$ должно иметь тот-же характер. Применяя теперь абсолютный интеграл тензора

$$\hat{\int}\frac{DU_A}{U_A}=\hat{\int}\lambda_A Dt\to\ln U_A=\lambda_A t+B_A,$$

получим в смисле подстановки (2.4) и (2.2),

$$\ln\left(b_{A\beta}\rho^\beta+a_A{}^a(a_{ab}\dot{q}^b-b_{ab}\rho^b)\right)=\lambda_A t+\mathcal{B}_A, \tag{2.6}$$

где вектор $\mathcal{B}_A$ надо определить нами показаним способом [4]. Пусть в начальный момент времени $t=t_0$ будет $\lambda_a=\lambda_A(q_0{}^1, \dots, q_0{}^n)$, $\rho_a=\rho_A(q_0{}^1, \dots, q_0{}^n)$, $a_a{}^a=a_A{}^a(q_0{}^1, q^2 \dots, q_0{}^n)$. В работе [1] показано, что координаты смешанного двухточечного тензора (0.6) при совпадании точек t_0 и t являются символами Кронекера $a_a{}^b=\delta_a{}^b=\begin{cases}0, & a\neq b\\ 1, & a=b\end{cases}$.

Таким образом у нас для начального момента времени

$$(b_{A\beta}\,\rho^{\beta}+a_A{}^a(a_{ab}\,\dot q^b-b_{ab}\,\rho^b))_{t=t_0}=a_{ab}\,\dot q^b$$

Чтобы этот вектор могли автопараллельно переносить в любую точку траектории t его надо комбинировать с тензором (0.6), т.е. $a_A{}^a\,a_{ab}\,\dot q^b$. Поэтому для ковариантно постоянного вектора $\mathcal{B}_A$ получим $\mathcal{B}_A=\ln a_{Ab}\,\dot q^b$. Вследствие этого, (2.6) напишем в виде

$$\ln\frac{b_{A\beta}\,\rho^{\beta}+a_{Ab}\,\dot q^b-b_{Ab}\,\rho^b}{a_{Ab}\,\dot q^{\beta}}=\lambda_A\,t$$

или

$$b_{A\beta}\,\rho^{\beta}=b_{Ab}\,\rho^b+a_{Ab}(e^{\lambda_A t}-1)\dot q^b. \tag{2.7}$$

Эти соотношения представляют n ковариантных интегралов дифференциальных уравнений (2.1), и вместе с соотношениями (2.1) $2n$ ковариантных интегралов в конечном виде дифференциальних уравнений движения (0.1). Точность ковариантных соотношений (2.1) мы уже доказали [5]. Поэтому, чтобы проверить верность соотношений (2.7) покажем, что из их легко получить дифференциальные уравнения (2.1). Ковариантная производная по времени от (2.7) будет

$$b_{A\beta}\,\frac{D\rho^{\beta}}{dt}=\lambda_A\,a_{Ab}\dot q^b\,e^{\lambda_A t} \tag{2.8}$$

так как: $Db_{A\beta}=0$, $D\lambda_A=0$, $De^{\lambda_A t}=\lambda_A\,e^{\lambda_A t}\,Dt$.

Если теперь разделим каждое и зсоотношений (2.8) соотвественно на λ_A и примем во внимание (2.7), то получим исходные дифференциальные уравнения (2.1). что и хотели доказать. Заметим, что в соотношениях (2.7) координаты вектора $\rho^{\beta}=\rho^{\beta}(q^1,q^2,\dots,q^n)$ в общем случае яавляаются функциями координат q^{α}. Поэтому соотношения (2.7) составляют систему независимых уравнений, в которых фигурирует $n+1$ переменная $q^1,q^2,\dots,q^n$; t и из которой можно определить обобщеннные координаты q^{α} в зависимости от времени t.

3. Яснее это покажем на примере движения точки по глаткой торе; масса точки m пропорциональная коэффициенту сопротивления μ.

В тородиальной системе координат $q^1=\zeta$, $q^2=\eta$, $q^3=\theta$, которые связани с декартовими координатами y^1, y^2, y^3 соотношениями

$$y^1=\frac{hsh\,\zeta\cos\theta}{ch\,\zeta-\cos\eta},\quad y^2=\frac{hsh\,\zeta\sin\theta}{ch\,\zeta-\cos\eta},\quad y^3=\frac{h\sin\eta}{ch\,\zeta-\cos\eta}$$

уравнение торы, как известно, $\zeta=\text{const}$.

Координаты вектора ρ^{α} для тороидальных переменных η и θ определим из формул [5]

$$\rho_2=\sum_{i=1}^{3}my^i\,\frac{\partial y^i}{\partial\eta}=-mh^2\,\frac{ch\,\zeta\sin\eta}{(ch\,\zeta-\cos\eta)^2},\quad \rho_3=\sum_{i=1}^{3}my^i\,\frac{\partial y^i}{\partial\theta}=0. \tag{П.1}$$

Двухточечный тензор $a_{\alpha b}$ найдём из определения (9, [5]), напри мер, за q^1:

$$a_{\underset{0}{11}}=\sum_{i=1}^{3} m\frac{\partial y^i}{\partial q^1}\cdot\left(\frac{\partial y^i}{\partial q^1}\right)_{q^1=q^1_0}=m\left\{\frac{h^2\cos\theta\,(1-ch\,\zeta\cos\eta)}{(ch\,\zeta-\cos\eta)^2}\cdot\frac{\cos\theta_0\,(1-ch\,\zeta_0\cos\eta_0)}{(ch\,\zeta_0-\cos\eta_0)^2}+\right.$$

$$+\frac{h\sin\theta\,(1-ch\,\zeta\cos\eta)}{(ch\,\zeta-\cos\eta)^2}\cdot\frac{h\sin\theta\,(1-ch\,\zeta_0\cos\eta_0)}{(ch\,\zeta_0-\cos\eta_0)^2}+$$

$$\left.+\frac{h\sin\eta\,ch\,\zeta}{(ch\,\zeta-\cos\eta)^2}\cdot\frac{h\sin\eta_0\,ch\,\zeta_0}{(ch\,\zeta_0-\cos\eta_0)^2}\right\}=$$

$$=mh^2\frac{sh\,\zeta\,sh\,\zeta_0\sin\eta\sin\eta_0+(1-ch\,\zeta\cos\eta)(1-ch\,\zeta_0\cos\eta_0)\cos(\theta-\theta_0)}{(ch\,\zeta-\cos\eta)^2(ch\,\zeta_0-\cos\eta_0)^2}$$

или за рассматриваемые переменные η и θ на торе двухточечный тензор $a_{\gamma c}(\gamma,\ c=2,\ 3)$ будет

$$a_{\gamma c}=mh^2\begin{Bmatrix}\dfrac{sh^2\zeta\sin\eta\sin\eta_0\cos(\theta-\theta_0)}{(ch\,\zeta-\cos\eta)^2(ch\,\zeta-\cos\eta_0)}+ \\ +\dfrac{(1-ch\,\zeta\cos\eta)(1-ch\,\eta\cos\eta_0)}{(ch\,\zeta-\cos\eta)^2(ch\,\zeta-\cos\eta_0)^2} & \dfrac{sh\,\zeta\sin\eta\sin(\theta_0-\theta)}{(ch\,\zeta-\cos\eta_0)(ch\,\zeta-\cos\eta)^2} \\ \dfrac{sh\,\zeta\sin\eta_0\sin(\theta-\theta_0)}{(ch\,\zeta-\cos\eta)(ch\,\zeta-\cos\eta_0)^2} & \dfrac{sh^2\zeta-\cos(\theta-\theta_0)}{(ch\,\zeta-\cos\eta)(ch\,\zeta-\cos\eta_0)}\end{Bmatrix}\tag{П.2}$$

Ковариантные выражения (2.3) в конкретном примере будут

$$\frac{D\rho_2}{dt}=\mu\rho_2+a_{2b}\dot{q}^b+\mu\,a_{2b}\,\rho^b,$$
$$\frac{D\rho_3}{dt}=\mu\,\rho_3+a_{3b}\dot{q}^b+\mu\,a_{3b}\,\rho^b,\tag{П.3}$$

или, в явном виде относительно координат η и θ (подставить (П.1) и (П.2) в (П.3) и иметь в виду выражения (0.3),

$$\dot{\eta}=\mu\,ch\,\zeta\sin\eta+\dot{\theta}_0\frac{sh\,\zeta\sin\eta\sin(\theta_0-\theta)}{(ch\,\zeta-\cos\eta_0)}+$$

$$+\frac{sh^2\zeta\sin\eta\sin\eta_0\cos(\theta-\theta_0)+(1-ch\,\zeta\cos\eta)(1-ch\,\zeta\cos\eta_0)}{(ch\,\zeta-\cos\eta_0)^2}(\dot{\eta}_0-\mu\,ch\,\zeta\sin\eta_0),$$

$$\dot{\theta}=\dot{\theta}_0\frac{ch\,\zeta-\cos\eta}{ch\,\zeta-\cos\eta_0}\cos(\theta-\theta_0).$$

Затруднения дальнейшего интегрирования этых уравнений в явном виде известным методами интегрального исчисления очевидны. Между-прочим, применяя абсолютный интеграл тензора к дифференциальным уравнениям (П.3), получим сразу ковариантные интегралы вида (3.7), конкретном примере

$$b_{22}\,\rho^2 = \underset{0}{b_{22}}\,\rho_0{}^2 + a_{2b} + \dot{q}^b\,(e^{\mu t}-1)$$

$$0 = \underset{0}{b_{32}}\,\rho_0{}^2 + a_{3b}\,\dot{q}^b\,(e^{\mu t}-1)$$

или в явном виде:

$$ch\zeta\sin\eta = -\frac{sh^2\zeta\sin\eta\sin\eta_0\cos(\theta-\theta_0)+(1-ch\zeta\cos\eta)(1-ch\zeta_0\cos\eta_0)}{(ch\zeta-\cos\eta_0)^2}\,ch\zeta\sin\eta_0 +$$

$$+\frac{1}{\mu}(e^{\mu t}-1)\left[\frac{sh\zeta\sin\eta\sin(\theta-\theta_0)}{ch\zeta-\cos\eta_0}\,\dot{\theta}_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{sh^2\zeta\sin\eta\sin\eta_0\cos(\theta-\theta_0)+(1-ch\zeta\cos\eta)(1-ch\zeta\cos\eta_0)}{(ch\zeta-\cos\eta_0)^2}\,\dot{\eta}_0\right],$$

$$O = \frac{\sin\eta_0\sin(\theta-\theta_0)}{ch\zeta-\cos\eta_0}\left[\dot{\eta}_0(e^{\mu t}-1)-\mu\,ch\zeta\sin\eta_0\right]+\theta_0\,sh\zeta\cos(\theta-\theta_0)(e^{\mu t}-1).$$

Из второго уравнения получим

$$\theta = \theta_0 + \theta_0\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{A\,(e^{\mu t}-1)}{B-\dot{\eta}_0\,(e^{\mu t}-1)}$$

где $A = \dfrac{sh\zeta\,(ch\zeta-\cos\eta_0)}{\sin\eta_0}$ и $B = \mu\,ch\zeta\sin\eta_0$ определенные постоянные; это решает задачу и $\eta = \eta(t)$. Если подставить $(e^{\mu t}-1)$ из одного уравнения в другое получиться уравнение траектории рассматриаемой точки на торе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bokan N., *Some properties of fundamental bipoint tensor*, Mat. ves., 8 (23), sv. 4. 1971.

[2] Shepelavey, B. *Covariant Conservation Laws in Riemanniam Spaces*, Journal of Mathematical Physsics, Vol. 7, N. 7, 1966.

[3] Вуйичич, В, А., *Абсолютный интеграл тензора*, Pub. Inst. Math., 10 (24), pp. 199-202, 1970.

[4] Vujičić, V. A. *A contribution to tensor calculus*, Tensor, N. S., Vol 25 (1972), pp 375-382.

[5] Вуйичич, В. А., *Некоторые общие интегралы нелинейных механических систем движения*, Non linear vibration problems, T. 14, 1973, pp 369-377. Polish Akademy of scencies.

[6] Вуйичич, В. А. *Одна возможность представления ковариантных и контравариантных координат вектора скорости*, Мат. вес., 8 (23), св. 4., 1971.

[7] Вуйичич, В. А., *Абсолютные интегралы дифференциальных уравнений геодезической*, Publ. Inst. Math., T. 12 (26), 1971.