PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 17 (31), 1974, pp. 173—182

# ОБ ТОЧНОСТИ С КОТОРОЙ ОПРЕДЕЛЕНЫ ГРУППА И ПОДСТАНОВКИ В РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\bigwedge_{j\in\{2,\ldots,n\}} X_1[X_2(a_1,\ldots,a_m),\ a_{m+1},\ldots,a_{m+n-1}]=$$
$$=X_{2j-1}[a_1,\ldots,a_{j-1},\ X_{2j}(a_j,\ldots,a_{j+m-1}),\ a_{j+m},\ldots,a_{m+n-1}],\qquad m=n$$

*Янез Ушан*

(Сообщенно 1. марта 1974)

## 1. Введение

В [6] автором доказаны следующие утверждения ($T1$ и $T2$):

$T1$. Если $n$-квазигруппы $Q(A_i)$, $i\in N_{2n}$, связаны общей $n$-арной ассоциативностью, т.е. если удовлетворяют равенствами

(1)
$$A_1[A_2(a_1,\ldots,a_{j-1},a_j,\ldots,a_n),\ldots,a_{j+n-1},\ldots,a_{2n-1}]=$$
$$=A_{2j-1}[a_1,\ldots,a_{j-1},A_{2j}(a_j,\ldots,a_{j+n-1}),a_{j+n},\ldots,a_{2n-1}]$$

для всех $j\in\{2,\ldots,n\}$, то справедливы следующие равенства:

($2_1$)
$$A_{2j-1}(a_1,\ldots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\ldots,a_n)=$$
$$=A\,(T_1^{(1)}T_2^{(1)}a_1,\ldots,T_{2(j-1)-1}^{(j-1)}T_{2(j-1)}^{(1)}a_{j-1},\ T_{2j-1}^{(j)}a_j,$$
$$T_{2(j+1)+1}^{(j+1)}T_{2(j+1)}^{(n)}a_{j+1},\ldots,T_{2(n-1)-1}^{(n-1)}T_{2(n-1)}^{(n)}a_{n-1},\ T_{2n-1}^{(n)}T_{2n}^{(n)}a_n)$$

($2_2$)
$$A_{2j}(a_1,\ldots,a_{n-j+1},a_{n-j+2},\ldots,a_n)=$$
$$=T_{2j-1}^{(j)-1}A\,(T_{2j-1}^{(j)}T_{2j}^{(1)}a_1,\ldots,T_{2n-1}^{(n)}T_{2n}^{(1)}a_{n-j+1},T_3^{(2)}T_4^{(n)}a_{n-j+2},\ldots,$$
$$T_{2j-1}^{(j)}T_{2j}^{(n)}a_n),$$

для любых $j\in\{1,\ldots,n\}$, где

$$A(a_1,a_2,\ldots,a_n)=B[B(\ldots(B(a_1,a_2),a_3),\ldots),a_n];$$

$Q(B)$ группа определена на основании теоремы Белоусова о четырех квазигруппах*) через одно из равенств

$$(A) \qquad A_1^{(L,2)}[A_2^{(L,2)}(x, y), z] = A_{2n-1}[k, \dots, k, x, A_{2n}(y, k, \dots, k, z)]$$

$$(B) \qquad A_1^{(R,2)}[A_2^{(R,2)}(x, y), z] = A_3[x, A_4(y, k, \dots, k, z), k, \dots, k],$$

$$(C) \qquad A_1^{(R,2)}[A_2^{(L,2)}(x, y), z] = A_{2n-1}[k, \dots, k, x, A_{2n}(y, z, k, \dots, k)].$$

В самом деле, из $(A)$ или $(B)$ или $(C)$, так как при одном и том же $k \varepsilon Q$ квазигруппы из $(A)$, $(B)$ и $(C)$ изотопны одной и той же группе $Q(B)$, получаютса равенства

$$(3) \qquad \begin{cases} A_1^{(L,2)}(x, y) = B(T_1^{(1)} x, \ T_{2n-1}^{(n)} T_{2n}^{(n)} y), \\ A_2^{(L,2)}(x, y) = T_1^{(1)^{-1}} B(T_1^{(1)} T_2^{(n-1)} x, T_{2n-1}^{(n)} T_{2n}^{(1)} y), \\ A_1^{(R,2)}(x, y) = B(T_1^{(1)} x \ T_{2n-1}^{(n)} T_{2n}^{(2)} y), \\ A_2^{(R,2)}(x, y) = T_1^{(1)^{-1}} B(T_1^{(1)} T_2^{(1)} x, T_3^{(2)} T_4^{(1)} y), \end{cases}$$

где

$$T_i^{(t)} x = A_i(\underbrace{k, \dots, k}_{(t-1)}, x, k, \dots, k),$$

а

$$A_1^{(L,d)}(a_1, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = A_1(a_1, \underbrace{k, \dots, k}_{n-d}, a_i, \dots, a_n)$$

$$A_1^{(R,d)}(a_1, a_2, \dots, a_d) = A_1(a_1, \dots, a_d, \underbrace{k, \dots, k}_{n-d})$$

$$A_2^{(L,d)}(a_{i+1}, \dots, a_n) = A_2(\underbrace{k, \dots, k}_{n-d}, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$A_2^{(R,d)}(a_1, \dots, a_d) = A_2(a_1, \dots, a_d, \underbrace{k, \dots, k}_{n-d});$$

$d \in N$ означает арность операций.

Из (3), например из первого равенства, получается

$$(3') \qquad B(x, y) = A_1^{(L,2)}(T_1^{(1)^{-1}} x, T_{2n}^{(n)^{-1}} T_{2n-1}^{(n)^{-1}} y).$$

---

*) Если квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_4$ связаны общим ассоциативным законом $A_1[A_2(x, y), z] = A_3[x, A_4(x, y)]$, то справедливы следующие равенства

$$A_1(x, y) = B(R_1 x_2 L_3 L_4 y), A_2(x, y) = R_1^{-1} B(R_1 R_2 x, L_3 R_4 y), A_3(x, y) = B(R_1 R_2 x, L_3 y), A_4(x y) =$$

$$= L_3^{-1} B(R_1 L_2 x, L_3 L_4 y), \text{ где } Q(B) \text{ группа},$$

$$L_i x \stackrel{\text{def}}{=} A_i(k, x) \text{ а } R_i x \stackrel{\text{def}}{=} A_i(x, k) \quad i \in N_4; \ k \in Q$$

является фиксированным элементом множества $Q$.

*T* 2. Каждое решение системы функциональных уравнений

$$(1') \qquad \bigwedge_{j \in \{2, \ldots, n\}} X_1 [X_2 (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, \ldots, a_n), \ldots, a_{j+n-1},$$
$$, \ldots, a_{2n-1}] = X_{2j-1} [a_1, \ldots, a_{j-1}, X_{2j} (a_j, \ldots, a_{j+n-1}), a_{j+n}, \ldots, a_{2n-1}],$$

получается через

$$(4_1) \qquad X_{2j-1} (a_1, \ldots, a_n) = \gamma A (\alpha_1 a_1, \ldots, \alpha_{j-1}, a_{j-1} \beta_j a_j, \alpha_{j+n} a_{j+1},$$
$$, \ldots, \alpha_{2n-1} a_{2n-1})$$

$$(4_2) \qquad X_{2j} (a_1, \ldots, a_n) = \beta_j^{-1} A (\alpha_j a_1, \alpha_{j+1} a_2, \ldots, \alpha_{j+n-1} a_n$$

где $\gamma, \alpha_i, \beta_j \in Q!$, $i \in N_{2n-1}$, $j \in N_n$, *а* $Q(A)$ яавляется $n$-арной группой.

Примечание. В самом деле, проверкой находится что $(4_1)$ и $(4_2)$ удовлетворяют $(1')$. Так как справедливо T1, и что $(2_1)$ и $(2_2)$ являются частным случаем $(4_1)$ и $(4_2)$*), то справедливо $T2$, т.е. точнее, $T2$, *в котором* $Q(A)$ *является* $n$*-группой, обладающей единицей, а* $\gamma = I$, *где* $I$ *тождественная подстановка множества* $Q$.

## 2. Формулировка задачи

Если в равенства теоремы о четырех квазигруппах**) поставим обозначения

$$R_1 = \alpha, \; L_3 L_4 = \beta, \; R_1 R_2 = \gamma, \; L_3 R_4 = R_1 L_2 = \delta \text{ и } L_3 = \varphi^{***)},$$

получаем

$$(5) \qquad \begin{cases} A_1 (x, y) = B (\alpha x, \beta y) \\ A_2 (x, y) = \alpha^{-1} B (\gamma x, \delta y) \\ A_3 (x, y) = B (\gamma x, \varphi y) \\ A_4 (x, y) = \varphi^{-1} B (\delta x, \beta y) \end{cases}$$

$A_i$, $i \in N_4$, в теореме о четырех квазигруппах являются данными квазигруппами, удовлетворяющие равенству

$$(1'') \qquad A_1 [A_2 (x, y), z] = A_3 [x, A_4 (y, z)].$$

---

*) $\gamma = I$, $\alpha_1 = T_1^{(1)} T_2^{(1)}, \ldots, \alpha_{j-1} = T_{2(j-1)-1}^{(j-1)} T_{2(j-1)}^{(1)}, \ldots,$
$, \alpha_n = T_{2n-1}^{(n)} T_{2n}^{(1)}$, $\alpha_{n+1} = T_3^{(2)} T_4^{(n)}, \ldots, \alpha_{j+n-1} = T_{2j-1}^{(j)} T_{2j}^{(n)}$, $\alpha_{j+n} =$
$= T_{2(j+1)-1}^{(j+1)} T_{2(j+1)}^{(n)}, \ldots, \alpha_{2n-1} T_{2n-1}^{(n)} T_{2n}^{(n)}$, $\beta_j = T_{2j-1}^{(j)}$.

**) См. вторую фусноту настоящей статьи.

***) $L_i x \overset{\text{def}}{=} A_i(k, x)$ а $R_i x \overset{\text{def}}{=} A_i(x, k)$; $k$ является фиксированным элементом множества $Q$.

$B$ [1]*) В. Д. Белоусовым доказанно следующее положение

$T3$. Группа $Q(B)$, которой изотопны все операции $A_i$, $i \in N_4$, из (5), определена однозначно с точностью до изоморфизма, а подстановки $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varphi$ определены с точностью до эквивалентности $\sim_B$, где эквивалентность $\sim_Б$ определена следующим образом

(6) $$\psi \sim_B \theta \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists a, b \in Q)(\forall x \in Q)(\psi x = B[a, B(\theta x, b)]; \ \psi, \theta \in Q!,$$

$Q(B)$ — группа.

В настоящей статье утверждается $n$-арный аналогон положения $T3$. В самом деле, доказывается следующая

Теорема. Пусть $A_i$, $i \in N_{2n}$, данные $n$-арные квазигруппы — полученые через

($\bar{4}_1$) $$A_{2j-1}(a_1, \ldots, a_n) = A(\alpha_1 a_1, \ldots, \alpha_{j-1} a_{j-1}, \beta_j a_j, \alpha_{j+n} a_{j+1}, \ldots, \alpha_{2n-1} a_n)$$

($\bar{4}_2$) $$A_{2j}(a_1, \ldots, a_n) = \beta_j^{-1} A(\alpha_j a_1, \ldots, \alpha_{j+n-1} a_n),$$

где $Q(A)$ $n$-группа обладающая единицей**), а $\alpha_i$, $\beta_j$, $i \in N_{2n-1}$, $j \in N_n$, подстановки множества $Q$. Пусть далее формулами

$$A_{2j-1}(a_1, \ldots, a_n) = \bar{A}(\bar{\alpha}_1 a_1, \ldots, \bar{\alpha}_{j-1} a_{j-1}, \bar{\beta}_j a_j, \bar{\alpha}_{j+n} a_{j+1}, \ldots, \bar{\alpha}_{2j-1} a_n)$$
$$A_{2j}(a_1, \ldots, a_n) = \bar{\beta}_j^{-1} \bar{A}(\bar{\alpha}_j a_1, \ldots, \bar{\alpha}_{j+n-1} a_n)$$

определены одни и те же операции $A_i$, $i \in N_{2n}$, где $Q(\bar{A})$ $n$-группа, обладающая единицей, а $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_j \in Q!$, $i \in N_{2n-1}$, $j \in N_n$. Тогда $Q(A)$ и $Q(\bar{A})$ являются изоморфними группамы (обладающие единицами), а $\alpha_t \sim_0 \bar{\alpha}_t$ и $\beta_j \sim_0 \bar{\beta}_j$, $t \in N_{2n-1}$, $j \in N_n$, $0 \in \{A, \bar{A}\}$, где отношение эквивалентности, например $\sim_A$, определено через

($\bar{6}$) $$\varphi \sim_A \psi \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists a_\nu, b_\nu \in Q)(\forall x \in Q)(\varphi x = A[a_1, \ldots, a_{n-1}, A(\psi x, b_1, \ldots, b_{n-1})]);$$

$Q(A)$ $n$-гуппа, обладающая единицей, $\nu \in N_{-1}$, $\varphi$, $\psi \in Q!$.

### 3. Доказательство теоремы

Лемма 1. $Q(A)$ яавляется $n$-группой, обладающей единицей тогда и только тогда когда спроведливо

(a) $(\exists Q(B)$ — группа$)(A(a_1, \ldots, a_n) = B[B(\ldots(B(a_1, a_2) a_3), \ldots), a_n])$***)

Доказательство а) Если $Q(B)$ группа, то

$$A(a_1, \ldots, a_n) = B[B(\ldots(B(a_1, a_2), a_3), \ldots), a_n]$$

---

*) стр. 94.

**) Учитывая Примечание в конце Введения, ($4_1$) и ($4_2$) згущены на ($\bar{4}_1$) и ($\bar{4}_2$).

***) Это положение справедливо уже для $n$-полугрупп [3]. В настоящей статье одно направление (для групп) доказивается как следствие теоремы $T1$.

$n$-группа, обладающая единицей. $n$-Арная ассоциативность, например, следует из

(OA) $$(\forall a_1, \ldots, a_{2n-1} \in S)((a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}) = \\ = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_{i-1} \cdot (a_i \cdot \ldots \cdot a_{i+n-1}) \cdot a_{i+n} \cdot \ldots \cdot a_{2n-1})$$

для любого $i \in \{2, \ldots, n\}$, где $(S, \cdot)$ полугруппа; т.е. из справедливости обобщенной ассоциативности в бинарной полугруппе.

b) Докажем следующее положение: если $Q(\bar{A})$ $n$-группа, обладающая единицей $\bar{e}$, тогда спроведливо (a).

Пусть $Q(\bar{A})$ $n$-группа, облодающя единицей $\bar{e}$. На основани $T1$, поставляя $\bar{A} = A_1$, из $(2_1)$ получаем

(b) $$\bar{A}(a_1, \ldots, a_n) = B[B(\ldots(BT^{(1)}a_1, T^{(2)}T^{(n)}a_2), \ldots), \\ , T^{(i)}T^{(n)}a_i, \ldots, T^{(n)}T^{(n)}a_n];$$

так как $A_i = \bar{A}$ для всех $i \in N_{2n}$, то в $T_i^{(t)}$ индекс $i$ выпущен. Если трансляии $T^{(t)}$ построены через $k = \bar{e}$, все $T^{(t)}$ являются тождественными подстановками. Поэтому, (b) превращаетсяа в

($\bar{b}$) $$\bar{A}(a_1, \ldots, a_n) = B[B(\ldots(B(a_1, a_2). a_3), \ldots), a_n].$$

Отсюда, если e единица группы $Q(B)$, находим что

$$B(x, y) = \bar{A}(x, y, e, e, \ldots, e).$$

Так как $B(e, x) = B(x, e) = x$ для любого $x \in Q$, находим что e является единицей и для $n$-группы $Q(\bar{A})$. Здесь построена группа $B$ имеет единицу $e$, т.е. $e = \bar{e}$ (сл. $(4_4)$ b [6]).

Учитывая значение изоморфизма $n$-групп, $n \in N$, и известной теоремы Алберта*) находим что спроведливо следующее положение.

Лемма 2. Пусть

($\bar{\bar{b}}$) $$A(a_1, \ldots, a_n) = B[B(\ldots(B(a_1, a_2), a_3), \ldots), a_n] \text{ и} \\ \bar{A}(a_1, \ldots, a_n) = \bar{B}[\bar{B}(\ldots(\bar{B}(a_1, a_2), a_3), \ldots), a_n],$$

где $Q(B)$ и $Q(\bar{B})$ группы. Тогда, если $f \in Q!$ изоморфизм группы $Q(B)$ на $Q(\bar{B})$, то $f$ является изоморфизмом $Q(A)$ на $Q(\bar{A})$, и если $A$ изоморфна $\bar{A}$, то $B$ изоморфна $\bar{B}$.

Справедливо и следующее положение.

Лема 3. Если $n$-группы $Q(A)$ и $Q(\bar{A})$ обладают единицами и изотопны, то они являются изоморфными.**)

---

*) Если лупа изотопна группе, то они изоморфни (Trans. Amer. Math. Soc. 54, 1943, 507-519).

**) Положение является частным случаем $n$-арного аналого известной теоремы Белоусов-Сандика. Если $n$-лупа $Q(L)$ изотопна $n$-группе $Q(A)$ с единицей, то $Q(L)$ изоморфна $Q(A)$, т.е. сама является $n$-группой; [2], стр. 39.

Доказательство. Пусть $Q(A)$ и $Q(\bar{A})$ $n$-группы, обладающие единицами, по очереди, $e$ и $\bar{e}$, которые сразу и единици, по очереди, групп $B$ и $\bar{\bar{B}}$** из $(\bar{b})$. Пусть, далее, $A$ и $\bar{A}$ изотопны, т.е. пусть справедливо равенство

(c) $$A(a_1, \ldots, a_n) = \alpha \bar{A}(\beta_1 a_1, \ldots, \beta_n a_n).$$

Поставляя в (c) $a_3 = \ldots = a_r = e$, учивая лемму 1, получаем

$$B(a_1, a_2) = \alpha \bar{\bar{B}}[\bar{\bar{B}}(\ldots(\bar{\bar{B}}(\beta_1 a_1 \beta_2 a_2), \beta_3 e), \ldots), \beta_n e],$$

т.е.

$(\bar{c})$ $$B(a_1, a_2) = \alpha \mathscr{L}^{(n-1)} \bar{B}(\beta_1 a_1, \beta_2 a_2),$$

где $\mathscr{L}^{(n-1)} \varepsilon Q!$, определенная через

$$\mathscr{L}^{(n-1)} x = \bar{\bar{B}}[\bar{\bar{B}}(\ldots(\bar{\bar{B}}(x, \beta_3 e), \ldots), \beta_n e],$$

а $Q(B)$ и $Q(\bar{\bar{B}})$ с значениями из леммы 1 относительно, по очереди, группам $Q(A)$ и $Q(\bar{A})$.

Из (c), на основании, уже упсмянутой, теоремы Алберта, находим, что $Q(B)$ и $A(B)$ являются изоморфными группами. Таким образом, на основании леммы 2, $n$-гпуппы $Q(A)$ и $Q(\bar{A})$ так же являются изоморфными.

Лемма 4. Пуст $Q(A)$ $n$-группа облодающая единицей. Пусть, далее, $Q(B)$ группа такая что

$$A(a_1, \ldots, a_n) = B[B(\ldots(B(a_1, a_2), a_3), \ldots), a_n].$$

Если $\alpha, \beta \in Q!$ удовлетворяют условию $(\bar{6})$ относительно $A$, то $\alpha, \beta$ удовлетворяют (6) относительно $B$, и обратно.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \varepsilon Q$: Удовлетворяют $(\bar{6})$ относительно $A$. Учитывая, по очереди, лемму 1 и $(OA)$*), отсюда получаем

(6′) $$\alpha x = B[B_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}), B(\beta x, B_{n-1}(b_1, \ldots, b_{n-1}))],$$

где

(7) $$B_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = B[B(\ldots(B(x_1, x_2), x_3), \ldots), x_{n-1}].$$

Поставляя

$$B_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = a, \quad B_{n-1}(b_1, \ldots, b_{n-1}) = b,$$

из (6′) получаем

(8) $$\alpha x = B[a, B(\beta x, b)],$$

т,е, (6). Лемма доказана в одном направлении.

В другом направлении лемма справедлива поэтому что $Q(B_{n-1})$ квазигруппа, т.е. что, например, уравнение

$$B_{n-1}(x, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}) = a$$

---

*) В самом деле — обобщенную ассоциативность, справедливую в бинарных группах.

**) Например, $B$ построена через $A$ способом из [4] — 7.8. (стр. 146).

имеет однозначно решение при любому выбору элементов

$$a_2, \dots, a_{n-1}, \ a \in Q,$$

и что $B$ в (7) и в (8) одна и та же группа.

Лемма 5. Пусть $Q(B)$ и $Q(\overline{B})$ бинарные главноизотопные*) группы. Тогда, если $\alpha, \beta \in Q!$ эквивалентны по (6) относительно $B$, то они являются эквивалентными по (6) и относительно $\overline{B}$.

Доказателство. Пусть

$$\text{(0)} \qquad \overline{\alpha} x = B[a, B(\alpha x, b)].$$

Так как $Q(B)$ и $Q(\overline{B})$ главноизотопны, то существует $c \in Q$ такой что

$$B(p, q) = \overline{B}[p, \overline{B}(c, q)] = \overline{B}(p, \overline{q}) = \overline{B}(\overline{p}, q)^{**)}$$

Учитывая этот факт, из (0) получаем

$$\overline{\alpha} x = B[a, B(\alpha x, b)] = \overline{B}[\overline{a}, B(\alpha x, b)] = \overline{B}[\overline{a}, \overline{B}(\alpha x, \overline{b})],$$

т.е.

$$\overline{\alpha} \sim_B \alpha \Leftrightarrow \overline{\alpha} \sim_{\overline{B}} \alpha.$$

Лемма доказана.

Если $Q(A)$ $Q(\overline{A})$ $n$-группы, обладающие единицами, такие, что определяют одни и те же операции $A_i$, $i \in N_{2n}$, то из $(\overline{4}_1)$ или $(\overline{4}_2)$, на основании леммы 3, получаем, что $Q(A)$ и $Q(\overline{A})$ являются изоморфными группами. Таким образом первая часть теоремы доказанна.

*Пусть снова $Q(A)$ и $Q(\overline{A})$ $n$-группы, обладающие единицами, по очереди, $e$ и $\overline{e}$. При этом, пусть, $Q(A)$, $\alpha_i$, $\beta_i$, $i \in N_{2n-1}$, $j \in N_n$, выбраны для определения квазигрупп $Q(A_i)$ через формулы $(\overline{4}_1)$ и $(\overline{4}_2)$, а $Q(\overline{A})$ и $T_s^{(t)}$, построенны по $T$ 1., через некоторыи фиксированый $k \in Q$.*

Отсюда, впервые, получаем, что

$$\text{(d)} \qquad \overline{A}\,(T_1^{(1)} T_2^{(1)} a_1, \dots, T_{2(j-1)-1}^{(j-1)} T_{2(j-1)}^{(1)}, a_{j-1}, \boxed{T_{2j-1}^{(j)} a_j},$$

$$T_{2(j+1)-1}^{(j+1)} T_{2(j+1)}^{(n)} a_{j+1}, \dots, T_{2(n-1)-1}^{(n-1)} T_{n-1}^{(n)} a_{n-1}, T_{2n-1}^{(n)} T_{2n}^{(n)} a_n) =$$

$$= A(\alpha_1 a_1, \dots, \alpha_{j-1} a_{j-1}, \boxed{\beta_j a_j}, \ \alpha_{j+n} a_{j\ 1}, \dots, \alpha_{2n-1} a_n).$$

Из $(d)$, учитывая лемму 3 из [6],***) получаем

$$\overline{A}\,(\overline{e}, \dots, \overline{e}, T_{2j-1}^{(j)} a_j, \overline{e}, \dots, \overline{e}) =$$

$$= A(\alpha_1 k, \dots, \alpha_{j-1} k, \beta_j a_j, \alpha_{j+n} k, \dots, \alpha_{2n-1} k),$$

---

*) Если в изотопиы квазигрупп $a \cdot b = \gamma^{-1}(\alpha a * \beta b)$ $\gamma$ тождественная подстановка множества $Q$, то $(Q, \cdot)$ и $(Q, *)$ называются главноизотопными.

**) См. стр. 17.

***) $(\forall j \in N_n)(T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(n)} k = T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(1)} k = e)$; [6], стр. 294.

т.е.

$$T^{(j)}_{2-1}\, x = A\,(k_1, \dots, k_{j-1}, \beta_j x, k_{j+1}, \dots, k_n).$$

Отсюда, учитывая лемму 1 и обобщенную ассоциативность, справедливую в бинарных группах, обозначая

$$B_{j-1}(k_1, \dots, k_{j-1}) = a \text{ и } B_{n-j}(k_{j+1}, \dots, k_n) = b\text{*)},$$

получаем

$$(\overline{\mathrm{d}}) \qquad (\forall\, j \in N_n)(\exists\, a, b \in Q)(\forall\, x \in Q)(T^{(j)}_{2j-1}\, x = B\,[a, B\,(\beta_j x\;\; b)]),$$

т.е.

$$(\mathrm{e}_1) \qquad (\forall\, j \in N_n)(T^{(j)}_{2j-1} \sim_B \beta_j)\text{**)}$$

Положение теоремы для $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ докажем, используя $A_2$, а для $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n-1}$, испульзуя $A_1$.***) В этом направлении, из $(2_1)$ и $(4_1)$ получаем

$$(\mathrm{e}) \qquad \overline{A}\,(T^{(1)}_1 a_1,\, T^{(2)}_3 T^{(n)}_4 a_2, \dots, \boxed{T^{(i)}_{2i-1} T^{(n)}_{2i} a_i}, \dots, T^{(n)}_{2n-1} T^{(n)}_{2n} a_r) =$$

$$= A\,(\beta_1 a_1,\, \alpha_{n+1} a_2, \dots, \boxed{\alpha_{n+i-1} a_i}, \dots, \alpha_{2n-1} a_n),$$

а из $(2_2)$ и $(\overline{4}_2)$ следующее равенство

$$T^{(1)^{-1}}_1\, \overline{A}\,(T^{(1)}_1 T^{(1)}_2 a_1, \dots, T^{(i)}_{2i-1} T^{(1)}_{2i} a_i, \dots, T^{(n)}_{2n-1} T^{(1)}_{2n} a_n) =$$

$$= \beta_1^{-1} A\,(\alpha_1 a_1, \dots, \alpha_i a_i, \dots, \alpha_n a_n),$$

т.е.

$$(\mathrm{f}) \qquad \overline{A}\,(T^{(1)}_1 T^{(1)}_2 a_1, \dots, \boxed{T^{(i)}_{2i-1} T^{(1)}_{2i} a_i}, \dots, T^{(n)}_{2n-1} T^{(1)}_{2n} a_n) =$$

$$= T^{(1)}_1 \beta_1^{-1} A\,(\alpha_1 a, \dots, \boxed{\alpha_i a_i}, \dots, \alpha_n a_n).$$

Надо показать, что:

$$(\overline{\mathrm{e}}) \qquad (\forall\, i \in N_n \backslash \{1\})(\exists\, \overline{a}, \overline{b} \in Q)(\forall\, x \in Q)(T^{(i)}_{2i-1} T^{(n)}_{2i}$$

$$x = B\,[\overline{a}, B\,(\alpha_{n+i-1}\, x, \overline{b})]) \text{ и}$$

$$(\overline{\mathrm{f}}) \qquad (\forall\, i \in N_n)(\exists\, \overline{a}, \overline{b} \in Q))\forall\, x \in Q)(T^{(i)}_{2i-1} T^{(1)}_{2i}\;\; x = B\,[\overline{\overline{a}}, B\,(\alpha_i, x, \overline{\overline{b}})]),$$

т.е. что

$$(\mathrm{e}_2) \qquad (\forall\, i \in N_n \backslash \{1\})(T^{(i)}_{2i-1} T^{(n)}_{2i} \sim_B\text{****)}\; \alpha_{n+i-1}) \text{ и}$$

$$(\mathrm{e}_3) \qquad (\forall\, i \in N_n)(T^{(i)}_{2i-1} T^{(1)}_{2i} \sim_B \alpha_i).$$

---

*) Частьный случай $j=1$ (и например $n=3$) расматривается отдельно; $B\,[\beta_1 x, B\,(k_2, k_3)] = B\,(\beta_1\, x, \overline{k}) = B\,[e, B\,(\beta_1\, x, \overline{k})]$; $e$ — единица группы $B$. Таким же образом рассматривается и случай $j=2$, $j=n$, $j=n-1$.

**) См. (6) и лемму 4.

***) $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}$ из $(\overline{4}_1)$ и $(\overline{4}_1)$.

****) См. лемму 4.

Пусть $a_1=\bar{k}\in Q$ такой что $T_1^{(1)}\bar{k}=\bar{e}$,

$$a_2=\ldots=a_{i-1}=a_{i+1}=\ldots=a_n=k,$$

где $k\in Q$ фиксированный элемент, через который, по $T1$ построенны $\bar{A}$ и $T_i^{(t)}$. При этих предположениях, учитывая лемму 3 из [6], лемму 1 и $(OA)$,*) обозначая

$$B_{i-1}(\alpha_1\bar{k},\ \alpha_{n+1}k,\ldots,\ \alpha_{n+i-1}k)=\bar{a}$$

и

$$B_{n-i}(\alpha_{n+i+1}k,\ldots,\ \alpha_{2n-1}k)=\bar{b},^{**)}$$

из (e) получаем $(\bar{e})$, т.е. $(e_2)$.

Из $(\bar{d})$, впервые, получаем что

$$(\bar{\bar{d}})\qquad T_1^{(1)}\beta_1^{-1}x=B[a,\ B(x,\ b)].$$

Поставляя в (f) $a_1=\ldots=a_{i-1}=a_{i+1}=\ldots=a_n=k$, где $k\in Q$ элемент через который, по $T1$, построены $\bar{A}$ и $T_i^{(t)}$, учитывая лему 3 из [6], лемму 1, $(OA)$,*) $(\bar{\bar{d}})$ и обозначения

$$B_{i-1}(\alpha_1 k,\ldots,\ \alpha_{i-1}k)=a',\ B_{n-i}(\alpha_{i+1}k,\ldots,\ \alpha_n k)=b',^{**)}$$

$$B(a,\ a')=\bar{\bar{a}}\ \text{ и }\ B(b',\ b)=\bar{\bar{b}},$$

получаем и $(\bar{f})$, т.е. $(e_3)$.

Эквивалентность в $(e_1)$, $(e_2)$ и $(e_3)$ определена через группу $Q(B)$. Покажем что $\sim_B$ можно заменить через $\sim_{\bar{B}}$ (и в силу леммы 4, через $\sim_{\bar{A}}$). Из $(\bar{4}_1)$ и $(2_1)$ для $j=1$, получаем:

$$\bar{A}(T_1^{(1)}a_1,\ T_3^{(2)}T_4^{(n)}a_2,\ldots,\ T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(n)}a_i,\ldots,\ T_{2n-1}^{(n)}T_{2n}^{(n)}a_n)=$$
$$=A(\alpha_1 a.\ \alpha_2 a_2,\ldots,\ \alpha_i a_i,\ldots,\ \alpha_n a_n).$$

Отсюда, учитывая факт, что

$$(\forall\ i\in N_n)(T_{2i-1}^{(1)}T_{2i}^{(n)}k=e)^{***)}$$

и леммы настоящей работы, получаем

$$(G_1)\qquad \bar{B}(T_1^{(1)}x,\ T_3^{(2)}T_4^{(n)}y)=B(\alpha_1 x,\ R\alpha_2 y),$$

где

$$Rx=B(x,\ \bar{\bar{k}}),\ \text{а}\ \bar{\bar{k}}=B[B(\ldots(B(\alpha_3 k,\ \alpha_4 k),\ldots),\ \alpha_n k].^{****)}$$

---

*) В самом деле — обобщенную ассоциативность, справедливую в бинарных группах.

**) Частьный случай $j=2$, $n-1$, $n$, 1 рассматривается отдельно; см. фусноту в связи с $(\bar{d})$.

***) Лемма 3 из [6].

****) Если $n=3$ то $\bar{\bar{k}}=\alpha_3 k$.

Так как (Gi) выражает факт, что $\overline{B}$ и $B$ главноизотопные группы, то, на основании леммы 5, следует что

$$\overline{\alpha} \sim_B \alpha \Leftrightarrow \overline{\alpha} \sim_{\overline{B}} \alpha.$$

Отсюда, учитывая факт, что справедливы $(e_1)$, $(e_2)$, $(e_3)$ и что $n$-группы $Q(A)$, $Q(\overline{A})$ обладающие единицами изоморфниы, находим, что теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Белоусов, В. Д., *Системы квазигрупп с обобщенными тождествами*, УМН, т. XX, вып. 1 (121), 1965, стр. 75-146.

[2] Белоусов, В. Д., Сандик М. Д., *n-Арные квазигруппы и лупы*, Сибирский математический журнал, том VII № 1. 1966, стр. 31-54

[3] Трпеновски Л. Б., *n-Полугрупи што можат да се пополнат со неутрални елементи*, Билтен на ДМФ од СРМ, XV, 1964, стр. 23-26

[4] Čupona G., *Finitarne asociativne operacije*, MB, sv. 39. (1969), 135-149

[5] Ушан Я., *n-Арный аналоіон теоремы Белоусова о четырех квазигруппах и некоторые ее следствия*, Билтен на ДМФ од СРМ, XXI (1970).

[6] Ушан Я., *Об одной системе функциональных уравнений общей n-арной ассоциативности на алгебре n-арных квазигрупп*, Mathematica Balkanica 2 (1972), стр. 288-295

[7] Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп и луп*, Наука, Москва, 1967

[8] Белоусов В. Д., *n-Арные квазигуппы*, „Штиница", Кишинев, 1972



Janez Ušan,
ul. 4. jula, br. 20, stan 19,
23000 Zrenjanin, Jugoslavija