PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 17 (31), 1974, pp. 5—16

ASYMPTOTISCHE MERCERSÄTZE FÜR HÖLDER- UND CESÀRO-MITTEL

S. Aljančić

(Dargestellt am 4. Juni 1974)

1. Resultate. Die reellwertige Funktion f sei auf $R^+ = \{x \in R;\ x > 0\}$ erklärt und es bezeichne $\mathcal{L}(x; f)$ $(x \to \infty)$ ein Limitierungsverfahren. Es sei λ ein im allgemeinen komplexer Parameter und man setze

$$g_\lambda(x) = f(x) + \lambda \mathcal{L}(x; f).$$

Ist das Verhalten (Konvergenz, bestimmte Divergenz oder Asymptotik) von $f(x)$ wenn $x \to \infty$ bekannt und verfügt man über den entsprechenden Abelsatz des Verfahrens $\mathcal{L}(x; f)$, so folgt unmittelbar das Verhalten von $g_\lambda(x)$ und zwar unabhängig von den jeweiligen λ-Wert. Umgekehrte Aussagen, die aus dem Verhalten von g_λ auf das Verhalten von f schliessen, sind als Mercersätze bekannt. Die Letzteren hängen von den λ-Werten wesentlich ab.

Wie bekannt, sind die Hölderschen und Cesàroschen Mittel der Ordnung k $(= 1, 2, \ldots)$,

$$H_k(x) = H_k(x; f) = \frac{1}{\Gamma(k)\, x} \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} f(t)\, dt$$

bzw.

$$C_k(x) = C_k(x; f) = \frac{k}{x} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1} f(t)\, dt$$

einander äquivalent, wenn man sie als Limitierungsverfahren vergleicht. Dies ist, im allgemeinen, nicht mehr der Fall, wenn von der Approximationsgüte, die sie leisten, die Rede ist ([1]). Es könnte also vom Interesse sein, auch asymptotische Mercersätze für diese zwei Verfahren nebeneinander zu stellen. (Entsprechende Tauber- und Abel-Sätze sind schon längst bekannt: s. J. Karamata [2] bzw. K. Knopp [3]). In den asymptotischen Ausdrücken, die dabei auftreten, werden wir langsam veränderliche Funktionen von J. Karamata ([4], [5]) als Vergleichsfunktionen heranziehen.[1] Eine positive und messbare Funktion L, die auf R^+ erklärt ist, heisst langsam veränderlich, wenn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1 \tag{1.1}$$

für jedes feste $t>0$ gilt.

Es sei f eine positive und messbare Funktion auf R^+, die auf jeden endlichen Intervall $(0, d)$ beschränkt ist. Setze man

$$g_\lambda(x) = f(x) + \lambda H_k(x; f) \tag{1.2}$$

und

$$h_\lambda(x) = f(x) + \lambda C_k(x; f). \tag{1.3}$$

Nach den Eigenschaften (ii) und (iv)[2] der langsam veränderlichen Funktionen (s. nächsten Abschnitt), folgt unmittelbar, dass, wenn $x\to\infty$,

$$f(x) \cong L(x) \tag{1.4}$$

die asymptotischen Relationen

$$g_\lambda(x) \cong (1+\lambda)\, L(x) \tag{1.5}$$

und

$$h_\lambda(x) \cong (1+\lambda)\, L(x) \tag{1.6}$$

nach sich zieht, und zwar für jedes $\lambda \neq -1$.

Wir beweisen hier zwei Sätze über die Umkehrung von (1.4) $\Rightarrow$ (1.5) bzw. (1.4) $\Rightarrow$ (1.6).

Satz 1. *Es sei f eine positive und messbare Funktion auf R^+, die auf jeden endlichen Intervall $(0, d)$ beschränkt ist. Es sei $g_\lambda = g_{\lambda,k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ durch* (1.2) *erklärt und es bezeichne $\Lambda(H_k)$ die Menge der komplexen Zahlen λ für welche die Gleichung*

$$(1-r)^k + \lambda = 0 \tag{1.7}$$

lauter Wurzeln $r_{n,\lambda}$ mit $Re(r_{n,\lambda})>0$ $(n=0, 1, \ldots, k-1)$ besitzt.

Ist für ein $\lambda \in \Lambda(H_k)$ die asymptotische Relation (1.5) *erfüllt, dann gilt auch* (1.4).

Satz 2. *Die Funktion f genüge denselben Bedingungen wie in Satz* 1. *Es sei $h_\lambda = h_{\lambda,k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ durch* (1.3) *erklärt und es bezeichne $\Lambda(C_k)$ die Menge der komplexen Zahlen λ für welche die Gleichung*

$$\binom{k-r}{k} + \lambda = 0 \tag{1.8}$$

lauter Wurzeln $r_{n,\lambda}$ mit $Re(r_{n,\lambda})>0$ $(n=0, 1, \ldots, k-1)$ besitzt.

Ist für ein $\lambda \in \Lambda(C_k)$ die asymptotische Relation (1.6) *erfüllt, dann gilt auch* (1.4).

---

[1] Wenn es sich um Folgen und das C_1-Verfahren handelt, ist ein solcher Mercer-Satz bereits bekannt (S. Zimering [6]; s. auch S. Aljančić [7]).

[2] Ein Satz Abelscher Art.

Bemerkung 1. Die obigen Beziehungen gestatten eine leichte Verallgemeinerung. Sind alle andere Voraussetzungen über f erfüllt und ist, anstatt (1.4),

$$f(x) \cong x^{-\delta} L(x) \quad (x \to \infty) \text{ für ein } \delta < 1,$$

dann gilt

$$g_\lambda(x) \cong \left(1 + \frac{\lambda}{(1-\delta)^k}\right) x^{-\delta} L(x) \quad (x \to \infty)$$

und

$$h_\lambda(x) \cong \left(1 + \frac{\lambda}{\binom{k-\delta}{k}}\right) x^{-\delta} L(x) \quad (x \to \infty).$$

Die Umkehrung dieser Implikationen ist gestattet wenn $Re(r_{n,\lambda}) > \delta$, wobei $r_{n,\lambda}$, wie oben, die Wurzeln der Gleichung (1.7) bzw. (1.8) bedeuten.

Bemerkung 2. Aus dem Beweise ist ersichtlich, dass man die Voraussetzung über die Beschränktheit von f auf $(0, d)$ durch eine allgemeinere ersetzen kann. Es genügt, nämlich, die Beschränktkeit von $x^\sigma f(x)$ auf $(0, d)$ für ein $0 \leqslant \sigma < \min\limits_{0 \leqslant n \leqslant k-1} \{Re(r_{n,\lambda})\}$ zu fordern.

2. Beweise. Zuerst führen wir einige Eigenschaften der langsam veränderlichen Funktionen an.

(i) Der Grenzübergang (1.1) gilt gleichmässig in $t \in [a, b]$ $(0 < a < b < \infty)$.

(ii) Gilt $f(x) \cong L(x)$ $(x \to \infty)$, dann ist auch f eine langsam veränderliche Funktion.

(iii) Ist $\gamma > 0$, dann gilt $x^\gamma L(x) \to \infty$ und $x^{-\gamma} L(x) \to 0$ wenn $x \to \infty$.

(iv) Es sei K eine reelwertige und messbare Funktion auf $(0, b)$ $(0 < b < \infty)$, so dass für ein $\eta > 0$

$$\int_0^b t^{-\eta} |K(t)| \, dt < \infty$$

gilt. Ist $x^\eta L(x)$ auf jeden endlichen Intervall $(0, d)$ $(d > 0)$ beschränkt, dann gilt, wenn $x \to \infty$,

$$\int_0^b K(t) L(xt) \, dt \cong L(x) \int_0^b K(t) \, dt.$$

Dabei ist die Existenz des Integrals auf der linken Seite eine Folge der gemachten Voraussetzungen.

Der Beweis der ersten drei Eigenschaften ist in [5] oder in [4], und der der letzten in [8] zu finden. Es ist leicht einzusehen, dass der Abelsche Satz in (iv) auch für komplexwertige Funktionen K gilt. Diese Bemerkung wird hier ausgenützt.

Beweis von Satz 1. Wir bemerken zuerst dass mit f auch g_λ auf jeden endlichen Intervall $(0, d)$ beschränkt ist. Ist, nämlich,

$$M_x = \sup_{0 < t \leqslant x} |f(t)|,$$

dann gilt für jedes $x>0$

$$
\begin{aligned}
|g_\lambda(x)| &\leqslant M_x + \frac{|\lambda|\, M_x}{\Gamma(k)\, x}\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} dt = \\
&\leqslant \left(1 + \frac{|\lambda|}{\Gamma(k)}\int_0^1 \left(\log\frac{1}{u}\right)^{k-1} du\right) M_x = (1+|\lambda|)\, M_x < \infty .
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Multipliziert man die beiden Seiten in (1.2) mit $x^{r-1}\,(r\neq 1)$ und integriert von z bis y $(0<z<y<\infty)$, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\int_z^y x^{r-1} g_\lambda(x)\, dx &= \int_z^y x^{r-1} f(x)\, dx + \frac{\lambda}{\Gamma(k)}\int_z^y x^{r-2}\, dx \int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} f(t)\, dt \\
&= \int_z^y x^{r-1} f(x)\, dx + \frac{\lambda}{\Gamma(k)}\int_0^z f(t)\, dt \int_z^y x^{r-2}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} dx \\
&\quad + \frac{\lambda}{\Gamma(k)}\int_z^y f(t)\, dt \int_t^y x^{r-2}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} dx.
\end{aligned}
$$

Da für $r\neq 1$

$$
\begin{aligned}
\int_z^y x^{r-2}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} dx &= \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(k-1)!}{(k-\nu)!\,(1-r)^\nu}\left\{z^{r-1}\left(\log\frac{z}{t}\right)^{k-\nu} - y^{r-1}\left(\log\frac{y}{t}\right)^{k-\nu}\right\} \\
&= \frac{(k-1)!}{(1-r)^k}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(1-r)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\left\{z^{r-1}\left(\log\frac{z}{t}\right)^{\nu-1} - y^{r-1}\left(\log\frac{y}{t}\right)^{\nu-1}\right\}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

gilt, folgt

$$
\begin{aligned}
\int_z^y x^{r-1} g_\lambda(x)\, dx &= \int_z^y x^{r-1} f(x)\, dx \\
&\quad + \frac{\lambda}{(1-r)^k}\int_0^z f(t)\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(1-r)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\left\{z^{r-1}\left(\log\frac{z}{t}\right)^{\nu-1} - y^{r-1}\left(\log\frac{y}{t}\right)^{\nu-1}\right\} dt \\
&\quad + \frac{\lambda}{(1-r)^k}\int_z^y f(t)\left\{t^{r-1} - \sum_{\nu=1}^{k}\frac{(1-r)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\, y^{r-1}\left(\log\frac{y}{t}\right)^{\nu-1}\right\} dt \\
&= \left(1 + \frac{\lambda}{(1-r)^k}\right)\int_z^y t^{r-1} f(t)\, dt + \frac{\lambda}{(1-r)^k}\int_0^z f(t)\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(1-r)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\, z^{r-1}\left(\log\frac{z}{t}\right)^{\nu-1} dt \\
&\quad - \frac{\lambda}{(1-r)^k}\int_0^y f(t)\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(1-r)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\, y^{r-1}\left(\log\frac{y}{t}\right)^{\nu-1} dt.
\end{aligned}
$$

Es ist also für $r \neq 1$

$$\int_z^y t^{r-1} g_\lambda(t)\,dt = \left(1 + \frac{\lambda}{(1-r)^k}\right) \int_z^y t^{r-1} f(t)\,dt \tag{2.3}$$
$$+ \frac{\lambda}{(1-r)^k} \sum_{\nu=1}^{k} (1-r)^{\nu-1} \left(z^r H_\nu(z) - y^r H_\nu(z)\right).$$

Man nehme nun an, dass λ in $\Lambda(H_k)$ liegt und dass $\lambda \neq 0$ ist.[1] Dann sind alle Wurzeln $r_{n,\lambda}$ der Gleichung (1.7) untereinander und von Null verschieden, so dass wir durch Einsetzen von $r = r_{n,\lambda}$ $(n = 0, 1, \ldots, k-1)$ in (2.3) ein System von k Gleichungen erhalten

$$\int_z^y t^{r_{n,\lambda}-1} g_\lambda(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{k} (1-r_{n,\lambda})^{\nu-1} \left(y^{r_{n,\lambda}} H_\nu(y) - z^{r_{n,\lambda}} H_\nu(z)\right). \tag{2.4}$$
$$(n = 0, 1, \ldots, k-1).$$

Wir zeigen zunächst, dass $|f(t)| \leqslant M_z < \infty$ auf $(0, z)$ und $Re(r_{n,\lambda}) > 0$ $(n = 0, 1, \ldots, k-1)$

$$z^{r_{n,\lambda}} H_\nu(z) \to 0 \quad (z \to 0)$$

für jedes $n = 0, 1, \ldots, k-1$ und für jedes $\nu = 1, 2, \ldots, k$ nach sich zieht. Tatsächlich, es ist für $0 < z \leqslant 1$

$$|z^{r_{n,\lambda}} H_\nu(z)| \leqslant \frac{M_1}{(\nu-1)!} z^{Re(r_{n,\lambda})} \int_0^z \left(\log \frac{z}{t}\right)^{\nu-1} \frac{dt}{z} \leqslant \frac{M_1}{(\nu-1)!} z^{Re(r_{n,\lambda})} \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{\nu-1} dt.$$

Lassen wir also $z \to 0$ in (2.4), so folgt für $n = 0, 1, \ldots, k-1$

$$\int_0^y t^{r_{n,\lambda}-1} g_\lambda(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{k} (1-r_{n,\lambda})^{\nu-1} y^{r_{n,\lambda}} H_\nu(y)$$

bzw.

$$\sum_{\nu=1}^{k} (1-r_{n,\lambda})^{\nu-1} H_\nu(x) = \int_0^1 t^{r_{n,\lambda}-1} g_\lambda(xt)\,dt. \tag{2.5}$$

Die Hauptdeterminante dieses linearen Systems nach $H_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ ist

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & (1-r_{0,\lambda}) & \cdots & (1-r_{0,\lambda})^{k-1} \\ 1 & (1-r_{1,\lambda}) & \cdots & (1-r_{1,\lambda})^{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & (1-r_{k-1,\lambda}) & \cdots & (1-r_{k-1,\lambda})^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant k-1} (r_{i,\lambda} - r_{j,\lambda}) \neq 0,$$

da für $\lambda \neq 0$ alle Wurzeln der Gleichung (1.7) untereinander verschieden sind.

---

[1] Dies ist keine Einschränkung, denn für $\lambda = 0$ gilt Satz 1 in trivialer Weise.

Man bezeichne mit $A_{n,k}$ $(n=0, 1, \ldots, k-1)$ die algebraischen Komplemente der Elemente der k-ten Kolone. Nach der Cramerschen Regel ist

$$H_k(x)=\frac{1}{\Delta_k}\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\cdot\int_0^1 t^{r_{n,\lambda}-1}\,g_\lambda(xt)\,dt.$$

Da $Re(r_{n,\lambda})>0$ $(n=0, 1, \ldots, k-1)$ ist, folgt aus (1.5) auf Grund von (2.1) und der Eigenschaften (ii) und (iv) der langsam veränderlichen Funktionen, dass

$$\frac{H_k(x)}{L(x)}=\frac{1}{\Delta_k}\frac{g_\lambda(x)}{L(x)}\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\cdot\int_0^1 t^{r_{n,\lambda}-1}\frac{g_\lambda(xt)}{g_\lambda(x)}\,dt\to$$

$$\to\frac{1+\lambda}{\Delta_k}\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\cdot\int_0^1 t^{r_{n,\lambda}-1}\,dt=\quad(x\to\infty)\tag{2.6}$$

$$\to\frac{1+\lambda}{\Delta_k}\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\cdot\frac{1}{r_{n,\lambda}}.$$

Da nach (1.7), für jedes $n=0, 1, \ldots, k-1$,

$$\frac{1+\lambda}{r_{n,\lambda}}=\frac{1-(1-r_{n,\lambda})^k}{1-(1-r_{n,\lambda})}=1+(1-r_{n,\lambda})+\cdots+(1-r_{n,\lambda})^{k-1}$$

gilt, so folgt nach elementaren Eigenschaften der Determinanten, dass, wenn $x\to\infty$,

$$\begin{aligned}\frac{H_k(x)}{L(x)}&\to\frac{1}{\Delta_k}\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\left(1+(1-r_{n,\lambda})+\cdots+(1-r_{n,\lambda})^{k-1}\right)=\\&\to\frac{1}{\Delta_k}\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}(1-r_{n,\lambda})^{k-1}=1.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Die Behauptung von Satz 1 folgt dann, auf Grund von (1.5) und (2.7), aus

$$\frac{f(x)}{L(x)}=\frac{g_\lambda(x)}{L(x)}-\lambda\frac{H_k(x)}{L(x)}\to(1+\lambda)-\lambda=1\quad(x\to\infty).$$

Die in Bemerkung 1 enthaltene Verallgemeinerung tritt beim Beweise des Satzes erst in (2.6) auf. Die Relation (2.6) ist, nämlich, durch

$$\frac{H_k(x)}{x^{-\delta}L(x)}\to\frac{1}{\Delta_k}\left(1+\frac{\lambda}{(1-\delta)^k}\right)\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\cdot\int_0^1 t^{r_{n,\lambda}-\delta-1}\,dt=\frac{1}{(1-\delta)^k}$$

zu ersetzen. Für den letzten Schluss ist die auf (1.7) begründete Gleichheit

$$\left(1+\frac{\lambda}{(1-\delta)^k}\right)\int_0^1 t^{r_{n,\lambda}-\delta-1}\,dt=\frac{1}{(1-\delta)^k}\,\frac{(1-\delta)^k-(1-r_{n,\lambda})^k}{(1-\delta)-(1-r_{n,\lambda})}$$
$$=\frac{1}{(1-\delta)^k}\left((1-\delta)^{k-1}+(1-\delta)^{k-2}(1-r_{n,\lambda})+\cdots+(1-r_{n,\lambda})^{k-1}\right)$$

zu beachten und wie oben fortzufahren.

Die Verallgemeinerung, die in Bemerkung 2 formuliert ist, kommt nur in (2.1), (2.6) und beim Beweise von $z^{r_{n,\lambda}} H_\nu(z)\to 0$ zum Ausdruck.

Beweis von Satz 2. Wir bemerken, zuerst, dass mit f auch h_λ im jeden endlichen Intervall $(0, d)$ beschränkt ist. Tatsächlich, aus $|f(t)|\leqslant M_x<\infty$ für $0\leqslant t\leqslant x$ folgt

$$\tag{2.8} \begin{aligned}|h_\lambda(x)|&\leqslant M_x+\frac{k|\lambda|M_x}{x}\int_0^x\left(1-\frac{t}{x}\right)^{k-1}dt\\&\leqslant\left(1+k|\lambda|\int_0^1(1-u)^{k-1}\,du\right)M_x=(1+|\lambda|)\,M_x<\infty\end{aligned}$$

für jedes $x>0$.

Multipliziert man die beiden Seiten in (1.3) mit x^{r-1} $(r\neq 1)$ und integriert von z bis y $(0<z<y<\infty)$, so erhält man

$$\int_z^y x^{r-1}h_\lambda(x)\,dx=\int_z^y x^{r-1}f(x)\,dx+\lambda k\int_z^y x^{r-2}\,dx\int_0^x\left(1-\frac{t}{x}\right)^{k-1}f(t)\,dt$$
$$=\int_z^y x^{r-1}f(x)\,dx+\lambda k\int_0^z f(t)\,dt\int_z^y x^{r-k-1}(x-t)^{k-1}\,dx$$
$$+\lambda k\int_z^y f(t)\,dt\int_t^y x^{r-k-1}(x-t)^{k-1}\,dx.$$

Da für $r\neq 1, 2, \ldots, k$,

$$k\int_z^y x^{r-k-1}(x-t)^{k-1}\,dx=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{k}\frac{k(k-1)\cdots(k-\nu+1)}{(k-r)(k-r-1)\cdots(k-r-\nu+1)}\left(z^{r-k+\nu-1}(z-t)^{k-\nu}-y^{r-k+\nu-1}(y-t)^{k-\nu}\right)$$
$$=\frac{1}{\binom{k-r}{k}}\sum_{\nu=1}^{k}\binom{-r+\nu-1}{\nu-1}\left(z^{r-1}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{\nu-1}-y^{r-1}\left(1-\frac{t}{y}\right)^{\nu-1}\right)$$

gilt, so folgt

$$\int_z^y x^{r-1} h_\lambda(x)\,dx = \int_z^y x^{r-1} f(x)\,dx$$

$$+\frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}} \int_0^z f(t) \sum_{\nu=1}^{k} \binom{-r+\nu-1}{\nu-1} \left(z^{r-1}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{\nu-1} - y^{r-1}\left(1-\frac{t}{y}\right)^{\nu-1} \right) dt$$

$$+\frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}} \int_z^y f(t) \left\{ t^{r-1} - \sum_{\nu=1}^{k} \binom{-r+\nu-1}{\nu-1} y^{r-1}\left(1-\frac{t}{y}\right)^{\nu-1} \right\} dt$$

$$=\left(1+\frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}}\right) \int_z^y t^{r-1} f(t)\,dt$$

$$+\frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}} \int_0^z f(t) \sum_{\nu=1}^{k} \binom{-r+\nu-1}{\nu-1} z^{r-1}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{\nu-1} dt$$

$$-\frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}} \int_0^y f(t) \sum_{\nu=1}^{k} \binom{-r+\nu-1}{\nu-1} y^{r-1}\left(1-\frac{t}{y}\right)^{\nu-1} dt.$$

Es ist also für $r \neq 1, 2, \ldots, k$

$$\begin{aligned} \int_z^y t^{r-1} h_\lambda(t)\,dt &= \left(1+\frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}}\right) \int_z^y t^{r-1} f(t)\,dt \\ &\quad + \frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu} \binom{-r+\nu-1}{\nu-1} \left(z^r C_\nu(z) - y^r C_\nu(y)\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Man nehme nun an, dass λ in $\Lambda(C_k)$ liegt und dass $\lambda \neq 0$ ist[1]. Dann sind, wegen $\lambda \neq 0$, alle Wurzeln $r_{n,\lambda}$ der Gleichung (1.8) von $1, 2, \ldots, k$ verschieden, so dass wir durch Einsetzen von $r = r_{n,\lambda}$ $(n = 0, 1, \ldots, k-1)$ in (2.9) ein System von k Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} \int_z^y t^{r_{n,\lambda}-1} h_\lambda(t)\,dt &= \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu} \binom{-r_{n,\lambda}+\nu-1}{\nu-1} \left(y^{r_{n,\lambda}} C_\nu(y) - z^{r_{n,\lambda}} C_\nu(z)\right). \\ &\qquad (n = 0, 1, \ldots, k-1) \end{aligned} \tag{2.10}$$

---

[1] Dies ist keine Einschränkung, da für $\lambda = 0$ in Satz 2 sowieso nichts zu beweisen ist.

Wir zeigen zunächst, dass wegen $|f(t)|\leqslant M_z<\infty$ auf $(0, z)$ und wegen $Re(r_{n,\lambda})>0$

$$z^{r_{n,\lambda}}C_\nu(z)\to 0 \quad (z\to 0+),$$

und zwar tür jedes $n=0, 1, \ldots, k-1$ und für jedes $\nu=1, 2, \ldots, k$. Tatsächlich, es ist für $0<z\leqslant 1$

$$|z^{r_{n,\lambda}}C_\nu(z)|\leqslant M_1\,\nu z^{Re(r_{n,\lambda})}\int\limits_0^z(1-t/z)^{\nu-1}\frac{dt}{z}$$

$$\leqslant M_1\,z^{Re(r_{n,\lambda})}\to 0 \quad (z\to 0+).$$

Strebt also $z\to 0+$ in (2.10), so folgt für $n=0, 1, \ldots, k-1$

$$\int\limits_0^y t^{r_{n,\lambda}-1}h_\lambda(t)\,dt=\sum_{\nu=1}^k\frac{1}{\nu}\binom{-r_{n,\lambda}+\nu-1}{\nu-1}y^{r_{n,\lambda}}C_\nu(y)$$

bzw.

$$\sum_{\nu=1}^k\frac{1}{\nu}\binom{-r_{n,\lambda}+\nu-1}{\nu-1}C_\nu(x)=\int\limits_0^1 t^{r_{n,\lambda}-1}h_\lambda(xt)\,dt. \tag{2.11$_n$}$$

Die Hauptdeterminante dieses linearen Systems nach $C_\nu(x)$ $(\nu=1, 2, \ldots, k)$ ist

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}\binom{-r_{0,\lambda}+1}{1} & \frac{1}{3}\binom{-r_{0,\lambda}+2}{2} & \cdots & \frac{1}{k}\binom{-r_{0,\lambda}+k-1}{k-1} \\ 1 & \frac{1}{2}\binom{-r_{1,\lambda}+1}{1} & \frac{1}{3}\binom{-r_{1,\lambda}+2}{2} & \cdots & \frac{1}{k}\binom{-r_{1,\lambda}+k-1}{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{1}{2}\binom{-r_{k-1,\lambda}+1}{1} & \frac{1}{3}\binom{-r_{k-1,\lambda}+2}{2} & \cdots & \frac{1}{k}\binom{-r_{k-1,\lambda}+k-1}{k-1} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{1!\,2!\ldots k!}\prod_{0\leqslant i<j\leqslant k-1}(r_{i,\lambda}-r_{j,\lambda}). \tag{2.12}$$

Man nehme zuerst an, dass alle Wurzeln der Gleichung (1.8) untereinander vershieden sind, d. h. dass $\Delta_k\neq 0$ ist. Bezeichne man mit $A_{n,k}$ $(n=0, 1, \ldots, k-1)$ die algebraischen Komplemente der Elemente der k-ten Kolone von Δ_k. Nach der Cramerschen Regel ist dann

$$C_k(x)=\frac{1}{\Delta_k}\sum_{n=0}^{k-1}A_{n,k}\cdot\int\limits_0^1 t^{r_{n,\lambda}-1}h_\lambda(xt)\,dt.$$

Da $Re(r_{n,\lambda})>0$ $(n=0, 1, \ldots, k-1)$ ist, folgt aus (1.6) auf Grund von (2.8) und der Eigenschaften (ii) und (iv) der langsam veränderlichen Funktionen, dass

$$\frac{C_k(x)}{L(x)}=\frac{1}{\Delta_k}\frac{h_\lambda(x)}{L(x)}\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\cdot\int_0^1 t^{r_{n,\lambda}-1}\frac{h_\lambda(xt)}{h_\lambda(x)}\,dt\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{1+\lambda}{\Delta_k}\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\cdot\int_0^1 t^{r_{n,\lambda}-1}\,dt=\quad(x\rightarrow\infty)$$

$$\rightarrow\frac{1+\lambda}{\Delta_k}\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\cdot\frac{1}{r_{n,\lambda}},$$

d. h.

$$\frac{C_k(x)}{L(x)}\rightarrow 1\ (x\rightarrow\infty).$$

Um den letzten Schluss zu rechtfertigen, bemerken wir, dass $1-\binom{k-r}{k}$ ein Polynom k-ten Grades in r ist and dass $r=0$ offensichtlich eine seiner Nullstellen ist. Mit passender Wahl von $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ gilt also

$$\frac{1}{r}\left(1-\binom{k-r}{k}\right)=a_0+\frac{a_1}{2}\binom{-r+1}{1}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{k}\binom{-r+k-1}{k-1}, \tag{2.13}$$

wobei, wie leicht einzusehen ist, $a_{k-1}=1$ gilt. Auf Grund von (1.8) ist demnach

$$\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\frac{1+\lambda}{r_{n,\lambda}}=\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\frac{1}{r_{n,\lambda}}\left(1-\binom{k-r_{n,\lambda}}{k}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\left(a_0+\frac{a_1}{2}\binom{-r_{n,\lambda}+1}{1}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{k}\binom{-r_{n,\lambda}+k-1}{k-1}\right)$$
$$=a_{k-1}\sum_{n=0}^{k-1} A_{n,k}\binom{-r_{n,\lambda}+k-1}{k-1}=\Delta_k$$

was zu beweisen war.

Sind zwei Wurzeln der Gleichung (1.8) einander gleich, es sei denn $r_{0,\lambda}=r_{1,\lambda}$, dann fallen die ersten zwei Gleichungen des Systems (2.11_n) zusammen und man hat die Gleichung (2.11_0) durch eine andere zu ersetzen. Dies erfolgt indem man (2.9), nach durchgeführten Grenzübergang $z\rightarrow+0$, zuerst auf die Form

$$\int_0^1 t^{r-1}h_\lambda(xt)\,dt=\left(1+\frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}}\right)\int_0^1 t^{r-1}f(tx)\,dt$$
$$-\frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu}\binom{-r+\nu-1}{\nu-1}C_\nu(x) \tag{2.14}$$

bringt und dann nach r differenziert

$$\int_0^1 t^{r-1}\log t h_\lambda(xt)\,dt=\int_0^1 t^{r-1}f(tx)\,dt\cdot\frac{d}{dr}\left(1+\frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}}\right)+\left(1+\frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}}\right)\int_0^1 t^{r-1}\log t f(tx)\,dt$$

$$(2.15)\qquad -\sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu}\binom{-r+\nu-1}{\nu-1}C_\nu(x)\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}}\right)-\frac{\lambda}{\binom{k-r}{k}}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu}\frac{d}{dr}\binom{-r+\nu-1}{\nu-1}C_\nu(x).$$

Da, laut Voraussetzung, $r_{1,\lambda}$ eine zweifache Nullstelle von $\varphi(r)=1+\lambda\Big/\binom{k-r}{k}$ ist, verschwinden, wenn man in (2.15) r durch $r_{1,\lambda}$ ersetzt, die ersten drei Glieder auf der rechten Seite und man erhält:

$$(2.16)\qquad \sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu}\left[\frac{d}{dr}\binom{-r+\nu-1}{\nu-1}\right]_{r=r_{1,\lambda}} C_\nu(x)=\int_0^1 t^{r_{1,\lambda}-1}\log t\, h_\lambda(xt)\,dt.$$

Bezeichne man mit (2.11_n^*) dasjenige System das aus (2.11_n) hervorgeht wenn die Gleichung (2.11_0) durch (2.16) ersetzt wird. Die Hauptdeterminante des Systems (2.11_n^*) ist

$$\Delta_k^*=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dr}\binom{-r+1}{1}\right]_{r=r_{1,\lambda}} & \frac{1}{3}\left[\frac{d}{dr}\binom{-r+2}{2}\right]_{r=r_{1,\lambda}} & \cdots\frac{1}{k}\left[\frac{d}{dr}\binom{-r+k-1}{k-1}\right]_{r=r_{1,\lambda}}\\ 1 & \frac{1}{2}\binom{-r_{1,\lambda}+1}{1} & \frac{1}{3}\binom{-r_{1,\lambda}+2}{2} & \cdots\frac{1}{k}\binom{-r_{1,\lambda}+k-1}{k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \frac{1}{2}\binom{-r_{k-1,\lambda}+1}{1} & \frac{1}{3}\binom{-r_{k-1,\lambda}+2}{2} & \cdots\frac{1}{k}\binom{-r_{k-1,\lambda}+k-1}{k-1}\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{d}{dr_{0,\lambda}}\Delta_k\right]_{r_{0,\lambda}=r_{1,\lambda}}$$

so dass, laut (2.12),

$$\Delta_k^*=\frac{1}{1!\,2!\ldots k!}\left[\frac{d}{dr_{0,\lambda}}\prod_{0\le i<j\le k-1}(r_{i,\lambda}-r_{j,\lambda})\right]_{r_{0,\lambda}=r_{1,\lambda}}$$

$$=\frac{1}{1!\,2!\ldots k!}\prod_{1\le i<j\le k-1}(r_{i,\lambda}-r_{j,\lambda})\cdot\left[\frac{d}{dr_{0,\lambda}}\prod_{j=1}^{k-1}(r_{0,\lambda}-r_{j,\lambda})\right]_{r_{0,\lambda}=r_{1,\lambda}}$$

$$=\frac{1}{1!\,2!\ldots k!}\prod_{1\le i<j\le k-1}(r_{i,\lambda}-r_{j,\lambda})\cdot\prod_{j=2}^{k-1}(r_{1,\lambda}-r_{j,\lambda})\ne 0.$$

Bezeichnet man also mit $A_{n,k}^*(n=0,\,1,\ldots k-1)$ die algebraischen Komplemente der Elemente der k-ten Kolone von Δ_k^*, so gibt die Cramersche Regel

$$C_k(x)=\frac{1}{\Delta_k^*}\left\{A_{0,k}^*\int_0^1 t^{r_{1,\lambda}-1}\log t\, h_\lambda(xt)\,dt+\sum_{n=1}^{k-1}A_{n,k}^*\int_0^1 t^{r_{n,\lambda}-1}h_\lambda(xt)\,dt\right\}.$$

Hieraus folgt wie oben $(x \to \infty)$

$$\frac{C_k(x)}{L(x)} \to \frac{1+\lambda}{\Delta_k^*}\left\{A_{0,k}^* \int_0^1 t^{r_{1,\lambda}-1} \log t\, dt + \sum_{n=1}^{k-1} A_{n,k}^* \int_0^1 t^{r_{n,\lambda}-1} dt\right\} \to \frac{1+\lambda}{\Delta_k^*}\left\{-\frac{A_{0,k}^*}{r_{1,\lambda}^2} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{A_{n,k}^*}{r_{n,\lambda}}\right\} = 1.$$

Um den letzten Übergang zu rechtfertigen, differenzieren wir (2.13) nach r und erhalten

$$(2.17)\quad -\frac{r \dfrac{d}{dr}\binom{k-r}{k} + \left(1 - \binom{k-r}{k}\right)}{r^2} = \frac{a_1}{2}\frac{d}{dr}\binom{-r+1}{1} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{k}\frac{d}{dr}\binom{-r+k-1}{k-1}.$$

Setzt man $r = r_{1,\lambda}, r_{2,\lambda}, \ldots, r_{k-1,\lambda}$ der Reihe nach in (2.13) und $r = r_{1,\lambda}$ in (2.17) ein, und führt Rechnung dass $r_{1,\lambda}, r_{2,\lambda}, \ldots, r_{k-1,\lambda}$ Wurzeln der Gleichung (1.8) sind und dabei $r_{1,\lambda}$ eine zweifache, so ist

$$-A_{0,k}^* \frac{1+\lambda}{r_{1,\lambda}^2} + \sum_{n=1}^{k-1} A_{n,k}^* \frac{1+\lambda}{r_{n,\lambda}} =$$

$$= A_{0,k}^* \sum_{m=1}^{k-1} \frac{a_m}{m+1}\left[\frac{d}{dr}\binom{-r+m}{m}\right]_{r=r_{1,\lambda}} + \sum_{n=1}^{k-1} A_{n,k}^* \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a_m}{m+1}\binom{-r_{n,\lambda}+m}{m}$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a_m}{m+1}\left\{A_{0,k}^*\left[\frac{d}{dr}\binom{-r+m}{m}\right]_{r=r_{1,\lambda}} + \sum_{n=1}^{k-1} A_{n,k}^* \binom{-r_{n,\lambda}+m}{m}\right\}$$

$$= a_{k-1}\left\{A_{0,k}^* \frac{1}{k}\left[\frac{d}{dr}\binom{-r+k-1}{k-1}\right]_{r=r_{1,\lambda}} + \sum_{n=1}^{k-1} A_{n,k}^* \frac{1}{k}\binom{-r_{n,\lambda}+k-1}{k-1}\right\} = a_{k-1}\Delta_k^* = \Delta_k^*$$

da nach elementaren Eigenschaften von Determinanten

$$A_{0,k}^*\left[\frac{d}{dr}\binom{-r+m}{m}\right]_{r=r_{1,\lambda}} + \sum_{n=1}^{k-1} A_{n,k}^* \binom{-r_{n,\lambda}+m}{m} = 0 \quad (m=0, 1, \ldots, k-2)$$

ist.

LITERATURVERZEICHNISS

[1] S. Aljančić, *Classe de saturation des procédés de sommation de Hölder et de Riesz*, C. R. Acad. Sci. Paris 246 (1958), 2567—69.

[2] J. Karamata, *Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze*, Math. Zeitschr. 33 (1931), 294—299.

[3] K. Knopp, *Zwei Abelsche Sätze*, Publ. Inst. Math. Acad. Serbe. Sci. 4 (1952), 89—94.

[4] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Matematica (Cluj) 4 (1930), 38—53.

[5] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière, théorèmes fondamentaux*, Bull. Soc. Math. France 61 (1933), 55—62.

[6] S. Zimering, *Some Mercerian Theorems for Regularly Varying Sequences*, Publ. Inst. Math. Belgrade, 15 (29) (1973), 171—177.

[7] S. Aljančić, *Asymptotic Mercerian theorems involving slowly varying functions*, Mat. vesnik 10 (25) (1973), 331—337.

[8] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić, *Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies*, Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. 7 (1954), 81—94.

Proleterskih brigada 62
11000 Beograd (Jugoslawien)