PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 16 (30), 1973, pp. 25—30

SUR QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LA VITESSE DE CONVERGENCE ET LA SOMMABILITÉ DES SUITES (II)*

Mahmut Bajraktarević

(Reçu le 24 avril 1973)

La présente note fait suite à ma note [1] où on a donné les conditions nécessaires et suffisantes respectivement suffisantes pour la comparabilité respectivement l'incomparabilité complète ([2], [4], [5—7]) d'une suite par rapport à toute suite d'une collection de suites ayant la puissance finie, dénombrable ou celle de continu, les puissances des ensembles de toutes ces collections et des collections ne jouissant ces propriétés et enfin quelques théorèmes sur l'influence des transformations $\mathcal{T}_c{}^*$ et $\mathcal{T}_r$ sur la vitesse de convergence des suites. [3].

L'objet de la présente note sont trois théorèmes dont les deux premières sont les généralisations de deux résultats dus à H. I. Miller ([5—7]) assez signifiantes puisqu'elles se rattachent aux collections ayant la puissance de continu tandis que les résultats de H. I. Miller s'appliquent aux collections consistant en un seul élément respectivement aux collections dénombrables.

H. I. Miller [5] a démontré le fait suivant. $\mathcal{T}_c{}^*$ étant la classe de toutes les transformations matricielles transformant les suites bornées en suites convergentes [3], soit

$$T=(c_{m,n})\in\mathcal{T}_c^* \text{ et } \varepsilon=(\varepsilon_k)_1^\infty \ (1>\varepsilon_k\downarrow 0,\ k\to+\infty).$$

Alors ils existent deux suites des entiers positifs $M_k=M_k(\varepsilon)$, $N_k=N_k(\varepsilon)$ $(k=1, 2, 3,\ldots)$ strictement monotones telles que

1. $\displaystyle\sum_{n=N_k+1}^{\infty}|c_{m,n}-\delta_n|<\frac{\varepsilon_k^2}{2}$,

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_k}|c_{m,n}-\delta_n|<\frac{\varepsilon_k^2}{2}\ (m>M_k)$.

En utilisant ce fait il a démontré le

---

* Ce travail est soutenu par le Centre des recherches scientifiques de la République socialiste de Bosnie-Herzégovine (Fond za naučni rad SR Bosne i Hercegovine).

Théorème A. — Toute transformation $T \in \mathcal{T}_c^*$ „accélère" la convergence d'une suite x tendant vers zéro.

La suite $x = (x_n)_1^\infty$ est donnée par les relations

$$x_m = \varepsilon_k \, (M_k < m \leqslant M_{k+1}), \; x_m = 1 \; (m \leqslant M_1),$$

la suite (ε_k) ayant la même signification de ci-dessus. Il est évident que cette suite dépend de $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ et de T.

L'auteur a démontré [1] le

Théorème *B. — Soit $\mathcal{A}$ une collection de suites $x = (x_n)_0^\infty$ tendant vers zéro dont les termes sont des nombres complexes et différents de zéro pour tous les n. Pour l'existence d'une suite $z = (z_n)_0^\infty$, $z_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ convergeant vers zéro plus lentement que tout $x \in \mathcal{A}$, il faut et il suffit qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 0$ et une suite $(\mathcal{A}_n)_0^\infty$ de souscollections $\mathcal{A}_n$ de la collection $\mathcal{A}$ et une suite d'entiers positifs $(N_n)_{n=n_0}^\infty$ satisfaisant aux conditions*

$$\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1} \; (n \geqslant n_0), \; \bigcup_n \mathcal{A}_n = \mathcal{A}, \; N_n < N_{n+1} \; (n \geqslant n_0)$$

telles que, avec $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

$$\sup_{k \in [N_n, N_{n+1}) \cap N} \{\sup_{x \in \mathcal{A}_n} (|x_k|)\} \leqslant \varepsilon_n \text{ pour tout } n \geqslant n_0, \, n \in N,$$

où $(\varepsilon_n)_0^\infty$ est une suite donnée telle que $0 < \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n < 1$ pour tous les n et $\varepsilon_n \downarrow 0$.

Pour démontrer le Th. B. l'auteur s'est servi de la définition suivante. Étant données deux suites $x = (x_n)_0^\infty$, $y = (y_n)_0^\infty$ aux termes complexes différents de X et Y, respectivement, et convergeant vers X respectivement vers Y, on dit que x converge plus lentement que y si

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x_n - X}{y_n - Y} \right| = +\infty.$$

Soit maintenant $\mathcal{T}_c^*(S) = \{T^s\}_{s \in S} \subset \mathcal{T}_c^*$ une collection de transformations de la classe $\mathcal{T}_c^*$ où l'ensemble S des indices s est l'ensemble correspondant des nombres réels positifs tel que pour tout $s \in S$ fixé, eu égard du Th. A, la suite correpondante des différences $(M_{k+1}^s(\varepsilon) - M_k^s(\varepsilon))_1^\infty$ soit *bornée*, c'est-à-dire tel que

$$M_{k+1}^s - M_k^s \leqslant n_s \text{ pour tout } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

où n_s est l'entier positif correspondant à l'indice s.

Pour la collection des transformations ainsi définie on a le

Théorème 1. — *Il existe une suite convergeant vers zéro dont la convergence est „accélérée" par toute transformation $T \in \mathcal{T}_c^*(S)$.*

Démonstration. — En posant $T^s = (c^s_{m,n}) \in \mathcal{T}^*_c(S)$, alors on a les relations suivantes correspondant aux relations 1. et 2. de ci-dessus

$$\sum_{n=N^s_k+1}^{\infty} |c^s_{m,n} - \delta^s_n| < \frac{\varepsilon_k^2}{2} \text{ pour tout } m, k \text{ et } s,$$

$$\sum_{n=1}^{N^s_k} |c^s_{m,n} - \delta^s_n| < \frac{\varepsilon_k^2}{2} \; (m > M^s_k \text{ pour tout } k \text{ et } s).$$

Pour tout $s \in S$ on définit la suite $x^s = (x^s_n)_{n=1}^{\infty}$ par les relations

$$x^s_m = \varepsilon_k \; (M^s_k < m \leqslant M^s_{k+1}),$$

$$x^s_m = 1 \; (m \leqslant M^s_1).$$

Alors $1 \geqslant x^s_m \downarrow 0 \; (m \to +\infty)$ et T^s accélère (Th. A) la convergence de x^s. Il est facile à démontrer que le Th. B est appliquable à la collection $\mathcal{A} = \{x^s\}_{s \in S}$. Il suffit de poser

$$\mathcal{A}_n = \{x^s \,|\, M^s_{k+1} - M^s_k \leqslant n \; (k \in N; s \in S)\} \quad (n \in N = \{1, 2, 3, \ldots\})$$

et d'introduire la suite $y = (y_n)_1^{\infty}$ par les relations

$$y_i \overset{\text{déf}}{=} \sup_{k = n^2, n^2+1, \ldots, (n+1)^2-1} \{\sup_{x^s \in \mathcal{A}_n} (|x^s_k|)\} \leqslant \varepsilon_n \; (i = n^2, \; n^2+1, \; \ldots, \; (n+1)^2 - 1),$$

où l'entier N_n du Th. B est égal à n^2. En introduisant la suite $z = (z_n)_1^{\infty}$ par

$$z_n = \sqrt{y_n} \; (n \in N) \text{ on a}$$

$$z_n / x^s_n = (1/\sqrt{y_n}) \cdot (y_n / x^s_n) \geqslant (1/\sqrt{y_n}) \to +\infty \; (n \to +\infty)$$

donc, z converge plus lentement vers zéro que tout $x^s \in \mathcal{A}$.

Pour $s \in S$ arbitrairement choisi on a, pour $M^s_k < m \leqslant M^s_{k+1}$,

$$\left| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (c^s_{m,n} - \delta^s_n) z_n}{z_m} \right| \leqslant \frac{\sum_{n=1}^{N^s_k} |c^s_{m,n} - \delta^s_n|}{x^s_m} \cdot \frac{x^s_m}{z_m} + \frac{\sum_{n=N^s_k+1}^{\infty} |c^s_{m,n} - \delta^s_n|}{x^s_m} \cdot \frac{x^s_m}{z_m} <$$

$$< \frac{\frac{\varepsilon_k^2}{2}}{\varepsilon_k} \cdot \frac{x^s_m}{z_m} + \frac{\frac{\varepsilon_k^2}{2}}{\varepsilon_k} \cdot \frac{x^s_m}{z_m}.$$

Or, $x^s_m / z_m \to 0$ pour tout $s \in S$, par conséquent toute transformation $T^s \in \mathcal{T}^*_c(S)$ accélère la convergence de z.

Théorème 2. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une collection de suites* $y=(y_n)_0^\infty$ *convergeant vers zéro dont les termes sont positifs et telles que* $y_{n+1}/y_n \to 0$ *pour tout* $y \in \mathcal{A}$. *Soit* $(\mathcal{A}_n)_1^\infty$ *une suite de souscollections* $\mathcal{A}_n$ *de la collection* $\mathcal{A}$ *telle que*

$$\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}\ (n \in N),\ \bigcup_n \mathcal{A}_n = \mathcal{A}.$$

Soit $(\varepsilon_n)_1^\infty$ *une suite strictement décroissante tendant vers zéro avec* $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ *et soit* $(N_i)_1^\infty$ *une suite strictement monotone des entiers positifs tels que*

$$y_{n+1}/y_n < \varepsilon_k \text{ pour tout } y \in \mathcal{A}_k\ (k=1, 2, 3, \dots;\ n=N_k+m_k-1;$$

$$m_k=0, 1, 2, \dots, N_{k+1}-N_k-1).$$

Alors il existe une suite $x=(x_n)_0^\infty$ *convergeant vers zéro telle que*

$$x_{n+1}/x_n \to 0,\ y_n/x_n \to 0 \text{ pour tout } y \in \mathcal{A}.$$

Démonstration. — La suite $x=(x_n)_0^\infty$ est définie par les relations

$$x_n=1 \text{ pour } n=0, 1, \dots, N_1-1,$$

$$x_{n+1}=2\,\varepsilon_k x_n \text{ pour } n=N_k+m_k-1,\ m_k=0, 1, \dots, N_{k+1}-N_k-1\ \ (k=0, 1, 2, \dots)$$

et on a $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n)=2\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$. D'autre part, pour $n=N_k+m_k-1$, on a

$$y_n/x_n < 2^{N_1-n}(y_{N_1}/x_{N_1})$$

et

$$\lim_{n\to\infty}(y_n/x_n)=0.$$

Pour illustrer le Th. 2 on donne deux exemples.

Exemple 1. — Ce cas fut considéré par H. I. Miller [7]. Soit

$$\mathcal{A}=(y^k)_1^\infty,\ y^k=(y_n^k)_{n=0}^\infty\ \ (k=1, 2, 3, \dots),$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1}^k/y_n^k=0 \text{ pour tout } k=1, 2, 3, \dots .$$

Pour la suite $\varepsilon=(\varepsilon_k)_1^\infty$ on peut prendre une suite arbitraire strictement décroissante des nombres positifs laquelle tend vers zéro avec $\varepsilon_1<\frac{1}{2}$. Ici on peut poser

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} \mathcal{A}_n=(y^k)_1^n, \\ N_1=m_1, \\ N_k=\max\{m_k, N_{k-1}+1\}\ \ (k=2, 3, \dots), \end{cases}$$

où

$$m_k=\min\{M \mid a_m^k<\varepsilon_k\ (m \geqslant M \in N)\}\ \ (k=1, 2, 3, \dots),$$

avec

$$\text{(2)}\qquad a_m^k=\max_{i=1,\dots,k}(y_{m+1}^i/y_m^i)\ \ (k=1, 2, 3, \dots).$$

Exemple 2. — On définit la collection $\mathcal{A}$ de la manière suivante. Soit $x=(x_n)_0^\infty$ une suite donnée de nombres complexes différents de zéro et convergeat vers zéro. Par la notation $\mathcal{A}$ on désigne la collection de toutes les suites partielles $(x_{k_n^p(\alpha)})_{n=0}^\infty$ $(p=0, 1, 2, \ldots;\ \alpha\in[0, 1])$ des suites $(x_n)_{n=p}^\infty$ $(p=0, 1, 2, \ldots)$, où les indices $k_n^p(\alpha)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ de la suite partielle $(x_{k_n^p(\alpha)})_{n=0}^\infty$ correspondant au $p\in\{0, 1, 2, \ldots\}$ et au nombre réel $\alpha\in[0, 1]$ représenté dans le système binaire par $\alpha=0, c_1c_2c_3\ldots$, sont définis par les relations

$$k_o^p(\alpha)=p,$$

$$k_{n+1}^p(\alpha)=k_n^p(\alpha)+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{c_{p+n}+c_{p+n+1}}\quad(n=0, 1, 2, \ldots).$$

On démontre que le nombre cardinal de la collection $\mathcal{A}$ est $o(\mathcal{A})=\aleph_1$. (Pour plus de détails sur la collection $\mathcal{A}$ v. [1], où cette collection est désignée par Q.) Ici il suffit de poser

$$\mathcal{A}_n=\bigcup_{p=0}^{n}\mathcal{A}^p\quad(n=0, 1, 2, \ldots)$$

avec

$$\mathcal{A}^p=\left\{(x_{k_n^p(\alpha)})_{n=0}^{+\infty}\,\middle|\,\alpha\in[0, 1]\right\}\quad(p=0, 1, 2, \ldots),$$

en supposant $\lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1}/y_n)=0$ pour tout $y=(y_n)_0^\infty\in\mathcal{A}$. Ici on peut prendre pour $\varepsilon=(\varepsilon_k)_1^\infty$ une suite arbitraire strictement décroissante de nombres positifs avec $\varepsilon_n\downarrow 0$ et $\varepsilon_1<\frac{1}{2}$, et pour les N_k les nombres définis par (1) où les relations (2) sont à remplacer par les relations

$$a_m^p=\max_{\alpha\in[0,1]}\left\{x_{k_{m+1}^p(\alpha)}/x_{k_m^p(\alpha)}\right\}\quad(p=1, 2, 3, \ldots).$$

Théorème 3. — *$\mathcal{A}=(a_{m,n})$ étant une matrice régulière aux éléments nonnégatifs et (n_m) une suite d'entiers positifs ou égaux à $+\infty$ telle que $a_{m,n}=0$ $(n\geqslant n_m)$, alors par cette transformation est accélérée la convergence de toute suite (x_n) convergeant vers zéro dont les termes sont des nombres positifs pour laquelle*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_m\sum\limits_0^{n_m}x_n}{x_m}=0\ \textit{avec}\ a_m=\sup_n(a_{m,n}).$$

Démonstration. — Pour la transformée $y=(y_n)$ donnée par

$$0\leqslant y_m=\sum_{n=0}^{n_m}a_{m,n}x_n\leqslant a_m\sum_{n=0}^{n_m}x_n$$

on a

$$0\leqslant\frac{y_m}{x_m}\leqslant\frac{a_m\sum\limits_{n=0}^{n_m}x_n}{x_m}$$

d'où $\lim(y_m/x_m)=0$ ce qui démontre le théorème.

Les conditions du Th. 3 sont remplies dans le cas où $a_{0,0}=1$, $a_{m,n}=\frac{1}{m^2}$ $(0\leqslant n\leqslant m^2,\ n\neq m,\ m>0)$ autrement $a_{m,n}=0$; $x_0=1$, $x_n=\frac{1}{n^\alpha}$ $(n\geqslant 1,\ 0<\alpha<2)$; $n_m=m^2$ $(m\geqslant 1)$, $n_0=1$.

RÉFÉRENCES

[1]. Bajraktarević, M., *Sur quelques problèmes concernant la vitesse de convergence et la sommabilité des suites*, „Radovi Akademije nauka i umjetnosti B i H. à paraître.

[2]. Dawson, D. F., *Some rate invariant sequence transformations*, Proceedings of the Am. Math, Soc., Vol. 15, No 5, 1964, pp. 710-714.

[3]. Hardy, G. H., *Divergent series*, Oxford, 1967.

[4]. Knopp, K., *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Berlin, 1931.

[5]. Miller, H. I,. *A class of non-rate invariant transformations*, „Radovi" Akademije nauka i umjetnosti BiH, XLV/12, 1973, pp. 41—43.

]6]. Miller, H. I. *Rates of convergence and Summability*, Akademija nauka i umjetnosti BiH, XLV/12, 1973, pp. 85—92..

[7]. Miller, H. I., *A note on matrix summability and rates of convergence*, Matematički vesnik, 10 (25). 1973, pp. 145—147.

Nadmlini 20
71000 Sarajevo