PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 16 (30), 1973. pp. 13—23

# МЕТОДЫ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

*Д. Д. Байнов* и *С. Д. Милушева*

(Поступило 12 мая 1973)

Метод усреднения для решения задачи Коши для систем интегро--дифференциальных уравнений был обоснован в работах [I] — [6].

В настоящей работе обоснованы два варианта метода усреднения для решения нелинейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра не разрешенных относительно производной. При первом варианте системе интегро-дифференциальных уравнений ставится в соответствие система усредненных уравнений, которая является системой обыкновенных дифферциальных уравнений, а при втором варианте — системой интегро-дифференциальных уравнений.

Отметим, что метод усреднения для решения двухточечной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений был обоснован в [7], [8].

Пусть для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varepsilon X\left(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s)), ds\right), \\ \dot{y}(t) &= Y\left(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \int_0^t \varphi_1(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\, ds\right), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}), y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}), \;\; X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}),$$

$$Y = (Y^{(1)}, \ldots, Y^{(m)}), \varphi = (\varphi^{(1)}), \ldots, \varphi^{(q)}), \varphi_1 = (\varphi_1{}^{(1)} \ldots, \varphi_1{}^{(r)}),$$

а $\varepsilon > 0$ — малый параметр, задано краевое условие

$$\begin{gathered} x(0) = x^0, \qquad R[\lambda, y(0), y(T)] = 0, \\ \lambda = (\lambda'^{1)}, \ldots, \lambda^{(m)}), R = (R^{(1)}, \ldots, R^{(m)}), \;\; \lambda \in \Lambda \subset R_m, \\ T = L\varepsilon^{-1}, \qquad L = \text{const.} > 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Наряду с системой (I), рассмотрим почти вырожденную ($\varepsilon=0$) по отношению к ней систему

$$x=\text{const.}\qquad \dot{x}=\text{const.},$$

(3)

$$\dot{y}(t)=Y\Big(t,x,y(t),\dot{x},\dot{y}(t),\int_0^t \varphi_1(t,s,x,y(s),\dot{x},\dot{y}(s))\,ds\Big)$$

с краевым условием

(4) $$R[\lambda, y(0),\ y(T)]=0.$$

Пусть решение краевой задачи (3), (4) известно и имеет вид

(5) $$y=\psi(t,x,\dot{x},\lambda,T),\quad x=\text{const.},\quad \dot{x}=\text{const.}$$

Предположим, что в элементарных или специальных фуикциях можно вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \varphi\Big(t,s,x,\psi(s,x,\dot{x},\lambda,T),\dot{x},\frac{\partial}{\partial s}\psi(s,x,\dot{x},\lambda,T)\Big)\,ds=\varphi_2(t,x,\dot{x},\lambda,T).$$

Первый вариант метода усреднения. Пусть вдоль интегральных кривых $y=\psi(t,x,\dot{x},\lambda,T)$ краевой задачи (3), (4), где $\lambda$ рассматривается как векторный параметр, существует независящее от параметра $\lambda$ среднее значение

(6) $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X\Big(t,x,\psi(t,x,\dot{x},\lambda,T),\dot{x},\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x,\dot{x},\lambda,T),$$
$$\varphi_2(t,x,\dot{x},\lambda,T)\Big)\,dt=\overline{X}(x,\dot{x}).$$

Тогда усредненным уравнением первого приближения для медленных переменных $x(t)$ системы (1) будем называть уравнение

(7) $$\dot{\xi}(t)=\varepsilon\overline{X}(\xi(t),\dot{\xi}(t))$$

с начальным условием

(8) $$\xi(0)=x^0.$$

Отметим, что если $x=(x^{(1)}),\dots,x^{(n)})$ и $A=(a_{ij})_{m,n}$, то по определению

$$\|x\|=\Big[\sum_{i=1}^n (x^{(i)})^2\Big]^{\frac{1}{2}},\qquad \|A\|=\Big[\sum_{i=1}^n\sum_{i=1}^m a_{ij}^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Докажем теорему о близости компонент $x(t)$ решения $\{x(t),y(t)\}$ краевой задачи (3), (4) и решения $\xi(t)$ задачи Коши (7), (8).

Теорема I. Пусть:

I. Функции $\varphi(t,s,x,y,u,v)$ и $\varphi_1(t,s,x,y,u,v)$ определены, непрерывны и равномерно ограничены вместе со своими частными производными по $t$ для всех $t\geqslant 0$, $s\geqslant 0$ и $(x,y,u,v)\in G$, где $G$ некоторая открытая область $2(n+m)$ — мерного пространства переменных $x, y, u, v$.

Функция $X(t, x, y, u, v, z)$ определена, непрерывна и равномерно ограничена вместе со своими частными производными первого порядка для всех $t \geqslant 0$ и $(x, y, u, v, z) \in G \times G_1$, где $G_1$ — некоторая открытая область пространства $R_q$.

Функция $Y(t, x, y, u, v, w)$ определена, непрерывна и равномерно ограничена вместе со своими частными производными первого порядка для всех $t \geqslant 0$ и $(x, y, u, v, w) \in G \times G_1$, где $G_2$ — некоторая открытая область пространства $R_r$.

2. Для функции $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, s, x, y, u, v)$ и $\frac{\partial}{\partial t} \varphi_1(t, s, x, y, u, v)$ выполняются неравенства

$$\left\| \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, s, x, (s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\, ds \right\| \leqslant \text{const.},$$

$$\left\| \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\, ds \right\| \leqslant \text{const.},$$

где $\{x(t),\ y(t)\}$ решение краевой задачи (3), (4).

3. Существуют равномерно ограниченные в соответствующих проекциях области $G^* \times G_1 \times G_2 = \{t \geqslant 0, s \geqslant 0, G\} \times G_1 \times G_2$ обратные матрицы

$$\left(\mathrm{I}_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial u}\right)^{-1}, \quad \left(\mathrm{I}_2 - \frac{\partial Y}{\partial v}\right)^{-1}, \quad \text{и} \quad \left[\mathrm{I}_2 - \frac{\partial Y}{\partial v} - \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial u}\left(\mathrm{I}_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial u}\right)^{-1} \frac{\partial X}{\partial v}\right]^{-1},$$

где $\mathrm{I}_1$ и $\mathrm{I}_2$ соответсвенно $n$ и $m$ — мерные единичные матрицы.

4. Через каждую точку области $G^*(t, x, y, u)$ ($G^*(t, x, y, u)$ — проекция области $G^*$ в пространстве переменных $(t, x, y, u)$) проходит единственная интегральная кривая краевой задачи (3), (4), соответствующая некоторому значению параметра $\lambda$, причем это решение определено для всех $t \in [0, \infty)$ и при этих значениях $t$ целиком лежит в $G(x, y, u)$.

Пусть указанные решения краевой задачи (3), (4) задаются в форме

$$y = \psi(t, x, \dot{x}, \lambda, T), \quad x = \text{const.}, \quad \dot{x} = \text{const.}, \tag{9}$$

где $\psi$ и $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ — $m$ — мерные, непрерывные по совокупности всех своих переменных вектор — функция.

5. Для всех $(x, u, \lambda) \in G(x, u) \times \Lambda$ существует независящий от параметра $\lambda$ предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^t X\left(t, x, \psi(t, x, u, \lambda, T), u, \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, u, \lambda, T), \varphi_2(t, x, u, \lambda, T)\right) dt = \tag{10}$$
$$= \overline{X}(x, u),$$

причем предельный переход в (10) происходит равномерно относительно совокупности $(x, u, \lambda) \in G(x, u) \times \Lambda$. Среднее значение $\overline{X}(x, u)$ определенная, непрерывная и равномерно ограниченная функция для всех $(x, u) \in G(x, u)$ и удовлетворяет в $G(x, u)$ условию

$$\| \overline{X}(x, u) - \overline{X}(x', u') \| \leqslant c [\| x - x' \| + \| u - u' \|],$$

где $c$ — положительная постоянная.

6. Краевая задача (I), (2) имеет единственное решение $\{x(t), y(t)\}$ удовлетворяющее условиям

$$x(0) = x^\circ, \quad R[\lambda, y(0), \ y(T)] = 0,$$

гд под $\lambda$ подразумевается некоторое фиксированное значение параметра $\lambda$. Решение $\{x(t), \ y(t)\}$ определено на отрезке $[0, \ T]$ при всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ и не выходит из некоторой открытой подобласти $G^1(x, y) \subset G(x, y)$ лежащей целиком внутри $G(x, y)$ вместе со своей границей.

7. Решение усредненного уравнения

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \overline{X}(\xi(t), \dot{\xi}(t)) \tag{11}$$

удовлетворяющее начальному условию $\xi(0) = x^\circ$ существует, однозначно определено при $t \geqslant 0$ для всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ и кривая $\{\xi(t), \ \dot{\xi}(t)\}$ соответствующая этому решению, на интервале $0 \leqslant t < \infty$, не выходит из области $G(x, u)$.

8. Уравнение в частных производных

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y} Y + \frac{\partial W}{\partial v}\left(\mathrm{I}_2 - \frac{\partial Y}{\partial v}\right)^{-1}\left[\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y} Y + \frac{\partial Y}{\partial w}\left(\varphi_1 + \int_0^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} ds\right)\right] = \tag{12}$$

$$= X(t, x, y, u, v, z) - \overline{X}(x, u), \qquad W\Big|_{t=0} = 0, \ x = \text{const.}, \quad u = \text{const.},$$

обладает некоторым решением $W = W(t, x, y, u, v)$, которое определено и равномерно ограничено вместе со своими частными производными первого порядка во всей области $G^*$.

Тогда, если $\{x(t), \ y(t)\}$ решение краевой задачи (I), (2), а $\xi(t)$ — решение усредненного уравнения (11) с начальным условием $\xi(0) = x^\circ$, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$, можно указать такое $\varepsilon^0 (\varepsilon^\circ \leqslant \varepsilon^*)$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^\circ$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ будет выполняться неравенство

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \delta.$$

Доказательство. Введем функцию

$$\eta(t) = x(t) - \varepsilon W(t, x(t) y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)),$$

где $\{x(t), y(t)\}$ решение краевой задачи (1), (2).

Оценим разность $\dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t)$, где $\xi(t)$ — решение задачи Коши (7), (8).

Имеем

$$\dot{\eta}(t)-\dot{\xi}(t)=\dot{x}(t)-\varepsilon\left[\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial x}\dot{x}(t)+\frac{\partial W}{\partial y}\dot{y}(t)+\frac{\partial W}{\partial \dot{x}}\ddot{x}(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial W}{\partial \dot{y}}\ddot{y}(t)+\overline{X}(\xi(t),\ \dot{\xi}(t))\right]. \tag{14}$$

Продифференцировав систему (1), для определения $\ddot{x}(t)$ и $\ddot{y}(t)$ получаем систему

$$\left(I_1-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)\ddot{x}(t)-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{y}}\ddot{y}(t)=\varepsilon\left\{\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\partial X}{\partial y}Y+\right. \tag{15}$$
$$+\frac{\partial X}{\partial z}\left[\varphi(t,t,x,(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))+\right.$$
$$\left.\left.+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,s,x(s),y(s),\dot{x}(s),\dot{y}(s))\,ds\right]\right\}+\varepsilon^2\frac{\partial X}{\partial x}X,$$
$$-\frac{\partial Y}{\partial \dot{x}}\ddot{x}(t)+\left(I_2-\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}\right)\ddot{y}(t)=\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{\partial Y}{\partial y}Y+$$
$$+\frac{\partial Y}{\partial w}\left[\varphi_1(t,t,x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))+\right.$$
$$\left.+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,s,x(s),y(s),\dot{x}(s),\dot{y}(s))\,ds\right]+\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial x}X.$$

Решение системы (15), ввиду асимптотического представления матрицы

$$\left[I_2-\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}-\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial \dot{x}}\left(I_1-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)^{-1}\frac{\partial X}{\partial \dot{y}}\right]^{-1}=\left(I_2-\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}\right)^{-1}+O(\varepsilon),$$

записывается в виде

$$\ddot{x}=\varepsilon P,$$
$$\ddot{y}=\left(I_2-\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}\right)^{-1}\left[\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{\partial Y}{\partial y}Y+\frac{\partial Y}{\partial w}\left(\varphi_1+\int_0^t\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}ds\right)\right]+\varepsilon Q, \tag{16}$$

где

$$P=P(t,x,y,\dot{x},\dot{y},\varepsilon)=\left(I_1-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)^{-1}\left\{I_1+\varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{y}}\left[I_2-\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}-\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial \dot{x}}\left(I_1-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)^{-1}\frac{\partial X}{\partial \dot{y}}\right]^{-1}\cdot\right.$$
$$\left.\frac{\partial Y}{\partial \dot{x}}\left(I_1-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)^{-1}\right\}\left[\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\partial X}{\partial y}Y+\frac{\partial X}{\partial z}\left(\varphi+\int_0^t\frac{\partial \varphi}{\partial t}ds\right)+\varepsilon\frac{\partial X}{\partial x}X\right]+$$

$$+\left(I_1-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial\dot x}\right)^{-1}\frac{\partial X}{\partial\dot y}\left[I_2-\frac{\partial Y}{\partial\dot y}-\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial\dot x}\left(I_1-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial\dot x}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial X}{\partial\dot y}\right]^{-1}\times$$

$$\cdot\left[\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{\partial Y}{\partial y}Y+\frac{\partial Y}{\partial w}\left(\varphi_1+\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}ds\right)+\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial x}X\right],$$

$$Q=Q(t,x,y,\dot x,\dot y,\varepsilon)=\left(I_2-\frac{\partial Y}{\partial\dot y}\right)^{-1}\left\{\frac{\partial Y}{\partial x}X+\frac{\partial Y}{\partial\dot x}\left(I_1-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial\dot x}\right)^{-1}\times\right.$$

$$\left.\left[\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\partial X}{\partial y}Y+\frac{\partial X}{\partial z}\left(\varphi+\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi}{\partial t}ds\right)+\varepsilon\frac{\partial X}{\partial x}X\right]\right\}+\frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon}\left\{\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{\partial Y}{\partial y}Y+\right.$$

$$+\frac{\partial Y}{\partial w}\left(\varphi_1+\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}ds\right)+\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial x}X+\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial\dot x}\left(I_1-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial\dot x}\right)^{-1}\left[\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\partial X}{\partial y}Y+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial X}{\partial z}\left(\varphi+\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi}{\partial t}ds\right)+\varepsilon\frac{\partial X}{\partial x}X\right]\right\}.$$

Подставляя (16) в (14), получаем

$$\dot\eta(t)-\dot\xi(t)=-\varepsilon\left\{\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial y}Y+\frac{\partial W}{\partial\dot y}\left(I_2-\frac{\partial Y}{\partial\dot y}\right)^{-1}\left[\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{\partial Y}{\partial y}Y+\frac{\partial Y}{\partial w}\varphi_1+\right.\right.\tag{17}$$

$$\left.\left.+\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}ds\right)\right]-X(t,x,y,\dot x,\dot y,z)+\overline{X}(x,\dot x)\Big\}+\varepsilon\,[\overline{X}(\eta,\dot\eta)-\overline{X}(\xi,\dot\xi)]+$$

$$+\varepsilon[\overline{X}(x,\dot x)-\overline{X}(\eta,\dot\eta)]-\varepsilon^2\left(\frac{\partial W}{\partial x}X+\frac{\partial W}{\partial\dot x}P+\frac{\partial W}{\partial\dot y}Q\right).$$

В силу условий теоремы, при $t\geqslant 0$

$$\|\dot\eta(t)-\dot\xi(t)\|\leqslant\varepsilon c[\|\eta(t)-\xi(t)\|+\|\dot\eta(t)-\dot\xi(t)\|]+\tag{18}$$

$$+\varepsilon\acute c[\|\eta(t)-x(t)\|+\|\dot\eta(t)-\dot x(t)\|]+\varepsilon^2M,$$

где

$$\left\|\frac{\partial W}{\partial x}X+\frac{\partial W}{\partial\dot x}P+\frac{\partial W}{\partial\dot y}Q\right\|\leqslant M=\text{const.}.\tag{19}$$

Имея ввиду, что

$$\|\eta(t)-x(t)\|=\varepsilon\|W\|\leqslant\varepsilon M_1,\tag{20}$$

$$\|\dot\eta(t)-\dot x(t)\|=\varepsilon\|\dot W\|\leqslant\varepsilon M_2,\tag{21}$$

где $M_1$ и $M_2$ — положительные постоянные, получаем

$$\|\dot{\eta}(t)-\dot{\xi}(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon c}{1-\varepsilon c}\|\eta(t)-\xi(t)\|+\frac{\varepsilon^2(cM_1+cM_2+M)}{1-\varepsilon c},$$

$$[\eta(t)-\xi(t)]\Big|_{t=0}=0.$$

Отсюда следует, что

$$\|\eta(t)-\xi(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon^2(cM_1+cM_2+M)}{1-\varepsilon c}\int\limits_0^t \exp\left\{\frac{\varepsilon c(t-\tau)}{1-\varepsilon c}\right\}d\tau=$$

$$=\varepsilon c^{-1}(cM_1+cM_2+M)\left[\exp\left\{\frac{\varepsilon ct}{1-\varepsilon c}\right\}-1\right].$$

На отрезке $0\leqslant t\leqslant T$ имеем оценку

$$\|\eta(t)-\xi(t)\| \leqslant \varepsilon c^{-1}(cM_1+cM_2+M)\left[\exp\left\{\frac{cL}{1-\varepsilon c}\right\}-1\right].$$

Учитывая выражение для $\eta(t)$ находим

$$\|x(t)-\xi(t)\| \leqslant \varepsilon\|W\|+\varepsilon c^{-1}(cM_1+cM_2+M)\left[\exp\left\{\frac{cL}{1-\varepsilon c}\right\}-1\right].$$

Так как функция $W$ ограничена, то правая сторона последнего неравенства при достаточно малом $\varepsilon>0$ можно сделать сколь угодно малой, т.е., справедливо неравенство

$$\|x(t)-\xi(t)\|<\delta.$$

Этим теорема I доказана.

Второй вариант метода усреднения. Пусть вдоль интегральных кривых (5) краевой задачи (3), (4), где $\lambda$ рассматривается как векторный параметр, существуют независящие от $\lambda$ средние значения

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T X\Big(t,x,\psi(t,x,\dot{x},\lambda,T),\dot{x}\,\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x,\dot{x},\lambda,T),z\Big)\,dt=\overline{X}(x,\dot{x},z), \tag{22}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^\infty \varphi\Big(t,s,x,\psi(s,x,\dot{x},\lambda,T),\dot{x},\frac{\partial}{\partial s}\psi(s,x,\dot{x},\lambda,T)\Big)\,ds= \tag{23}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,\varphi_2(t,x,\dot{x},\lambda,T)=\overline{\varphi}_2(t,x,\dot{x}).$$

Тогда усредненным уравнением первого приближения для медленных переменных $x(t)$ системы (1) будем называть уравнение

$$\dot{\xi}(t)=\varepsilon\overline{X}\Big(\xi(t),\dot{\xi}(t),\int\limits_0^t\overline{\varphi}_2(t,\xi(s),\dot{\xi}(s))\,ds\Big) \tag{24}$$

с начальным условием

$$\xi(0)=x^{\circ}. \tag{25}$$

Теорема 2. Пусть:

I. Выполнены условия 1, 2, 3, 4 и 6 теоремы I.

1. В области $G^*(t, x, y, u, v)$ функция $\varphi(t, s, x, y, u, v)$ удовлетворяет неравенству

$$\| \varphi(t, s, x, y, u, v)-\varphi(t, s, x', y, u', v) \| \leqslant \sigma_1(t, s)[\| x-x' \| + \| u-u' \|],$$

где функция $\sigma_1(t, s)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^t \sigma_1(t, s)\, ds \leqslant c_1=\text{const.}.$$

3. Для всех $(x, u, z, \lambda) \in G(x, u) \times G_1 \times \Lambda$ и $(t, x, u, \lambda) \in G^*(t, x, u) \times \Lambda$ существуют независящие от параметра $\lambda$ пределы

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X\left(t, x, \psi(t, x, u, \lambda, T), u, \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, u, \lambda, T), z\right) dt=\overline{X}(x, u, z), \tag{26}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^\infty \varphi\left(t, s, x, \psi(s, x, u, \lambda, T), u, \frac{\partial}{\partial s} \psi(s, x, u, \lambda, T)\right) ds=\overline{\varphi}_2(t, x, u), \tag{27}$$

причем предельные переходы в (26) и (27) происходят равномерно относительно совокупности $(x, u, z, \lambda) \in G(x, u) \times G_1 \times \Lambda$ и $(t, x, u, \lambda) \in G^*(t, x, u) \times \Lambda$.

Средние значения $\overline{X}(x, u, z)$ и $\overline{\varphi}_2(t, x, u)$ определены, непрерывны, равномерно ограничены для всех $(x, u, z) \in G(x, u) \times G_1$ и $(t, x, u) \in G^*(t, x, u)$ соответственно и удовлетворяют условиям

$$\| \overline{X}(x, u, z)-\overline{X}(x', u', z') \| \leqslant c[\| x-x' \| + \| u-u' \| + \| z-z' \|]$$

$$\| \overline{\varphi}_2(t, x, u) \| \leqslant \sigma_2(t),$$

$$\| \varphi(t, s, x, y, u, v)-\overline{\varphi}_2(t, x, u) \| \leqslant \sigma_3(t, s),$$

где $c$ — положительная постоянная, а функции $\sigma_2(t)$ и $\sigma_3(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{t} \int_0^t \tau \sigma_2(\tau)\, d\tau \quad \to 0 \quad \text{при } t \to \infty,$$

$$\frac{1}{t} \int^t d\tau \int^\tau \sigma_3(\tau, s)\, ds \quad \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

4. Решение усредненного уравнения

$$\dot{\xi}(t)=\varepsilon \bar{X}(\xi(t), \dot{\xi}(t), \int_0^t \bar{\varphi}_2(t, \xi(s), \dot{\xi}(s))\, ds), \tag{28}$$

удовлетворяющее начальному условию $\xi(0)=x^{\circ}$, существует, однозначно определено при $t \geqslant 0$ для всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, и кривая $\{\xi(t), \dot{\xi}(t)\}$, соответстствующая этому решению, на интервале $0 \leqslant t < \infty$ не выходит из области $G(x, u)$.

5. Уравнение в частных производных

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial y} Y+\frac{\partial W}{\partial v}\left(I_2-\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^{-1}\left[\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{\partial Y}{\partial y} Y+\frac{\partial Y}{\partial w}\left(\varphi_1+\int_0^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} ds\right)\right]= \tag{29}$$

$$=X(t, x, y, u, v, z)-\bar{X}(x, u, z),$$

$$W\Big|_{t=0}=0, \quad x=\text{const.}, \quad u=\text{const.},$$

обладает некоторым решением $W=W(t, x, y, u, v)$, которое определено и равномерно ограничено вместе со своими частными производными первого порядка во всей области $G^*$.

Тогда, если $\{x(t), y(t)\}$ решение краевой задачи (1), (2), а $\xi(t)$ – решение усредненного уравнения (28) с начальным условием $\xi(0)=x^{\circ}$, то для любого, сколь угодно малого $\delta>0$, можно указать такое $\varepsilon^{\circ}$ $(\varepsilon^{\circ} \leqslant \varepsilon^*)$, что при $0<\varepsilon \leqslant \varepsilon^*$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ будет выполняться неравенство

$$\| x(t)-\xi(t) \| < \delta.$$

Доказательство. Оценим разность $\dot{\eta}(t)-\dot{\xi}(t)$, где $\eta(t)$ выражение (13), а $\xi(t)$ – решение усредненного уравнения (28), с начальным условием $\xi(0)=x^{\circ}$.

Имеем

$$\dot{\eta}(t)-\dot{\xi}(t)=\dot{x}(t)-\varepsilon\left[\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial x} \dot{x}(t)+\frac{\partial W}{\partial y} \dot{y}(t)+\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} \ddot{x}(t)+\right. \tag{30}$$

$$\left.+\frac{\partial W}{\partial \dot{y}} \ddot{y}(t)+\bar{X}(\xi(t), \dot{\xi}(t), \zeta(t))\right],$$

где

$$\zeta(t)=\int_0^t \bar{\varphi}_2(t, \xi(s), \dot{\xi}(s))\, ds.$$

Продифференцировав систему (1) и подставляя (16) в (30) получаем

$$\dot{\eta}(t)-\dot{\xi}(t)=-\varepsilon\left\{\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial y} Y+\frac{\partial W}{\partial \dot{y}}\left(I_2-\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}\right)^{-1}\left[\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{\partial Y}{\partial y} Y+\right.\right.$$

$$+\frac{\partial Y}{\partial w}\left(\varphi_1+\int_0^t\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}ds\right)\Big]-X(t,x,y,\dot x,\dot y,z)+\overline{X}(x,\dot x,z)\Big\}+$$

$$+\varepsilon[\overline{X}(\eta,\dot\eta,\zeta)-\overline{X}(\xi,\dot\xi,\zeta)]+\varepsilon[\overline{X}(x,\dot x,z)-\overline{X}(\eta,\dot\eta,\zeta)]-$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial W}{\partial x}X+\frac{\partial W}{\partial\dot x}P+\frac{\partial W}{\partial\dot y}Q\right).$$

В силу условий теоремы 2 и неравенств (19), (20) и (21) при $t\geqslant 0$ получаем

$$\|\dot\eta(t)-\dot\xi(t)\|\leqslant\varepsilon c\|\eta(t)-\xi(t)\|+\|\dot\eta(t)-\dot\xi(t)\|+\|\int_0^t[\overline{\varphi}_2(t,\eta(s),\dot\eta(s))-$$

$$-\overline{\varphi}_2(t,\xi(s),\dot\xi(s))]ds\}+\varepsilon c\{\|\eta(t)-x(t)\|+\|\dot\eta(t)-\dot x(t)\|+$$

$$+\|\int_0^t[\varphi(t,s,x(s),\ y(s),\ \dot x(s),\ \dot y(s))-\overline{\varphi}_2(t,\eta(s),\dot\eta(s))]ds\|+\varepsilon^2M\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon c\{\|\eta(t)-\xi(t)\|+\|\dot\eta(t)-\dot\xi(t)\|+2t\sigma_2(t)+\|\eta(t)-x(t)\|+$$

$$+\|\dot\eta(t)-\dot x(t))\|+\int_0^t\|\varphi(t,s,x(s),y(s),\dot x(s),\dot y(s))-\varphi(t,s,\eta(s),y(s),\dot\eta(s)\dot y(s))]ds$$

$$+\int_0^t\|\varphi(t,s,\eta(s),y(s),\dot\eta(s),\dot y(s))-\overline{\varphi}_2(t,\eta(s),\dot\eta(s))\|ds\}+\varepsilon^2M\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon c\{\|\eta(t)-\xi(t)\|+\|\dot\eta(t)-\dot\xi(t)\|+2t\sigma_2(t)+\|\eta(t)-x(t)\|+\|\dot\eta(t)-\dot x(t)\|+$$

$$+\int_0^t\sigma_1(t,s)[\|\eta(s)-x(s)\|+\|\dot\eta(s)-\dot x(s)\|]ds+\int_0^t\sigma_3(t,s)ds\}+\varepsilon^2M\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon c\{\|\eta(t)-\xi(t)\|+\|\dot\eta(t)-\dot\xi(t)\|+2t\sigma_2(t)+\varepsilon(M_1+M_2)(1+c_1)+$$

$$+\int_0^t\sigma_3(t,s)ds\}+\varepsilon^2M,$$

откуда

$$\|\dot\eta(t)-\dot\xi(t)\|\leqslant\frac{\varepsilon c}{1-\varepsilon c}\|\eta(t)-\xi(t)\|+\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon c}[c(M_1+M_2)(1+c_1)+M]+$$

$$+\frac{\varepsilon c}{1-\varepsilon c}[2t\sigma_1(t)+\sigma_{30}(t)],$$

где

$$\sigma_{30}(t)=\int_0^t\sigma_3(t,s)ds.$$

Отсюда, имея ввиду условие $\eta(0)=\xi(0)$ находим, что

$$\|\eta(t)-\xi(t)\| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon c}\int_0^t \{\varepsilon^2[c(M_1+M_2)(1+c_1)+M]+$$

$$+\varepsilon c[2\tau\sigma_2(\tau)+\sigma_{30}(\tau)]\}\exp\left\{\frac{\varepsilon c(t-\tau)}{1-\varepsilon c}\right\}d\tau.$$

Вводя функции

$$\gamma_1(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \tau\sigma_2(\tau)\,d\tau \qquad \to 0 \qquad \text{при } t\to\infty,$$

$$\gamma_2(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \sigma_{30}(\tau)\,d\tau \qquad \to 0 \qquad \text{при } t\to\infty,$$

на отрезке $0\leqslant t\leqslant T$ получаем оценку

$$\|\eta(t)-\xi(t)\| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon c}\{\varepsilon[c(M_1+M_2)(1+c_1)+M]L+c[2\gamma_1(L\varepsilon^{-1})+$$

$$+\gamma_2(L\varepsilon^{-1})]L\}\exp\left\{\frac{cL_1}{1-\varepsilon c}\right\}.$$

Из этого неравенства и из (12) видно, что всегда можно выбрать $\varepsilon>0$ таким образом, чтобы на отрезке $0\leqslant t\leqslant T$ было справедливо неравенство

$$\|x(t)-\xi(t)\|<\delta.$$

Этим теорема 2 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Филатов А. Н., *О методе усреднения в системах интегро — дифференциальных уравнений*, ДАН СССР, т. 165, 1965, № 3.

[2] Филатов А. Н., *Усредение в системах дифференциалных, интегродифференциальных и интегральных уравнений*. Изд-во „ФАН", Ташкент, 1967.

[3] Филатов А. Н., *Методы усреднения в дифференциальных и интегро — дифференциальных уравнениях*. Изд-во „ФАН", Ташкент, 1971.

[4] Ларионов Г. С., Филатов А. Н., *О методе усреднения в нелинейной механике*. Изв. АН Уз. ССР. серия технических наук, № 2, 1969.

[5] Тазабеков Р. *Метод усреднения в системах нелинейных интегро — дифференциальных уравнений содержащие быстрые и медленные переменные*. Исследования по интегро — дифференциальным уравнениям в Киргизии. Изд-во „ИЛИМ", вып. 6, Фрунзе, 1969.

[6] Иманалиев М. И., Тазабеков Р. *Метод усреднения в теории нелинейных систем интегро — дифференциальных уравнений не разрешенных относительно производной*. Исследования по интегро — дифференциальным уравнениям в Киргизии. Изд-во „ИЛИМ", вып. 7, Фрунзе, 1970.

[7] Байнов Д. Д. *Метод усреднения для одной двухточечной краевой задачи*. Математички весник, 5 (20), Св. 2, 1968.

[8] Байнов Д. Д. *Асимптотические формулы для одной краевой задачи*. Труды V международной конференции по нелинейным колебаниям. т. I, Киев, 1970.

Пловдивский университет
имени П. Хилендарского

Высший машинно — электротехнический
институт имени В. И. Ленина — София