PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 16 (30), 1973, pp. 95—100

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE TRANSFORMATION DE LA FONCTION SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR DE LAPLACE

Manojlo Maravić

(Reçu le 20 Septembre, 1973)

1. Considérons l'opérateur de Laplace dans l'espace euclidien $E_n \, (n \geqslant 2)$ appliqué à la fonction $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n{}^2}.$$

Soit D un domaine ouvert et borné dans cet espace. Soient $P(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0)$ et $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ deux points dans D à distance r, c.à.d.

$$r^2 = |\, Q - P \,|^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2.$$

Supposons que la frontière B de D est suffisamment régulière de sorte que le problème aux limites

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \Delta u + \lambda u = 0 \quad &\text{dans} \quad D \\ u = 0 \quad &\text{sur} \quad B \end{aligned}$$

admet une infinité de valeurs caractéristiques positives

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_\nu \leqslant \cdots \to \infty, \quad \nu \to \infty$$

avec les fonctions caractéristiques correspondantes

$$\Phi_1(Q), \ \Phi_2(Q), \ldots, \Phi_\nu(Q), \ldots .$$

On dit que la fonction

$$\text{(2)} \qquad \Omega(P, Q; x) = \sum_{\lambda_\nu < x} \Phi_\nu(P) \, \Phi_\nu(Q)$$

est *la fonction spectrale* de l'opérateur de Laplace.

2. D'abord quelques notations dons nous aurons besoin dans ce qui suit:

(I) $\sigma^k(\Omega; x)$ est la moyenne de *Riesz* d'ordre k de la fonction $\Omega(P, Q; t)$, à savoir

$$\text{(3)} \qquad \sigma^k(\Omega; x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d\{\Omega(P, Q; t)\} = \frac{k}{x} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1} \Omega(P, Q; t) \, dt,$$

où $k \geqslant 0$.

(II) Il est connu [5] page (45) que

$$\frac{d}{dz}\{z^{\nu} J_{\nu}(z)\} = z^{\nu} J_{\nu-1}(z), \tag{4}$$

où $J_{\nu}(z)$ est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre ν.

(III) La moyenne G ou la transformation G d'ordre $\varkappa$ de la fonction $\Omega(P, Q; t)$ est définie par [1]

$$G_{\theta}^{\varkappa}(\Omega; x) = \int_0^x \{1 - \exp[(t-x)x^{-\theta}]\}^{\varkappa}\, d\{\Omega(P, Q; t)\} = \tag{5}$$

$$= \varkappa x^{-\theta} \int_0^x w(t, x)\, \Omega(P, Q; t)\, dt,$$

où $0 < \theta < 1$, $\varkappa > 0$ et

$$w = w(t, x) = \{1 - \exp[(t-x)x^{-\theta}]\}^{\varkappa - 1} \exp[(t-x)x^{-\theta}]. \tag{6}$$

Les dérivées successives de la fonction $w(t, x)$, par rapport à t, ont la forme [4]

$$\frac{d^m w}{dt^m} = w^{(m)}(t) = x^{-m\theta}\{1 - \exp[(t-x)x^{-\theta}]\}^{\varkappa-(m+1)} \exp[(t-x)x^{-\theta}] \cdot \tag{7}$$

$$\cdot P_m\{\exp[(t-x)x^{-\theta}]\}.$$

où P_m est un polynome de degré m en $exp[(t-x)x^{-\theta}]$. Ses zéros, par rapport à l'argument $\exp[(t-x)x^{-\theta}]$ ne dépendent pas de x mais seulement de $\varkappa$. Pour les valeurs $t = t_{\mu}$, qui l'annulent, la relation asymptotique

$$t_{\mu} = x - x^{\theta} K_{\mu}(\varkappa) \sim x, \quad x \to \infty. \tag{8}$$

est valable [4].

(IV) Désignons par D_{ε} l'ensemble des points appartenants au domaine D et tels que leur distance de la frontière B soit supérieure ou égale à ε, ε étant un nombre positif donné arbitrairement. Soient P et Q deux points appartenants à D_{ε}. *Levitan* [2, 3] a démontré la validité de la relation asympotique

$$\sigma^k(\Omega; x) = 2^{k-n/2}\, \pi^{-n/2}\, \Gamma(k+1)\, r^{-k-n/2}\, x^{n/4-k/2}\, J_{k+n/2}(r\sqrt{x}) + \tag{9}$$

$$+ O\{x^{(n-1-k)/2}\}, \quad x \to \infty$$

pour tout $k \geqslant 0$.

3. Résultats:

Lemme 1. *Si k est un entier nonnégatif, $\varkappa > k$ et $r > 0$, alors*

$$G_{\theta}^{\varkappa}(\Psi_p; x) = (-1)^k\, 2^k\, r^{-2k}\, \varkappa x^{-\theta} \int_0^x w^{(k)}(t)\, \Psi_{p+k}(t)\, dt, \tag{10}$$

où

$$\Psi_p(t) = (r\sqrt{t})^p J_p(r\sqrt{t}), \quad p > 0. \tag{11}$$

Lemme 2.

$$H(x)=x^{-\theta}\int_0^x |w^{(k)}(t)|\, t^{(n-1+k)/2}\,dt= \tag{12}$$

$$=O\{x^{-k\theta+(n-1+k)/2}\},\quad x\to\infty$$

pour tout $\varkappa>k$, k *étant un entier nonnégatif.*

Théorème. *Soit*

$$r>0,\quad 1/2<\theta<1,\quad k>(n-1)(2\theta-1)^{-1}, \tag{13}$$

où k *est un entier nonnégatif. Alors*

$$G_\theta^\varkappa(\Omega;x)=(2\pi)^{-n/2}r^{-n}G_\theta^\varkappa(\Psi_{n/2};x)+o(1),\quad x\to\infty \tag{14}$$

pour tout $\varkappa>k$.

4. *Démonstration du Lemme 1.* La transformation G de la fonction $\Psi_p(t)$ est définie par

$$G_\theta^\varkappa(\Psi_p;x)=\int_0^x\{1-\exp[t-x)x^{-\theta}]\}^\varkappa\, d\{\Psi_p(t)\}= \tag{15}$$

$$=\varkappa x^{-\theta}\int_0^x w(t,x)\,\Psi_p(t)\,dt,$$

où $w(t,x)$ est donnée par (6). D'après (4) on a

$$\frac{d}{dt}(r\sqrt{t})^{p+1}J_{p+1}(r\sqrt{t})=\frac{1}{2}r^2(r\sqrt{t})^pJ_p(r\sqrt{t}),$$

c.à.d.

$$\frac{d}{dt}\{\Psi_{p+1}(t)\}=\frac{1}{2}r^2\Psi_p(t),$$

d'où

$$\Psi_p(t)=\frac{2}{r^2}\frac{d}{dt}\{\Psi_{p+1}(t)\}. \tag{16}$$

En intégrant (15) k fois par parties et en appliquant chaque fois la formule (16), on obtient

$$G_\theta^\varkappa(\Psi_p;x)=(-1)^k2^kr^{-2k}\varkappa x^{-\theta}\int_0^x w^{(k)}(t)\,\Psi_{p+k}(t)\,dt,$$

parce que $\Psi_{p+\nu}=0$ pour $\nu=0,1,2,\dots$ et

$$w^{(m)}=0 \text{ pour } t=x,\ m=0.1,2,\dots,k-1 \text{ et } \varkappa>k. \tag{17}$$

Ainsi le Lemme 1. est démontré.

Démonstration du Lemme 2. D'après (7) nous avons

$$\frac{d^k w}{dt^k}=w^{(k)}(t)=x^{-k\theta}\{1-\exp[(t-x)x^{-\theta}]\}^{\varkappa-(k+1)}\exp[(t-x)x^{-\theta}]\cdot$$
$$\cdot P_k\{\exp[(t-x)x^{-\theta}]\}.$$

Supposons que le polynome P_k admet s zéros $t_\nu\,(\nu=1,2,\ldots,s)$ situés dans l'intervalle $(0,x)$. Par conséquent $w^{(k)}(t)$ sera de signe constant dans tout intervalle $t_{\nu-1}<t<t_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,s,s+1)$, où $t_0=0$, $t_{s+1}=x$.

Ecrivons l'intégrale (12) sous la forme

$$H(x)=x^{-\theta}\left(\sum_{\nu=1}^{s}\int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu}+\int_{t_s}^{x}\right)|w^{(k)}(t)|\,t^{(n-1+k)/2}\,dt=\sum_{\nu=1}^{s}H_\nu(x)+H^*(x). \tag{18}$$

Pour l'estimation de ces intégrales nous pouvons utiliser la relation asymptotique

$$t_\nu=x-x^\theta K_\nu(\varkappa)\sim x,\ x\to\infty,\qquad(\nu=1,2,\ldots,s). \tag{19}$$

Puisque dans tout intervalle $(t_{\nu-1},t_\nu)$

$$|w^{(k)}(t)|=\begin{cases}w^{(k)}(t) & \text{si } w^{(k)}(t)>0 \text{ dans } (t_{\nu-1},t_\nu),\\ -w^{(k)}(t) & \text{si } w^{(k)}(t)<0 \text{ dans } (t_{\nu-1},t_\nu),\end{cases}$$

nous pouvons supposer $w^{(k)}(t)>0$ dans l'intervalle $(t_{\nu-1},t_\nu)$ et, par conséquent, $w^{(k-1)}(t)$ croissante. On aurait obtenu le même résultat dans l'estimation de cette intégrale en supposant $w^{(k)}(t)<0$ dans $(t_{\nu-1}),t_\nu)$. Donc

$$H_\nu(x)=x^{-\theta}\int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu}w^{(k)}(t)\,t^{(n-1+k)/2}\,dt.$$

D'après (7) on obtient

$$H_\nu(x)\leqslant x^{-\theta+(n-1+k)/2}\int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu}w^{(k)}(t)\,dt=$$
$$=x^{-\theta+(n-1+k)/2}\{w^{(k-1)}(t_\nu)-w^{(k-1)}(t_{\nu-1})\}=x^{-k\theta+(n-1+k)/2}\,.$$
$$(\{1-\exp[(t_\nu-x)x^{-\theta}]\}^{\varkappa-k}\exp[(t_\nu-x)x^{-\theta}]P_{k-1}\{\exp[(t_\nu-x)x^{-\theta}]\}-$$
$$-\{1-\exp[(t_{\nu-1}-x)x^{-\theta}]\}^{\varkappa-k}\exp[(t_{\nu-1}-x)x^{-\theta}]P_{k-1}\{\exp[(t_{\nu-1}-x)x^{-\theta}]\}).$$

En tenant compte de (19) nous avons

$$H_\nu(x)\leqslant C_\nu(\varkappa,k)\,x^{-k\theta+(n-1+k)/2},\qquad(\nu=0,1,\ldots,s), \tag{20}$$

où C_ν ne dépendent pas de x.

Nous avons encore à estimer l'intégrale

$$H^*(x)=x^{-\theta}\int_{t_s}^{x}|w^{(k)}(t)|\,t^{(n-1+k)/2}\,dt.$$

Soit $w^{(k)}(t)>0$ dans l'intervalle (t_s, x), c.à.d $w^{(k-1)}(t)$ est croissante dans cet intervalle. On pourrait obtenir le même résultat sur l'estimation de cette intégrale dans le cas de $w^{(k)}(t)<0$.

$$H^*(x) \leqslant x^{-\theta+(n-1+k)/2} \int_{t_s}^{x} w^{(k)}(t)\, dt =$$

$$= x^{-\theta+(n-1+k)/2} [w^{(k-1)}(x) - w^{(k-1)}(t_s)].$$

$$H^*(x) \leqslant -x^{-k\theta+(n-1+k)/2} \{1-\exp[(t_s-x)x^{-\theta}]\}^{\varkappa-k} \cdot \tag{21}$$

$$\cdot \exp[(t_s-x)x^{-\theta}] P_{k-1} \{\exp[(t_s-x)x^{-\theta}]\}.$$

Puisque d'après (7) $w^{(k-1)}(x)=0$ car $\varkappa>k$ et $w^{(k-1)}(t)$ croît dans l'intervalle (t_s, x), il vient $w^{(k-1)}(t_s)<0$ et le second membre de (21) est positif. En tenant compte de (19) on a

$$H^*(x) \leqslant C^*(\varkappa, k)\, x^{-k\theta+(n-1+k)/2}, \tag{22}$$

où C^* ne dépend pas de x.

Du (18), (20) et (22) suit l'affirmation du Lemme 2.

Démonstration du Théorème. Puisque k est un entier positif, nous pouvons exprimer la moyenne G de la fonction spectrale (2) par sa moyenne de Riesz (3), dont le comportement asymptotique est donné par (9). Ainsi on obtient le comportement asymptotique de la moyenne G de la fonction spectrale. En partant de

$$x^k \sigma^k(\Omega; x) = k \int_0^x (x-t)^{k-1} \Omega(P, Q; t)\, dt \tag{23}$$

on obtient

$$\Omega(P, Q; x) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \{x^k \sigma^k(\Omega; x)\}. \tag{24}$$

En remplaçant (24) dans (5) on obtient

$$G_\theta^\varkappa(\Omega; x) = \frac{\varkappa}{k!\, x^\theta} \int_0^x w(t, x) \frac{d^k}{dt^k} \{t^k \sigma^k(\Omega; t)\}\, dt. \tag{25}$$

D'après (23) on a

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} \{t^k \sigma^k(\Omega; t)\} = 0 \text{ pour } t=0 \text{ et } \nu=0, 1, \ldots, k-1. \tag{26}$$

En intégrant (25) par parties k fois et en utilisant (17) et (26) on obtient

$$G_\theta^\varkappa(\Omega; x) = (-1)^k \frac{\varkappa}{k!} x^{-\theta} \int_0^x w^{(k)}(t)\; t^k \sigma^k(\Omega; t)\, dt$$

et en tenant compte de (9) il vient

$$G_\theta^\varkappa(\Omega; x) = (-1)^k\, 2^{k-n/2}\, \pi^{-n/2}\, r^{-n-2k}\, \varkappa \cdot$$
$$\cdot\, x^{-\theta} \int_0^x w^{(k)}(t)\, (r\sqrt{t})^{k+n/2}\, J_{k+n/2}(r\sqrt{t})\, dt +$$
$$+\, O\left\{x^{-\theta} \int_0^x |\, w^{(k)}(t)\,|\; t^{(n-1+k)/2}\, dt\right\}.$$

En posant $p = n/2$ dans (10) et (11) nous pouvons écrire

$$G_\theta^\varkappa(\Omega; x) = (2\pi)^{-n/2}\, r^{-n}\, G_\theta^\varkappa(\Psi_{n/2}; x) +$$
$$+\, O\left\{x^{-\theta} \int_0^x |\, w^{(k)}(t)\,|\, t^{(n-1+k)/2}\, dt\right\}, \quad x \to \infty.$$

D'après le résultat (12) du Lemme 2. on a

$$G_\theta^\varkappa(\Omega; x) = (2\pi)^{-n/2}\, r^{-n}\, G_\theta^\varkappa(\Psi_{n/2}; x) + \tag{27}$$
$$+\, O\left\{x^{-k\theta + (n-1+k)/2}\right\}, \quad x \to \infty.$$

Puisque les conditions (13) sont remplies, on a $-k\theta + (n-1+k)/2 < 0$ et en partant de (27) on obtient

$$G_\theta^\varkappa(\Omega; x) = (2\pi)^{-n/2}\, r^{-n}\, G_\theta^\varkappa(\Psi_{n/2}; x) + o(1), \quad x \to \infty,$$

pour tout $\varkappa > k$ où k est un entier positif.

Ainsi le Théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Avakumović, V. G., *Über die Eigenwerte der Schwingungsgleichung*, Math. Scand. 4(1956), 161—173.

[2] Левитан Б. М., *О разложении по собственным функциям оператора Лапласа*, Мат. сб 35(77);2(1954), 267—316.

[3] Левитан Б. М. *Приложение о суммировании по Риссу интегалов Стильтьеса* Мат. сб 39(81);1(1956).

[4] Маравић, М., *О једном поступку збирљивости диферентних редова*, САН Зборник радова књ. LV, Мат. инст. 6(1957), 5—52.

[5] Watson, G.N. *A treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1952.