PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 16 (30), 1973, pp. 75—83

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES IMPLICITES PAR RAPPORT À LA DÉRIVÉE DES FAMILLES DE FONCTIONS DÉFINIES PARAMÉTRIQUEMENT

Andrzej Kapcia

(Reçu le 12 Mai, 1973)

Introduction.

Dans cette note—ci nous donnerons quelques équations différentielles implicites par rapport à la dérivée et les méthodes de leurs désignation. Dans ce but nous profiterons des équations différentielles connues en forme normale. Nous avons déjà annoncé quelques résultats partiels dans notre article [3]. Les équations obtenues ce sont les généralisations des équations bien connues de Clairaut, de d'Alembert et du Professeur D. S. Mitrinović (v. [5] p. 23 et [6] p. 113). Ici nous voulons donner les résultats possiblement généraux.

Dans la note [3] on donne trois problèmes, qu'on peut en général formuler comme suit:

Problème I.

1° Soit donné l'équation différentielle en forme normale

$$u' = g(p, u), \tag{I}$$

où la fonction $g(p, u)$ est définie dans le domaine $P \times U$,

2° soit donné $u(p, C)$ une famille de solutions de l'équation différentielle (I),

3° soient définies les fonctions de la famille $x(p, C)$ d'une certaine manière à l'aide de la famille $u(p, C)$,

4° les fonctions de la famille $y(p, C)$ soient définies à l'aide de l'identité

$$y'_p(p, C) = x'_p(p, C)\, p, \tag{II}$$

pour chaque $p \in P$ et C fixé.

Nous avons donc défini une famille en forme paramétrique

$$x = x(p, C), \qquad y = y(p, C). \tag{III}$$

Le problème consiste à fixer la dépendance entre les familles $x(p, C)$ et $u(p, C)$, puis à trouver la famille (III) et son équation différentielle implicite

$$y = f(x, y'). \tag{IV}$$

Dans la note [3] les problèmes concernés à trouver des équations implicites sont formulés plus étroitement. Ces problèmes avaient pris naissance d'une suggestion du Professeur A. Pliś de quelle j'exprime mes remerciments. Dans ce travail nous donnons les théorèmes quels sont plus généraux des théorèmes I. 2 et II. 1 du travail [3]. Les théorèmes du travail [3] nous formulons comme les corollaires.

I. Familles de fonctions satisfaisant à la condition

$$\psi'_p(p, u(p, C)) + \psi'_u(p, u(p, C))\, u'_p(p, C) \neq 0.$$

Introduisons les notations suivantes: on désigne l'intervalle ouvert (x_1, x_2) par X (l'intervalle ouvert (u_1, u_2) par U etc.); domaine rectangulaire ouvert $(p_1, p_2; u_1\ u_2)$ par $P \times U$; fonction inverse par rapport à la fonction $f(x)$ par $f_{-1}(y)$; la solution (si elle existe) de l'équation $x = g(p, u)$ par rapport à p par $p = g_{-1p}(x, u)$ et par rapport à u par $u = g_{-1u}(x, p)$.

Dans nos considérations nous admettons comme le point de départ l'équation suivante

$$u' = a(p)\, \psi(p, u) + b(p)\, u + c(p), \tag{I.1}$$

dans laquelle les fonctions $a(p), \psi(p, u), b(p), c(p)$ sont données dans des intervalles convenables. L'admission de telle forme de l'équation (I) est motivée par les faits suivants: 1) les fonctions $a(p), \psi(p, u), b(p)$ et $c(p)$ peuvent appartenir à différentes classes, 2) l'équation (I.1) peut admettre les formes spéciales p. e.: l'équation linéaire, l'équation de Bernoulli, l'équation non-linéaire et beaucoup d'autres qu'on trouve dans la monopraphie de E. Kamke [1] et aussi la forme (I), 3) l'équaton (I.1) obtient les classes des équations qui étaient l'objet de nos considérations dans les travaux précédents [2], [3] et [4].

Théorème I.1 Si les hypothèses suivantes sont remplies:

1° les fonctions:

1) $b(p)$ et $c(p)$ sont de la classe C pour $p \in P$,

2) $a(p)$ est de la forme

$$a(p) = -\exp \int b(p)\, dp, \tag{1.1.}$$

3) $\psi(p, u)$ est de la classe C^1 dans le rectangle $P \times U$;

2° 1) $u(p, C)$ est la famille de solutions de l'équation différentielle linéaire avec une perturbation en forme

$$u' = a(p)\, \psi(p, u) + b(p)\, u + c(p), \tag{I.1}$$

2) les fonctions de la famille $u(p, C)$ satisfont à la condition

$$\psi'_p(p, u(p, C)) + \psi'_u(p, u(p, C))\, u'_p(p, C) \neq 0 \tag{1.2}$$

pour $p \in P$ et C fixé,

3) la dérivée $\psi'_u(p, u) \neq 0$ le long de chaque solution $u(p, C)$ définie pour $p \in P$;

3° les fonctions de la famille $x(p, C)$ sont définies par l'égalité

$$x(p, C) = \psi(p, u(p, C)) \tag{1.3}$$

pour $p \in P$ et C fixé,

4° les fonctions de la famille $y(p, C)$ sont définies à l'aide de l'identité (II), alors la famille de fonctions (III) est définie paramétriquement par les formules

$$x = \psi(p, u(p, C)), \qquad y = \psi(p, u(p, C))\, p + u(p, C) f(p) + g(p), \tag{III.1}$$

où $p \in P$ et les fonctions $f(p)$ et $g(p)$ sont de la forme

$$f(p) = \exp \int (-b(p))\, dp, \qquad g(p) = \int (-c(p) f(p))\, dp + K, \tag{1.4}$$

où K est une constante arbitraire. L'équation différentielle de la famille (III.1) a la forme

$$y = x y' + \varphi(x, y')\, f(y') + g(y'), \tag{IV.1}$$

où la fonction $\varphi(x, y') \equiv \psi_{-1u}(x, y')$.

Démonstration. De (III) et 3° nous avons

$$x = x(p, C) = \psi(p, u(p, C)). \tag{1.5}$$

Différenciant (1.5) et profitant de l'identité (II) nous obtenons

$$y'_p(p, C) = [\psi'_p(p, u(p, C)) + \psi'_u(p, u(p, C))\, u'_p(p, C)]\, p. \tag{1.6}$$

Profitant du fait que la famille $u(p, C)$ satisfait à l'équation (I.1) nous obtenons l'identité

$$y'_p(p, C) = [\psi'_p(p, u(p, C)) + \psi'_u(p, u(p, C))\, u'_p(p, C)]\, p + \tag{1.7}$$
$$+ \psi(p, u(p, C)) - \frac{u'_p(p, C)}{a(p)} + \frac{b(p)}{a(p)} u(p, C) + \frac{c(p)}{a(p)}.$$

En vertu de la condition (1.1) nous avons donc

$$y'_p(p, C) = [\psi'_p(p, u(p, C)) + \psi'_u(p, u(p, C))\, u'_p(p, C)]\, p + \psi(p, u(p, C)) + \tag{1.8}$$
$$+ u'_p(p, C) \left(\exp \int (-b(p))\, dp\right) - u(p, C)\, b(p) \left(\exp \int (-b(p))\, dp\right) -$$
$$- c(p) \left(\exp \int (-b(p))\, dp\right).$$

En intégrant nous obtenons

$$y(p, C) = \psi(p, u(p, C))\, p + u(p, C) \left(\exp \int (-b(p))\, dp\right) + \tag{1.9}$$
$$+ \int \left(-c(p) \left(\exp \int (-b(p))\, dp\right)\right) dp + K,$$

où K constante arbitaire. Remarquons que les deux dernières fonctions dans l'expression (1.9) sont en forme (1.4). Nous avons donc obtenu la deuxième équation (III.1). Pour déterminer l'équation différentielle de la famille (III.1) nous remarquons que d'après 2° 2 et 3° nous avons $x'_p\,(p, C) \neq 0$, et selon de 4° il résulte que

$$y'_p(p,C)/x'_p(p,C) = p = y'_x(x) = y'. \tag{1.10}$$

Pour déterminer la fonction $u(p, C)$ comme la fonction des variables x et p considérons l'équation

$$x - \psi(p, u) = 0. \tag{1.11}$$

La fonction $F(x,p,u) \equiv x - \psi(p,u)$ est définie et continue avec ses dérivées premières dans le domaine $X \times P \times U$ (v· 1° 3; X – l'ensemble de valeurs de la fonction (1.3), U — l'ensemble de valeurs de la fonction $u(p,C)$ avec C fixé). En vertu de la famille $x(p,C)$ (v. 3°) nous remarquons que pour chaque $p_0 \in P$ il existe telle $u_0 \in U$ et en conséquence $x_0 = \psi(p_0, u_0)$ pour lesquelles l'équation (1.11) s'annule. En vertu de cela et de l'hypothèse 2° 3 la fonction $F(x,p,u)$ satisfait aux hypothèses du théorème de l'existence d'une fonction implicite. En l'appliquant nous obtenons qu'existe la solution unique de l'équation (1.11) par rapport à u en forme

$$u = \psi_{-1u}(x,p), \tag{1.12}$$

définie dans l'entourage du point (x_0, p_0). Comme $x = x(p, C)$, alors nous obtenons

$$u(p,C) = \psi_{-1u}(x(p,C),p) \equiv \varphi(x(p,C),p). \tag{1.13}$$

D'après (1.10), (1.13), en vertu de la première équation (III.1), on déduit de la deuxième équation (III.1) l'équation différentielle (IV.1).

R e m a r q u e I. 1 Du th. I. 1 résulte la méthode de la résolution de l'équation implicite du type (IV.1). Pour cela il suffit à trouver pour l'équation (IV.1) l'équation correspondante en forme normale (I.1), puis résoudre cette équation par rapport à u, et ayant la solution $u(p,C)$ déterminer par les formules (III.1) sa solution paramétrique. Il est évident que la famille obtenue est la famille de solutions de l'équation (IV.1).

II. Familles de fonctions satisfaisant à la condition $u''_{pp}\,(p, C) \neq 0$.

Comme le corollaire du th. I. 1 il résulte le théorème suivant:

T h é o r è m e II.1 (résolution générale du problème II.1 du travail [3]) Si les hypothèses suivantes sont remplies:

1° la fonction $g(p,u)$ est de la classe C^1 dans le domaine $P \times U$,

2° 1) $u(p,C)$ est la famille de solutions de l'équation différentielle

$$u' = g(p,u), \tag{I.2}$$

2) les fonctions de la famille $u(p,C)$ satisfont à la condition

$$u''_{pp}(p,C) \neq 0 \tag{2.1}$$

pour chaque $p \in P$ et C fixé,

3) la dérivée $g'_u(p,u) \neq 0$ le long de chaque solution $u(p,C)$ définie pour $p \in P$;

3° les fonctions de la famille $x(p,C)$ sont définies par l'égalité

$$x(p,C) = g(p, u(p,C)) \tag{2.2}$$

pour $p \in P$ et C fixé,

4° les fonctions de la famille $y(p,C)$ sont définies à l'aide de l'identité (II) pour chaque $p \in P$ et C fixé,

alors la famille de fonctions (III) est définie paramétriquement par les formules

$$x = g(p, u(p,C)), \quad y = g(p, u(p,C))\,p - u(p,C) + K, \tag{III.2}$$

où K — une const. arbitraire et $p \in P$. L'équation différentielle de la famille (III.2) c'est une équation différentielle de la forme

$$y = xy' + \varphi(x,y') + K, \tag{IV.2}$$

où $\varphi(x,y') \equiv -g_{-1u}(x,y')$.

D é m o n s t r a t i o n. Remarquons que l'équation (I.2) peut être écrite en forme

$$u' = -(-g(p,u)). \tag{I.2.1}$$

Cette équation est du type (I.1) dans lequel les fonctions $b(p)$ et $c(p)$ sont identiquement égales à zéro pour $p \in P$. La fonction $a(p)$, définie par la formule (1.1) prend alors la forme $a(p) = -\exp(C)$, où C une constante arbitraire. Nous pouvons donc admettre $C = 0$, d'où $a(p) = -1$. Evidemment, alors $\psi(p,u) = -g(p,u)$. Nous remarquons qu'en vertu des hypothèses 1°, 2° et 4° du th. II.1 sont remplies les hypothèses 1°, 2° et 4° du th. I.1. Remplaçant $x(p,C)$ et $y(p,C)$ dans le th. I.1 par $x^*(p,C)$ et $y^*(p,C)$ et admettant

$$x^*(p,C) = -g(p,u) \tag{2.3}$$

nous pouvons appliquer à la famille $x^*(p,C)$, $y^*(p,C)$ la thèse du th. I. 1.

Nous avons donc obtenu que cette famille est définie par les formules

$$x^*(p,C) = -g(p, u(p,C)), \quad y^*(p,C) = -g(p, u(p,C))\,p + u(p,C) + K^* \tag{2.4}$$

et son équation différentielle prend la forme

$$y^* = x^* y^{*\prime} + g_{-1u}(-x^*, y^{*\prime}) + K^*. \tag{2.5.}$$

Multipliant les formules (2.4) et l'équation (2.5) par -1, puis posant $x(p,C) = -x^*(p,C)$ et $y(p,C) = -y^*(p,C)$ dans les formules (2.4) et remarquant que d'après des substitutions admis $x = -x^*$, $y = -y^*$, $y' = y^{*\prime}$ on déduit, en vertu de (2.4) et (2.5), la thèse du théorème. (La constante $K = -K^*$).

C o r o l l a i r e II.1 (th. II. 1 du travail [3])

Si les hypothèses suivantes sont remplies:

1° les fonctions $a(p)$, $b(p)$ et $\psi(u)$ sont de la classe C^1 dans les intervalles convenables P et U, $a(p) \neq 0$ pour $p \in P$, 2° 1) $u(p,C)$ est la famille de solutions de l'équation différentielle

$$u' = a(p)\,\psi(u) + b(p), \tag{I.3}$$

2) les fonctions de la famille $u(p,C)$ satisfont à la condition

$$u''_{pp}(p,C) \neq 0, \tag{2.1}$$

pour $p \in P$ et C fixé,

3) la dérivée $\psi'_u\,(u) \neq 0$ le long de chaque solution $u(p,C)$ définie pour $p \in P$,

3° les fonctions de la famille $x(p,C)$ sont définies par l'égalité

$$x(p,C) = a(p)\,\psi(u(p,C)) + b(p) \tag{2.6}$$

pour $p \in P$ et C fixé,

4° les fonctions de la famille $y(p,C)$ sont définies à l'aide de l'égalité (II), alors la famille de fonctions (III) est définie paramétriquement par les formules

$$\begin{aligned} x &= a(p)\,\psi(u(p,C)) + b(p), \\ y &= \{a(p)\,\psi(u(p,C)) + b(p)\}\,p - u(p,C) + K, \end{aligned} \tag{III.3}$$

où K une const. arbitraire et $p \in P$. L'équation différentielle de la famille (III.3) est une équation différentielle de la forme

$$y = x\,y' + \varphi(c(y')\,x + d(y')) + K, \tag{IV.}$$

où $\varphi(z) \equiv -\psi_{-1}(z)$, $z \equiv c(y')\,x + d(y')$, $c(y') \equiv 1/a(y')$, $d(y') \equiv -b(y')/a(y')$.

Ce corollaire résulte directement du th. II.I. Remarquons encore que l'équation (I.3) est non-linéaire. Si nous y posons $b(p) \equiv 0$, elle est une équation aux variables séparées — le coroll. II.1 se transforme au coroll. II.1 du travail [3]; si nous y posons $\psi(u) \equiv u$ nous obtenons de (I.3) l'équation linéaire et le coroll. II.1 se transforme au coroll. II.2 du travail [3].

De cela résulte, que profitant du th. II.1 on peut formuler beaucoup de corollaires particuliers dans lesquels l'équation (I.2) prend des formes spéciales comme p.e.: de l'équation de Riccati, d'Abel, de l'équation homogène et d'autres contenues dans la monographie [1]. Nous les donnons dans une autre note.

III. Familles de fonctions satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{\alpha(p)}{a(p)}\right)'_p \psi(u(p,C)) + \frac{\alpha(p)}{a(p)}\,\psi'_u(u(p,C))\,u'_p(p,C) \neq 0.$$

Dans le travail [4] on formule le problème analogue au problème I dans lequel l'équation (I) prend la forme

$$u' = \alpha(p)\,\psi(u) + b(p)\,u + c(p), \tag{I.4}$$

où les fonctions $\alpha(p), b(p)\ c(p)$ sont des fonctions continues et la fonction $\psi(u) \in C^1$. Ce problème était résolu au cas quand les fonctions $b(p)$ et $c(p) \in C$, la fonction $\alpha(p)$ a une forme spéciale (dépend de $b(p)$, v. th. I.1 du travail [4] ou th. I.2 du travail [3]). Nous donons ici la résolution du problème I.1 du travail [4] au cas où $\alpha(p)$ est une fonction de la classe C^1.

Théorème III.1 (résolution générale du problème I.1 du travail [4] avec une restriction $\alpha(p) \in C^1$)

Si les hypothèses suivantes sont remplies:

1° les fonctions: 1) $\alpha(p)$ est de la classe C^1, $\alpha(p) \neq 0$ pour $p \in P$,

2) $b(p)$ et $c(p)$ sont de la classe C pour $p \in P$,

3) $\psi(u)$ est de la classe C^1 pour $u \in U$,

2° 1) $u(p, C)$ est la famille de solutions de l'équation différentielle linéaire avec une perturbation en forme

$$u' = \alpha(p)\,\psi(u) + b(p)\,u + c(p), \tag{I.4}$$

2) les fonctions de la famille $u(p, C)$ satisfont à la condition

$$\left(\frac{\alpha(p)}{a(p)}\right)'_p \psi(u(p, C)) + \frac{\alpha(p)}{a(p)}\,\psi'_u(u(p, C))\,u'_p(p, C) \neq 0, \tag{3.1}$$

où la fonction $a(p)$ est de la forme

$$a(p) = -\exp \int b(p)\,dp, \tag{3.2}$$

$p \in P$ et C est fixé

3) la dérivée $\psi'_u(u) \neq 0$ le long de chaque solution $u(p, C)$ définie pour $p \in P$,

3° les fonctions de la famille $x(p, C)$ sont définies par l'égalité

$$x(p, C) = (\alpha(p)/a(p))\,\psi(u(p, C)) \tag{3.3}$$

pour $p \in P$ et C fixé,

4° les fonctions de la famille $y(p, C)$ sont définies à l'aide de l'identité (II), alors la famille de fonctions (III) est définie paramétriquement par les formules

$$\begin{aligned} x &= (\alpha(p)/a(p))\,\psi(u(p, C)), \\ y &= (\alpha(p)/a(p))\,\psi(u(p, C))\,p + u(p, C)\,f(p) + g(p), \end{aligned} \tag{III.4}$$

où $p \in P$ et les fonctions $f(p)$ et $g(p)$ sont de la forme (1.4).

L'équation différentielle de la famille (III.4) a la forme

$$y = xy' + \varphi(d(y')\,x)\,f(y') + g(y'), \tag{IV.4}$$

où $\varphi(z) \equiv \psi_{-1}(z)$ et $d(y') \equiv a(y')/\alpha(y')$.

Démonstration. Nous allons démontrer cette thèse en profitant du th. I.1. Remarquons que l'équation (I.4) peut être écrite en forme

$$u' = a(p)\,\frac{\alpha(p)}{a(p)}\,\psi(u) + b(p)\,u + c(p), \tag{I.4.1}$$

dans laquelle $a(p)$ est définie par la formule (3.2). Il est évident que cette fonction appartient à la classe C^1. L'équation (I.4.1) est donc du type (I.1). Remplaçons la fonction $\psi(p,u)$ dans le th. I. 1 par la fonction $\psi^*(p,u)$ et admettons cette notation dans le th. I. 1. Nous posons

$$\psi^*(p,u)=\frac{\alpha(p)}{a(p)}\,\psi(u(p,C)). \tag{3.4}$$

Il est évident qu'en vertu de 3° est vérifiée l'hypothèse 3° du th. I. 1. Dans la suite, en profitant des hypothèses 1°, 2° et 4° nous constatons que toutes les autres hypothèses, avec la fonction (3.4) du th. I.1 sont vérifiées. Appliquant la thèse du th. I. 1 nous obtenons la thèse du théorème.

Nous remarquons que ce théorème n'est pas un corollaire du th. II.1, car les fonctions $b(p)$ et $c(p)$ appartiennent à la classe plus large. Si les fonctions $b(p)$ et $c(p)$ appartiennent à la classe C^1, nous pouvons admettre

$$x(p,C)=\alpha(p)\,\psi(u)+b(p)\,u+c(p), \tag{3.5}$$

mais dans ce cas il ne peut pas en général résoudre effectivement l'équation (3.5) par rapport à u (à l'exception des quelques cas spéciaux). La méthode présentée est pour l'équation (I.4) meilleure. C'est pourquoi nous donons aussi le th. III.1.

L'autre corollaire du th. I.1 est le th. I.2 du travail [3], qui n'est pas un corollaire du th. II.1 de notre travail, mais c'est un corollaire du th. III.1.

Corollaire III.1 (théorème I.2 du travail [3])

Si les hypothèses suivantes sont remplies:

1° les fonctions: 1) $b(p)$ et $c(p)$ sont de la classe C pour $p\in P$,

2) $a(p)$ est de la forme (1.1),

3) $\psi(u)$ est de la classe C^1 pour $u\in U$,

2° 1) $u(p,C)$ est la famille de solutions de l'équation différentielle

$$u'=a(p)\,\psi(u)+b(p)\,u+c(p) \tag{I.5}$$

2) $u'_p(p,C)\neq 0$ pour $p\in P$ et C fixé,

3) la dérivée $\psi'_u(u)\neq 0$ le long de chaque solution $u(p,C)$ définie pour $p\in P$,

3° les fonctions de la famille $x(p,C)$ sont définies par l'égalité

$$x(p,C)=\psi(u(p,C)) \tag{3.6}$$

pour $p\in P$ et C fixé,

4° les fonctions de la famille $y(p,C)$ sont définies par l'identité (II), alors la famille de fonctions (III) est définie paramétriquement par les formules

$$x=\psi(u(p,C)),\quad y=\psi(u(p,C))\,p+u(p,C)\,f(p)+g(p), \tag{III.5}$$

définies pour $p\in P$, où les fonctions $f(p)$ et $g(p)$ sont de la forme (1.4). L'équation différentielle de la famille (III.5) a la forme

$$y=x\,y'+\varphi(x)\,f(y')+g(y'), \tag{IV.5}$$

où la fonction $\varphi(x)\equiv\psi_{-1}(x)$.

Démonstration. Le coroll. III.1 résulte du th. III.1, si nous posons dans l'équation (I.4) $\alpha(p) \equiv a(p)$ où $a(p)$ est définie par la formule (1.1).

Nous remarquons que profitant du th. III.1 on peut aussi formuler les autres corollaires particuliers aux cas dans lequels l'équation (I.4) prend des formes spéciales. Nous les donons dans un autre article. À la fin nous remarquons aussi que l'introduction de l'équation (I.1) permet de généraliser presque tous les résultats concernant la désignation des équations différentielles implicites, obtenus dans les travaux [2], [3] et [4]. Les théorèmes et les corollaires obtenus ont le caractère local, mais on peut remarquer que le coroll. III.1 possède aussi le caractère global.

LITTERATURE

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I, Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Leipzig 1959.

[2] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy. I. Une généralisation des équations différentielles de Clairaut et de d'Alembert transformée aux équations des types connus*, Publ. Inst. Math. Beograd Nouvelle série, T 12. (26), 1971, pp. 51—61.

[3] A. Kapcia. *Les familles de fonctions conduisant aux équations différentielles implicites par rapport à la dérivée*, Publ. Inst. Math. Beograd. Nouvelle série, T. 13 (27), 1972, pp. 43—49.

[4] A. Kapcia, *Sur une généralisation des équations différentielles de Clairaut et de d'Alembert et sur ses solutions paramétriques*, Ann. Soc. Pol. Math. Commentationes Mathematicae, Warszawa, T. XVII. 2, 1974, pp. 399—410.

[5] D. S. Mitrinović, *Istraživania o jednoj važnoj differencijalnoj jednačini prvoga reda*, Beograd 1935.

[6] D. S. Mitrinović, *Nouveaux cas d'intégrabilité d'une équation différentielle du premier ordre*, Acad. Royale Serbe, Bull. Acad. Sc. math. nat. (A) 1, (1933), pp. 107—117.

A. Kapcia
Institut Mathématique
L'École Polytechnique, Częstochowa, Pologne.