PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 15 (29). 145—150

EINIGE LÖSUNGEN DER STRÖMUNGSGLEICHUNGEN DER ZÄHEN FLÜSSIGKEIT

Zum 70-en Geburtstag von Professor Dr. Konstantin P. Voronjec gewidmet.

Mane T. Šašić

(Dargestellt am 6. Juni 1972)

Es ist wohl bekannt, dass die Energie der Flüssigkeit bei stationärer Potentialströmung im ganzen Flüssigkeitsraum unveränderlich bleibt. Bei der Betrachtung einer ebenen inkompressiblen Potentialströmung reduziert sich das Problem auf die Lösung folgender Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{1}$$

welche zeigen, dass $u-iv=\overline{V}(z)$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z=x+iy$ ist. Die Behandlung von Problemen dieser Art ist auch bekannt.

Jedoch, wenn man eine ebene stationäre Strömung zäher Flüssigkeit oder einer Wirbelströmung reibungsfreier Flüssigkeit betrachtet, dann ist der Wirbel $2\omega\neq 0$, die zweite Gleichung des Systems (1) besteht nicht mehr, und daher ist, unter gewissen Bedingungen, die hier als erfüllt anzusehen sind,

$$u-iv=\overline{V}(z, \overline{z}) \tag{2}$$

eine nicht-analytische Funktion der Veränderlichen $z=x+iy$ und $\overline{z}=x-iy$. Abgesehen davon, welche Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit behandelt wird, besteht die erste Gleichung des Systems (1), die durch Einführen der Stromfunktion $\psi=\psi(x, y)$, vermittels der Beziehungen

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{3}$$

befriedigt wird. Die Stromfunktion kann man als $\psi=\psi(z, \overline{z})$ betrachten, wobei der Ausdruck (2) kann unter der Anwendung der Gleichungen (3) in folgender Form geschrieben werden:

$$\overline{V}(z, \overline{z})=2i\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{oder} \quad -i\overline{V}(z, \overline{z})=2\frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{4}$$

Es ist verständlich, dass neben der ersten Gleichung des Systems (1) auch die entsprechende Bewegungsleichungen erfüllt werden müssen. Bei der Strömung einer zähen Flüssigkeit sind diese Gleichungen die für die x-und y-Achse aufgestellten Navier-Stokesschen Gleichungen (u und v sind die entsprechenden Projektionen der Geschwindigkeit $\vec{V}$, p ist der Druck, ρ die Dichte und ν die kinematische Zähigkeit). Die vermittels der Veränderlichen z und $\bar{z}$ geschriebene Kompatibilitätsbedingung dieser Gleichungen lautet:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial^3 \psi}{\partial z\,\partial \bar{z}^2}-\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2\,\partial \bar{z}}+2i\nu\frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2\,\partial \bar{z}^2}=0. \tag{5}$$

Die Analyse der Gleichung (5) ist ebenso schwierig wie die Behandlung der entsprechenden, vermittels der Veränderlichen x und y geschriebenen Gleichung (für welche Hamel, Oseen, Rosenblatt, Berker, Jeffery, Riabouchinsky u.a. die Lösungen gefunden haben), aber die Gleichung (5) ermöglicht die Anwendung einer Klasse von nicht-analytischen komplexen Funktionen, deren „Abweichung" von der Analytizität von A. Bilimović [1] definiert wurde. Physikalische Deutung dieser Abweichung erfolgte durch K. Voronjec [2]. S. Fempl [3] hat die „Abweichung höherer Ordnung" definiert, welche in der Arbeit [4] für die Erhaltung einer Klasse von Lösungen der Gleichung (5) verwendet worden ist. An dieser Stelle wird das für die Berechnung dieser Lösungen entwickelte Verfahren nicht dargelegt, sondern nur angegeben und zwar wegen der in dieser Arbeit gegebenen Analyse und der graphischen Darstellung. Diese Lösung lautet:

$$\psi=\frac{C_1}{(N-1)^2(N-2)^2}(z-z_0)^{N-1}(\bar{z}-\bar{z}_0)^{N-1}+C_2(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)+ \\ +C_3\ln[(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)]-i\nu(N-2)\ln\frac{z-z_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}, \tag{6}$$

wobei C_1, C_2, C_3 die reellen Konstanten sind und $N=3, 4, 5, \ldots$ die Ordnung der Abweichung der Funktion (4) von der Analytizität bedeutet. Die Lösung (6) ist für $N=1$ ungültig, da in diesem Falle die Strömung potential ist, ebenso nie für $N=2$, wenn der Wirbel $2\omega=\text{const.}$ in gesamten Strömungsraum ist. Jeffery hat auch, von der Voraussetzung ausgehend dass der Wirbel nur von dem Abstand r abhängig ist, eine ähnliche Lösung erhalten (z. B. R. Berker [5]). Während die Konstante B, welche bei Jeffery erscheint, eine rein mathematische Deutung hat, kann man die Grösse N in der Lösung (6) als „Ordnung der Abweichung" des Geschwindigkeitsfeldes der reellen Flüssigkeit vom Laplaceschen Feld, welches der Potentialströmung der inkompressiblen Flüssigkeit entspricht, bezeichnen. Soll man bemerken, dass die Gleichung (5) auch mit der Lösung (6), und zwar für beliebige reelle Werte der Zahl N erfüllt wird. In diesem Falle aber ist N eine Konstante, die nicht als „Ordnung der Abweichung" der Funktion (4) von der Analytizität gedeutet werden konnte. Eigentlich sind die Lösungen für $N<0$ physikalisch mehr gerechtfertigt, weil die Geschwindigkeit und der Wirbel mit der Entfernung vom Punkt z_0 abnehmen. Die Quelle für $N<0$ verwandelt sich in eine Senke.

Für die weitere Analyse der Lösung (6) wird der Koordinatenursprung in den Punkt z_0 verschoben, wobei man die Polarkoordinaten r und θ einführt und $2C_3=-\Gamma/2\pi$ einsetzt, weil das dritte Glied der Lösung (6) einen Potentialwirbel darstellen soll. Ausserdem wegen der Gleichförmigkeit des Druckes man nimmt $C_2=0$ an und C_1 aus folgenden Bedingungen bestimmt: $v_\theta = 1$ cm/s für $r=1$ cm. In diesem Falle erhält man:

$$\psi = \frac{\Gamma - 2}{4\pi(N-1)} r^{2N-1} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + 2\nu(N-2)\theta,$$

$$v_r = \frac{2\nu(N-2)}{r}, \quad v_\theta = -\frac{\Gamma - 2\pi}{2\pi} r^{2N-3} + \frac{\Gamma}{2\pi r}, \tag{7}$$

$$2\omega = -\frac{(\Gamma - 2\pi)(N-1)}{\pi} r^{2N-4}.$$

Es ist bemerkenswert, dass $2\omega=0$ für $\Gamma=2\pi$ ist. Die Stromfunktion ψ definiert dann die Stromlinien der Potentialtrömung, während für $\Gamma \neq 2\pi$ (in unserem Fall $\Gamma=-2\pi$) eine Wirbelströmung existiert. Die Geschwindigkeit v_θ verschwindet auf dem Kreise mit dem Halbmesser $r^{2N-2} = \dfrac{\Gamma}{\Gamma - 2\pi}$, woraus ersichtlich ist, dass $r \to 1$, wenn $N \to \infty$. Da N eine ganzzahlige positive und begrenzte Konstante ist, so ist immer $r<1$, wobei sein Wert hängt bei derselben Zirkulation von N ab. Beim angegebenen Beispiel sind $r=0{,}84$ cm für $N=3$ und $r=0{,}89$ cm für $N=4$. Es kommen nämlich zwei Strömungsgebiete vor, in welchen die Geschwindigkeit v_θ verschiedene Richtungen besitzt. Sie verursacht, dass die Spiralen der Wirbelströmung sich immer mehr von den Spiralen der Potentialströmung für $r>0{,}84$ cm und $r>0{,}89$ cm entfernen, wenn r und N wachsen. Für $r<0{,}84$ cm und $r<0{,}89$ cm erhält man einen umgekehrten Fall. Der Verlauf der Stromlinien ist auf der Abb. 1 ersichtlich und zwar für $\Gamma=-2\pi$

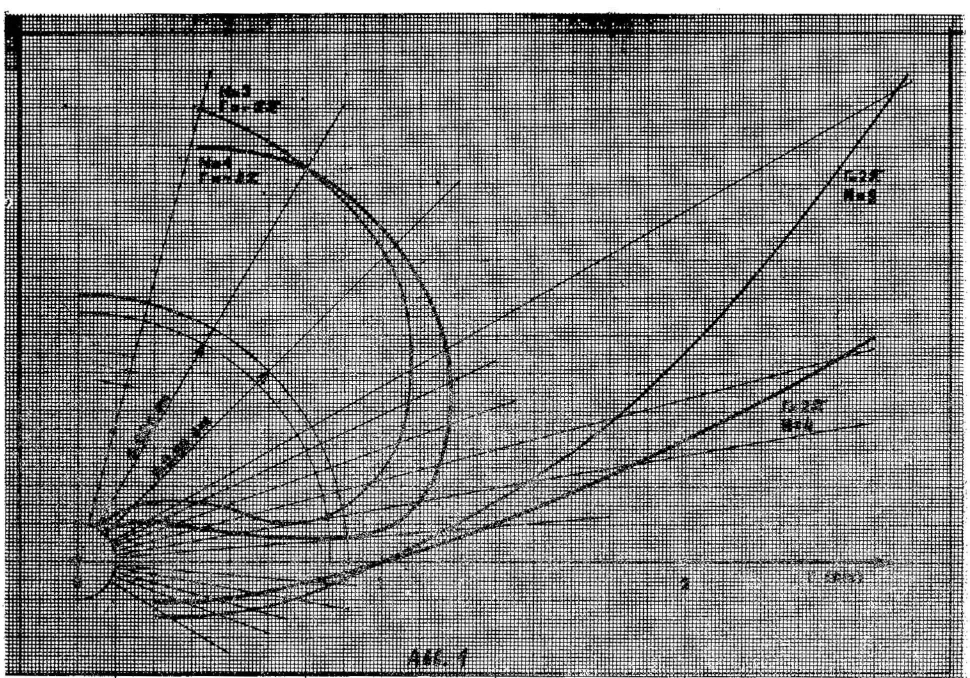

Abb. 1

(Wirbelströmung) und $\nu = 1\,\text{cm}^2/s$ bei $N=3$ und $N=4$ und für $\Gamma = 2\pi$ (Potentialströmung) bei denselben Werte von N. Auf der Abb. 1 sind eigentlich je zwei Stromlinien von den entsprechenden Strömungen übereinander gezeichnet.

Dieselbe Methode ist in der Arbeit [6] für die Lösung der Oseenschen Gleichungen verwendet worden. Die gewonnene Lösung erhält man in der Form eines Polynoms nach $\bar{z}$, wobei die Koefficienten stellen die Polynome nach z dar. Die Ordnung dieser Polynome hängt vom der „Ordnung der Abweichung" der komplexen Geschwindigkeit (4) von der Analytizität ab, wobei sie höchtens von der (N-2) ten Ordnung sein können. Die Lösung der Oseenschen Gleichungen enthält für $N>3$ die bekannte Stokessche Lösung:

$$\psi(z,\bar{z}) = z f_1(\bar{z}) + \bar{z} F_1(z) + f_2(\bar{z}) + F_2(z).$$

Daraus folgt, dass man im Oseenschen Falle die vor dieser Lösung sich befindenden Glieder als korektive die Stokessche Lösung verbessernden Glieder, betrachten könnte.

Für den Fall ebener stationären Strömung einer kompressiblen Flüssiggkeit, die zu den Veränderlichen z und $\bar{z}$ transformierte Kompatibilitätsbedingung der Bewegungsgleichungen

$$u\frac{\partial 2\omega}{\partial x} + v\frac{\partial 2\omega}{\partial y} = \nu\,\Delta\, 2\omega - 2\omega \operatorname{div}\vec{V} \tag{8}$$

ist viel komplizierter als die Bedingung (5), so dass es vorläufig schwer ist von einer allgemeinen Lösung der Form (6) zu sprechen. Man stösst auch für den Fall der Potentialströmung auf grosse mathematische Schwierigkeiten, obwohl die Bedingung (8) automatisch erfüllt ist. Deswegen werden wir in dieser Arbeit einige Speziallösungen aufsuchen. Für die Potentialströmung einer kompressiblen Flüssigkeit nämlich stellt die komplexe Geschwindigkeit

$$-i\,\bar{V}(z,\bar{z}) = 2\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2i\,\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{9}$$

eine nicht-analytische Funktion dar und man kann für sie eine N-te Abweichung von der Analytizität bilden:

$$B_N = 2^{N+1}\frac{\partial^{N+1}\varphi}{\partial z\,\partial\bar{z}^N} = 2^{N+1}\frac{\partial^{N+1}}{\partial\bar{z}^N}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right).$$

Aus dem Ausdruck für die „erste Abweichung" $B_1 = -i \operatorname{div}\vec{V}$ ersieht man, dass immer für die kompressible Flüssigkeit $B_1 \neq 0$, weil $\operatorname{div}\vec{V} \neq 0$ ist. Wenn B_1 eine analytische Funktion darstellt, lautet die „zweite Abweichung"

$$B_2 = \frac{\partial \operatorname{div}\vec{V}}{\partial x} + i\frac{\partial \operatorname{div}\vec{V}}{\partial y} = 0,$$

woraus folgt $\operatorname{div}\vec{V} = \text{const.} = \Delta\varphi$. Es ist bekannt, dass sich diese Differentialgleichung durch Einführung von $\varphi = \varphi_1 + \frac{K}{4}(x^2+y^2)$ auf die Laplacesche Gleichung $\Delta\varphi_1 = 0$ zurückführen lässt. Im Falle dieser Klasse der Potentialströmung kann also jede harmonische Funktion φ_1 zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes der kompressiblen Flüssigkeit der Potentialströmung verwendet werden. Wenn man z.B. als φ_1 das Potential eines isolierten Wirbels annimmt, so wird dann die Stromfunktion ψ durch die Integration der Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{K}{2} \frac{\rho}{\rho_0} r^2,$$

gewonnen wobei das Ergebnis der Integration lautet:

$$\psi = \frac{K}{2} \frac{\rho}{\rho_0} r^2 \theta + F(r),$$

$$F'(r) = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\Gamma}{2\pi r} - \frac{d}{dr}\left(\frac{K}{2} \frac{\rho}{\rho_0} r^2\right) \theta.$$

Es ist offenbar, dass

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{K}{2} \frac{\rho}{\rho_0} r^2\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\text{Const.}}{r^2} = \frac{C}{r^2}$$

sein muss, was in der „Übereinstimmung mit dem folgenden Ausdruck für den Quadrat der Geschwindigkeit

$$V^2 = \frac{\Gamma^2 + K^2 \pi^2 r^4}{4\pi^2 r^2} = \text{funct.}\ (r)$$

ist, weil $\frac{\rho}{\rho_0} = f(V^2)$. Der endgültige Ausdruck für die Stromfunktion lautet:

$$\psi = \frac{K}{2} \frac{\rho}{\rho_0} r^2 \theta - \frac{C\Gamma}{4\pi r^2}.$$

Die Geschwindigkeitsprojektionen sind durch die Ausdrücke

$$v_r = \frac{K}{2} r, \quad v_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r},$$

bestimmt. Es ist offenbar, dass sich hier um eine Spiralströmung handelt, wobei sie für kleine r praktisch kreisförmig, bzw. beinahe radial für grosse Werte von r ist. Wenn B_2 eine analytische Funktion darstellt, dann ist die „dritte Abweichung"

$$B_3 = \frac{\partial^2 \operatorname{div} \vec{V}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \operatorname{div} \vec{V}}{\partial y^2} + 2i \frac{\partial^2 \operatorname{div} \vec{V}}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

woraus folgt $\operatorname{div} \vec{V} = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) = \Delta \varphi$, wobei k eine Konstante ist.

Man kann diese Gleichung auf die Laplacesche Gleichung $\Delta \varphi_1 = 0$ reduzieren wenn man

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{k}{24}(x^4 + y^4)$$

einsetzt. Durch eine günstige Auswahl der harmonischen Funktion φ_1, kann man auch in diesem Falle, eine Reihe von Lösungen für das Geschwindigkeitsfeld dieser Potentialströmungklasse der kompressiblen Flüssigkeit gewinnen.

LITERATUR

[1] A. Bilimovitch, *Sur la mesure de déflexion d'une fonction nonanalytique par rapport à une fonction analytique*, C. R. Acad. des Sci. t. 237, p 694-695 (1953).

[2] K. Voronjec, *Odstupanje brzinskog polja nekog strujanja od Laplace-ovog polja*, Iz Zbornika radova Maš. inst. SANU, t, LX, knj. 8, 1959.

[3] S. Fempl, *Areolarni polinomi kao klasa neanalitičkih funkcija čiji su realni i imaginarni delovi poliharmonijske funkcije*, Mat. vesnik, 1 (16), Beograd 1964.

]4] K. Voronjec, M. Šašić, *Sur quelques applications des fonctions non analytiques dans le mouvement plan d'un fluide incompressible*, Pub. Inst. Math. t. 7 (21), Beograd 1967.

[5] R. Berker, *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik, Band $VIII_2$ (1963).

[6] M. Šašić, *O jednoj metodi za rešavanje Oseen-ovih jednačina*. Mat. vesnik, 4 (19), sveska 1, Beograd 1967.