PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 15 (29), 1973, pp. 133—143

# ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Й. М. Стоянов* *Д. Д. Байнов*

(Поступила 2. сентября 1972)

**Введение.**

Немного лет прошло с появления первых работ, в которых метод усреднения применялся для исследования систем интегро-дифференциальных уравнений. Это были работы А. Н. Филатова [4] — [7]. Этому методу применительно к интегро-дифференциальным уравнениям уже посвящено большое количество работ (подробную библиографию см. в [7]). В недавной обзорной статье [3] Ю. А. Митропольский и А. Н. Филатов подводят итоги достигнутых в этом направлении успехов, а в заключение указывают на некоторые важные нерешенные до сих пор задачи. Там мы читаем: „Важной проблемой является развитие и обоснование схем усреднения для стохастических интегро-дифференциальных уравнений“. Именно этой проблеме посвящена настоящая работа.

Отметим, что методу усреднения для обыкновенных стохастических систем посвящено некоторое количество работ. С важнейшими идеями, результатами и библиографией можно познакомиться по обзорной статье Ю. А. Митропольского и В. Г. Коломийца [2].

В § 1 мы даем необходимые определения и вводим рассматриваемый нами класс стохастических интегро-дифференциальных уравнений (сокращено СИДУ), для которых в духе уже установившейся традиции можно говорить, что это системы, возмущаемые „белым гауссовским шумом“. При некоторых условиях доказывается теорема 1 о существовании и единственности решения системы. Это решение оказывается непрерывным марковским случайным процессом.

Вопросам существования и единственности решений стохастических уравнений посвящена монография И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [1], но мы здесь останавливаемся на этих вопросах, лишь потому, что класс СИДУ, насколько нам известно, в литературе не обсуждался.

В § 2 и § 3 рассматриваются системы СИДУ, правая часть которых пропорциональна малому параметру $\varepsilon$ (ето т.н. системы в „стандартной форме“). Излагается одна схема усреднения и исходной системе СИДУ ставятся в соответствие другие системы обыкновенных стохастических или детерминированных уравнений. Основные результаты работы — это теорема 2 и теорема 3 о близости решений исходной и соответствующих усредненных систем.

§ 1. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задан $n$ — мерный стандартный винеровский процесс $w(t)$, $t \in [0, T]$. Заданы также $n$ — мерная вектор-функция $a(t, x, y)$, квадратная матрица $\sigma(t, x, y)$ порядка $n \times n$ и $m$ — мерные вектор-функции $\varphi(t, s, x)$, $\psi(t, s, x)$, причем $t, s \in [0, T]$, $x \in R_n$, $y \in R_m$. Для векторов будем рассматривать обычную евклидову норму, а норму матрицы $\sigma = (\sigma_{ij})$ определим следующим образом $\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |\sigma_{ij}|^2$. $T > 0$ — любое сколь угодно большое число.

Пусть выполнены следующие предположения:

I. Функции $a(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$, $\psi(t, s, x)$ и матрица $\sigma(t, x, y)$ измеримы по совокупности своих переменных и непрерывны соответствено по $t$ и по $(t, s)$, а матрица $\sigma$ равномерно невырождена.

II. $a(t, x, y)$, $\sigma(t, x, y)$ и $\varphi(t, s, x)$, $\psi(t, s, x)$ удовлетворяют следующим условиям Липшица: для $x'$, $x'' \in R_n$, $y'$, $y'' \in R_m$

$$|a(t, x', y') - a(t, x'', y'')| + \|\sigma(t, x', y') - \sigma(t, x'', y'')\| \leqslant K(|x' - x''| + |y' - y''|)$$

$$|\varphi(t, s, x') - \varphi(t, s, x'')| + |\psi(t, s, x') - \psi(t, s, x'')| \leqslant \mu(t, s)|x' - x''|$$

III. $|a(t, x, y)| + \|\sigma(t, x, y)\| \leqslant K(1 + |x| + |y|)$

$$|\varphi(t, s, x)| + |\psi(t, s, x)| \leqslant K(1 + |x|)$$

В этих условиях $K = \mathrm{const}$, а $\mu(t, s)$ — положительная функция, для которой существует $\int_0^t \mu(t, s)\, ds = \mu_0(t)$, для каждого $t \in [0, T]$, причем $\mu_0(t)$— интегрируемая на $[0, T]$ функция.

Как следует из результатов [1], условия I—III достаточны для существования стохастических интегралов

$$\int_0^t \sigma(s, x, y)\, dw(s) \quad \text{и} \quad \int_0^t \sigma\Big(s, x, \int_0^s \psi(s, \tau, x)\, d\tau\Big)\, dw(s)$$

по винеровскому процессу $w(s)$, $s \in [0, T]$ для любых $x \in R_n$, $y \in R_m$.

Рассмотрим следующее стохастическое интегро-дифференциальное уравнение (СИДУ)

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a\Big(s, x(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x(\tau))\, d\tau\Big)\, ds + \int_0^t \sigma\Big(s, x(s), \int_0^s \psi(s, \tau, x(\tau))\, d\tau\Big)\, dw(s) \tag{1}$$

где $x_0$ — случайная величина с[1] $\mathbf{E}\{|x_0|^2\} < \infty$, $t \in [0, T]$. Вместо (1) мы будем употреблять также его запись в виде стохастического дифференциала

$$dx(t) = a\Big(t, x(t), \int_0^t \varphi(t, \tau, x(\tau))\, d\tau\Big)\, dt + \sigma\Big(t, x(t), \int_0^t \psi(t, \tau, x(\tau))\, d\tau\Big)\, dw(t) \tag{1'}$$

указывая каждый раз начальное условие, здесь $x(0) = x_0$.

[1]) $\mathbf{E}$ — математическое ожидание по мере $\mathbf{P}$

Для системы СИДУ (1) представляют интерес вопросы существования, единственности и свойств решения.

Через $\mathcal{F}_w^t$ обозначим $\sigma$-алгебру, порожденной винеровским процессом $w$ на интервале времени $[0, t]$.

Теорема. 1. *При сделанных выше предположениях*

*а) существует решение* $x(t)$, $t \in [0, T]$, *являющееся $n$—мерным случайным процессом, измеримым при каждом $t$ относительно $\sigma$—алгебры* $\mathcal{F}_w^t$

*б) решение* $x(t)$ *единственно;*

*в)* $x(t)$ *непрерывно с вероятностью 1;*

*г)* $\sup\limits_t \mathbf{E}\{|x(t)|^2\} < \infty$;

*д)* $x(t)$ *является марковским процессом.*

Доказательство. Через $B_2[0, T]$ обозначим множество $n$—мерных случайных процессов $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ непрерывных с вероятностью 1, таких, что при каждом $t$ $\xi(t)$ является $\mathcal{F}_w^t$ измеримым и

$$\sup_t \mathbf{E}\{|\xi(t)|^2 \leqslant C < \infty, \quad C = \text{const}.$$

Пусть $\xi_1 = \{\xi_1(t), t \in [0, T]\}$ и $\xi_2 = \{\xi_2(t), t \in [0, T]\}$ — любые элементы из $B_2[0, T]$. Тогда расстояние между $\xi_1$ и $\xi_2$ определим по формуле

$$r(\xi_1, \xi_2) = \left(\sup_t \mathbf{E}\{|\xi_1(t) - \xi_2(t)|^2\}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Легко проверить, что $r(\xi_1, \xi_2)$ является метрикой в $B_2[0, T]$. Следовательно $B_2[0, T]$ превращается в банахово пространство.

На пространстве $B_2[0, T]$ определим оператор $S$ следующим образом

$$S\xi(t) = x_0 + \int_0^t a\left(s, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau))\, d\tau\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, \xi(s), \int_0^s \psi(s, \tau, \xi(\tau))\, d\tau\right) dw(s)$$

и обозначим $S\xi(t) = \eta(t)$.

Нетрудно видеть, что $\eta(t)$ имеет непрерывные с вероятностью 1 траектории и для каждого $t$ $\eta(t)$ является $\mathcal{F}_w^t$ — измеримым. Из условий I — III и свойств стохастических интегралов получаем

1) $\mathbf{E}\{|\eta(t)|^2\} \leqslant C_1 = \text{const}$;

2) оператор $S$ непрерывен в $B_2[0, T]$ относительно метрики $r$;

3) некоторая степень оператора $S$ является сжимающим оператором.

Следовательно оператор $S$ отображает пространство $B_2[0, T]$ в себя и уравнение $Sx(t) = x(t)$ имеет, притом единственное решение. Это доказывает пункты а) — г) теоремы 1, а пункт д) доказывается аналогично теореме 1 на стр. 66 в [1].

Замечание 1. Вместо II можно потребовать выполнения более слабого условия, а именно, локальное условие Липшица

**II′.** $|a(t, x' y') - a(t, x'', y'')| + ||\sigma(t, x', y') - \sigma(t, x'', y'')|| \leqslant K_{M,N}(|x' - x''| + |y' - y''|)$, где $|x'| \leqslant M$, $|x''| \leqslant M$, $|y'| \leqslant N$, $|y''| \leqslant N$, $M$ и $N$ — константы, $K_{M,N}$ — константа, быть может зависящая от $M$ и $N$.

Тогда в предположениях I, II′ и III остается в силу все, сказанное до этого места.

Замечание 2. Если матрица $\sigma(t, x, y)$ удовлетворяет условиям I, II и III и является равномерно невырожденной, т.е. $det\, \sigma\sigma' \geqslant c > 0$, где $\sigma'$ — матрица, транспонированная к матрице $\sigma$, $c = \text{const}$, тогда решение $x(t)$, $t \in [0, T]$ системы СИДУ (1) является $n$ — мерным диффузионным процессом (в смысле А. Н. Колмогорова) с вектором переноса $a$ и матрицей диффузии $\frac{1}{2}\sigma\sigma'$.

§ 2. Рассмотрим систему СИДУ, правая часть которой пропорциональна малому параметру $\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$ — фиксированное число. Поскольку решение этой системы будет зависеть от $\varepsilon$, обозначим его через $x_\varepsilon(t)$, т.е.

$$\begin{aligned} dx_\varepsilon(t) = {} & \varepsilon\, a\left(t, x_\varepsilon(t), \int_0^t \varphi(t, \tau, x_\varepsilon(\tau))\, d\tau\right) dt + \\ & \varepsilon\sigma\left(t, x_\varepsilon(t), \int_0^t \psi(t, \tau, x_\varepsilon(\tau))\, d\tau\right) dw(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Эта система решается при начальном условии $x_\varepsilon(0) = x_0$ для всех $\varepsilon$. Здесь функции $a$, $\varphi$, $\psi$ и матрица $\sigma$ определены как в § 1. Нам будет необходимо еще одно условие на функцию $\mu(t, s)$. Обозначим $\int_0^t \mu^2(t, s)\, ds = \lambda(t)$. Мы требуем, чтобы функция $\lambda(t)$ расла строго медленнее линейной функции при $t \to \infty$, т.е.

$$\lambda(t) \leqslant c_1 t^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad c_1 = \text{const} \tag{3}$$

В зависимости от свойств функций $a(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$, $\psi(t, s, x)$ и матрицы $\sigma(t, x, y)$ мы можем рассмотреть различные схемы усреднения и для каждой из них — вопрос о близости (в определенном смысле) решений исходной и усредненной системы.

Замечание 3. С самого начала мы могли рассмотреть систему СИДУ функция $a(\cdot)$ и матрица $\sigma(\cdot)$ которой явно зависят от $\varepsilon$. Но в этом случае существуют методы приведения ее к виду (2). Следуя уже принятой традиции мы будем называть (2) системой СИДУ в „стандартной форме".

Теперь мы изложим одну схему усреднения системы (2).

Пусть существуют векторы $\varphi_1(t, x)$ и $\psi_1(t, x)$ такие, что

$$\int_0^t \varphi(t, \tau, x)\, d\tau = \varphi_1(t, x), \int_0^t \psi(t, \tau, x)\, d\tau = \psi_1(t, x) \tag{4}$$

т.е. мы вычислили эти два интеграла по явно входящему переменному $\tau$, считая $t$ и $x$ параметрами.

Тогда получаем вспомагательную систему

$$dy_\varepsilon(t) = \varepsilon\, a\left(t, y_\varepsilon(t), \varphi_1(t, y_\varepsilon(t))\right) dt + \varepsilon\sigma\left(t, y_\varepsilon(t), \psi_1(t, y_\varepsilon(t))\right) dw(t) \tag{5}$$

с тем же начальным условием, что и система (2).

Пусть существуют $n$ — мерный вектор $\bar{a}(y)$ и квадратная матрица $\bar{\sigma}(y)$ порядка $n \times n$ такие, что

$$(6) \qquad \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau a(t, y, \varphi_1(t, y))\, dt = \bar{a}(y), \quad \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sigma(t, y, \psi_1(t, y))\, dt = \bar{\sigma}(y)$$

и оба предела выполняются равномерно по $y$.

Тогда окончательно системе СИДУ (2) сопоставим следующую систему

$$(7) \qquad dz_\varepsilon(t) = \varepsilon\, \bar{a}(z_\varepsilon(t))\, dt + \varepsilon\, \bar{\sigma}(z_\varepsilon(t))\, dw(t), \quad z_\varepsilon(0) = x_0$$

Будет естественно назвать (7) усредненной системой для исходной системы СИДУ (2).

Замечание 4. Так как функции $a$, $\varphi$, $\psi$ и матрица $\sigma$ определены как в § 1, то из условий I — III и условия (6) нетрудно вывести, что для следующих пар $(a(t, y, \varphi_1(t, y)),\ \sigma(t, y, \psi_1(t, y)))$ и $(\bar{a}(y), \bar{\sigma}(y))$ снова выполнены условия I — III. Тогда согласно теореме 1 решения систем (5) и (7) существуют и единственны.

Сравнивая системы (2), (5) и (7) нетрудно видеть что идея метода усреднения состоит в том, чтобы аппроксимировать решение сложной и громозкой системы СИДУ (2) решением другой, более простой системы (7). При этом мы можем поступить двумя способами, либо доказать сначала, что решение $z_\varepsilon(t)$ системы (7) близко к решению $y_\varepsilon(t)$ системы (5), а $y_\varepsilon(t)$ близко к решению $x_\varepsilon(t)$ исходной системы (2), откуда будет следовать близость $x_\varepsilon(t)$ и $z_\varepsilon(t)$, либо прямо доказать, что $x_\varepsilon(t)$ и $z_\varepsilon(t)$ близки.

В этой работе мы будем интересоваться близостью случайных процессов $x_\varepsilon(t)$ и $z_\varepsilon(t)$ в среднем квадратическом смысле.

Теорема. 2. *Для любых чисел* $\delta > 0$ *и* $L > 0$ *существует число* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta, L)$, $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ *будет выполняться неравенство*

$$(8) \qquad \sup_t \mathbf{E}\{|x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)|^2\} < \delta$$

*где* sup *берется по* $t$ *из интервала* $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$.

Доказательство. Из (2) и (7) для разности $x_\varepsilon(t)$ — $z_\varepsilon(t)$ получаем

$$x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t) = \varepsilon I_1(t) + \varepsilon I_2(t),$$

где

$$I_1(t) = \int_0^t \Delta_1(s)\, ds, \quad I_2(t) = \int_0^t \Delta_2(s)\, dw(s),$$

$$\Delta_1(s) = a\left(s, x_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x_\varepsilon(\tau))\, d\tau\right) - \bar{a}(z_\varepsilon(s))$$

$$\Delta_2(s) = \sigma\left(s, x_\varepsilon(s), \int_0^s \psi(s, \tau, x_\varepsilon(\tau))\, d\tau\right) - \bar{\sigma}(z_\varepsilon(s)).$$

Тогда

$$|x_\varepsilon(t)-z_\varepsilon(t)|^2 \leqslant 2\varepsilon^2 |I_1(t)|^2 + 2\varepsilon^2 |I_2(t)|^2$$

С другой стороны

$$\mathbf{E}\{|I_1(t)|^2\} \leqslant \int_0^t \mathbf{E}\{|\Delta_1(s)|^2\} ds,$$

а из свойств стохастических интегралов [1] вытекает

$$\mathbf{E}\{|I_2(t)|^2\} = \int_0^t \mathbf{E}\{|\Delta_2(s)|^2\} ds.$$

Теперь ясно, что нужно сначала оценить $\mathbf{E}\{|\Delta_1(s)|^2\}$ и $\mathbf{E}\{|\Delta_2(s)|^2\}$. Нам будет удобно представеть $\Delta_1(s)$ в виде

$$\Delta_1(s) = \Delta_{11}(s) + \Delta_{12}(s) + \Delta_{13}(s, z_\varepsilon(s)),$$

где

$$\Delta_{11}(s) = a\Big(s, x_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x_\varepsilon(\tau))\, d\tau\Big) - a\Big(s, z_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, z_\varepsilon(\tau))\, d\tau\Big)$$

$$\Delta_{12}(s) = a\Big(s, z_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, z_\varepsilon(\tau))\, d\tau\Big) - a\Big(s, z_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, z_\varepsilon(s))\, d\tau\Big)$$

$$\Delta_{13}(s, z_\varepsilon(s)) = a\Big(s, z_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, z_\varepsilon(s))\, d\tau\Big) - \overline{a}(z_\varepsilon(s))$$

Оценим в отдельности каждое из этих слагаемых.

Из условия II § 1 вытекает

$$|\Delta_{11}(s)|^2 \leqslant 2K^2 \Big\{|x_\varepsilon(s) - z_\varepsilon(s)|^2 + \int_0^s \mu^2(s, \tau)\, |x_\varepsilon(\tau) - z_\varepsilon(\tau)|^2 d\tau\Big\}$$

Нетрудно видеть, что $\rho_\varepsilon(t) = \mathbf{E}\{|x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)|^2\}$ есть неотрицательная, непрерывная и интегрируемая на любом конечном интервале функция. Тогда

$$\mathbf{E}\Big\{\int_0^t |\Delta_{11}(s)|^2 ds\Big\} \leqslant 2K^2 \int_0^t \Big[\rho_\varepsilon(s) + \int_0^s \mu^2(s, \tau)\, \rho_\varepsilon(\tau)\, d\tau\Big] ds$$

Поскольку для решения $z_\varepsilon(t)$ системы (7) $\sup\limits_t \mathbf{E}\{|z_\varepsilon(t)|^2\} < \infty$, то существует константа $C_2$ такая, что $\mathbf{E}\{|z_\varepsilon(t)|^2\} \leqslant C_2$ для всех $t \in [0, T]$. Тогда

$$|\Delta_{12}(s)|^2 \leqslant 2K^2 \Big\{\int_0^s \mu^2(s, \tau)\, |z_\varepsilon(\tau) - z_\varepsilon(s)|^2 d\tau$$

откуда

$$\mathbf{E}\Big\{\int_0^t |\Delta_{12}(s)|^2 ds\Big\} \leqslant 2K^2 C_2 \int_0^t \Big(\int_0^s \mu^2(s, \tau)\, d\tau\Big) ds$$

Остается оценить слагаемое $\Delta_{13}(s, z_\varepsilon(s))$. Так как функция $a(t, x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по $x$ и $y$ (условие II § 1), а функция $\bar{a}(y)$ — условию Липшица по $y$ (замечание 4), то легко показать, что функция

$$\Delta_{13}(s, z) = a\left(s, z, \int_0^s \varphi(s, \tau, z)\, d\tau\right) - \bar{a}(z)$$

удовлетворяет следующему условию Липшица

$$|\Delta_{13}(s, z') - \Delta_{13}(s, z'')| \leqslant K\left[1 + \int_0^s \mu(s, \tau)\, d\tau\right] |z' - z''| \tag{9}$$

Дальнейшее утверждение сформулируем в виде леммы.

Лемма. *Для любых чисел* $\delta_1 > 0$ *и* $L_1 > 0$ *существует число* $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0)$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *будет выполняться неравенство*

$$\varepsilon^2 \mathbf{E}\left\{\int_0^t |\Delta_{13}(s, z_\varepsilon(s))|^2\, ds\right\} < \delta_1$$

*для всех* $t \in \left[0, \frac{L_1}{\varepsilon}\right]$.

Идея доказательства заключается в следующем. Отрезок $\left[0, \frac{L_1}{\varepsilon}\right]$ разбивается на $k$ частей точками $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = \frac{L_1}{\varepsilon}$ и пусть $d_k$ — диаметр этого разбиения. Тогда

$$\varepsilon^2 \mathbf{E}\left\{\int_0^t |\Delta_{13}(s, z_\varepsilon(s))|^2\, ds\right\} \leqslant 2\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{E}\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\Delta_{13}(s, z_\varepsilon(s)) - \Delta_{13}(s, z_\varepsilon(t_i))|^2\, ds\right\} +$$

$$+ 2\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{E}\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\Delta_{13}(s, z_\varepsilon(t_i))|^2\, ds\right\}$$

Для оценки первого члена справа при $d_k \to 0$ используется условие Липшица (9), а для второго — условия (3) и (6).

Нетрудно заметить, что оценки для $\mathbf{E}\{|I_2(t)|^2\}$ будут точно такими же, как и найденные нами для $\mathbf{E}\{|I_1(t)|^2\}$. Это следует из сходства условий, наложенных с одной стороны на функции $a(t, x, y)$ и $\varphi(t, s, x)$, а с другой —на функцию $\psi(t, s, x)$ и матрицу $\sigma(t, x, y)$. Из этого замечания и из полученных выше оценок вытекает, что для любых чисел $\delta_2 > 0$ и $L_2 > 0$ найдется $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_0)$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ и $t \in \left[0, \frac{L_2}{\varepsilon}\right]$

$$\rho_\varepsilon(t) \leqslant 12\varepsilon^2 K^2 \int_0^t \left[\rho_\varepsilon(s) + \int_0^s \mu^2(s, \tau)\, \rho_\varepsilon(\tau)\, d\tau\right] ds +$$

$$+ 12\varepsilon^2 K^2 C_2 \int_0^t \left(\int_0^s \mu^2(s, \tau)\, d\tau\right) ds + 2\delta_2.$$

Из условия (3) на функцию $\mu(s, \tau)$ получаем оценку

$$12\,\varepsilon^2 K^2 C_2 \int_0^t \left( \int_0^s \mu^2(s, \tau)\, d\tau \right) ds < \delta_2$$

для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ где $\varepsilon_3$ выбирается в зависимости от $\delta_2$ и участвующих констант, и очевидно может быть выбрано так, чтобы $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_0)$.

Следовательно

$$\rho_\varepsilon(t) \leqslant 3\,\delta_2 + 12\,\varepsilon^2 K^2 \int_0^t \left[ \rho_\varepsilon(s) + \int_0^s \mu^2(s, \tau)\, \rho_\varepsilon(\tau)\, d\tau \right] ds$$

Применяя один из вариантов неравенства Гронуолла—Беллмана находим

$$\rho_\varepsilon(t) \leqslant 3\,\delta_2 \exp\left\{ 12\,\varepsilon^2 K^2 \int_0^t \left[ 1 + \int_0^s \mu^2(s, \tau)\, d\tau \right] ds \right\}.$$

Ввиду условия (3)

$$\rho_\varepsilon(t) \leqslant 3\,\delta_2 \exp\left\{ 12\,\varepsilon^2 K^2 \left( t + \frac{1}{2-\alpha}\, t^{2-\alpha} \right) \right\} \leqslant 3\,\delta_2 \exp\left\{ 12\,\varepsilon^2 K^2 \left( \frac{L}{\varepsilon} + \frac{L^{2-\alpha}}{2-\alpha} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}} \right) \right\},$$

откуда

$$\rho_\varepsilon(t) \leqslant c_3\, \delta_2$$

Теперь, если положить $c_3\,\delta_2 = \delta$, то очевидно, что при любых $\delta > 0$ и $L > 0$ можно выбрать число $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ (зависящее от $\delta$ и $L$) такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ $\rho_\varepsilon(t) \leqslant \delta$ при $t \in \left[ 0, \frac{L}{\varepsilon} \right]$, а тогда

$$\underset{0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}}{\mathrm{up}}\ \rho_\varepsilon(t) \leqslant \delta$$

Этим теорема 2 доказана.

Замечание 5. Если провести более точные оценки для разности решений стохастических уравнений (2) и (7) мы получим, что в условиях теоремы 2 имеет место следующее более сильное неравенство

$$\mathbf{E}\,\{\sup_t |\, x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)\, |^2\} \leqslant \delta$$

где снова sup берется по $t$ из интервала $\left[ 0, \frac{L}{\varepsilon} \right]$.

Из этого замечания и теоремы 2 вытекает.

Следствие 1. *Для любых сколь угодно малых положительных чисел* $\beta$ *и* $\gamma$ *существует* $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\mathbf{P}\,\{\underset{0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}}{\mathrm{up}} |x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)| < \beta\} > 1 - \gamma$$

Замечание 6. Если условие (6) не выполнено, а выполнено только условие (4), то полезной оказывается и система стохастических уравнений (5). В этом случае теорема 2, замечание 5 и следствие 1 сохраняют силу с заменой в них $z_\varepsilon(t)$ на $y_\varepsilon(t)$, а доказательства соответствующих утверждений более простые.

**§ 3.** Рассмотрим еще тот случай, когда в (4) и (6) выполняются первые условия, т.е. существуют векторы $\varphi_1(t, x)$ и $\bar{a}(y)$ такие, что

$$\int_0^t \varphi(t, \tau, x)\, d\tau = \varphi_1(t, x), \quad \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau a\big(t, y, \varphi_1(t, y)\big)\, dt = \bar{a}(y) \tag{10}$$

равномерно по $y$.

Предположим, что начальное условие $x_0$ системы (2) является константой. Тогда системе СИДУ (2) ставим в соответствие следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon \bar{a}\big(z_\varepsilon(t)\big), \; z_\varepsilon(0) = x_0, \; t \in [0, L\varepsilon^{-1}]. \tag{11}$$

Теперь мы сформулируем следующий результат.

Теорема. 3. *Если выполнены условия* I — III § 1 *и условия (10), то решение* $x_\varepsilon(t)$ *системы СИДУ (2) близко в среднем квадратическом смысле к решению* $z_\varepsilon(t)$ *детерминированной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), т.е., для любых* $\delta_\varepsilon > 0$ *и* $L_3 > 0$ *существует* $\varepsilon_4 \in (0, \varepsilon_0)$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4)$

$$\sup_t \mathbf{E}\{|x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)|^2\} < \delta$$

*где* sup *берется по* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$.

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2. Действительно, пусть

$$r_\varepsilon(t) = \mathbf{E}\{|x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)|^2\}$$

Тогда из условий I — III § 1 и свойств решений СИДУ нетрудно получить, что

$$r_\varepsilon(t) \leqslant c_4 \varepsilon \int_0^t r_\varepsilon(s)\, ds + k_\varepsilon(t),$$

где $c_4 = \mathrm{const}$, а

$$K_\varepsilon(t) = \varepsilon^2 \mathbf{E}\left\{ \left| \int_0^t \sigma\Big(s, x_\varepsilon(s), \int_0^s \psi\big(s, \tau, x_\varepsilon(\tau)\big)\, d\tau\Big)\, dw(s) \right|^2 \right\} = \varepsilon^2 \mathbf{E}\left\{ \int_0^t \|\sigma\|^2 ds \right\}$$

В последнем равенстве мы восползовались известным тождеством для математического ожидаиия стохастических интегралов [1].

Согласно неравенству Гронуолла — Беллмана

$$r_\varepsilon(t) \leqslant c_4 K_\varepsilon(t)\, e^{\varepsilon t}.$$

Из условия III § 1 и того, что $\sup_t \mathbf{E}\{|x_\varepsilon(t)|^2\} < \infty$ находим

$$K_\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon^2 c_5 t, \; c_5 = \mathrm{const}.$$

Теперь для любых $\delta_3 > 0$ и $L_3 > 0$ легко подобрать $\varepsilon_4 \in (0, \varepsilon_0)$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4)$

$$\sup_{0 \le t \le L_3 \varepsilon^{-1}} r_\varepsilon(t) \le \delta_\varepsilon \tag{12}$$

Это завершает доказательство теоремы 3.

Замечание 7. Проведенные рассуждения показывают, что в теореме 3 вместо системы (2) можно рассмотреть другую систему (обозначим ее решение той же буквой $x_\varepsilon(t)$), а именно

$$dx_\varepsilon(t) = \varepsilon\, a\left(t, x_\varepsilon(t), \int_0^t \varphi(t, \tau, x_\varepsilon(\tau))\, d\tau\right) dt +$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}+\mu} \sigma\left(t, x_\varepsilon(t), \int_0^t \psi(t, \tau, x_\varepsilon(\tau)) d\tau\right) dw(t), \quad x_\varepsilon(0) = x_0 = \mathrm{const},$$

где $\mu$ любая положительная константа.

Тогда решение $x_\varepsilon(t)$ этой системы близко в среднем квадратическом к решению $z_\varepsilon(t)$ обикновенной системы (11). Это следует из доказательства теоремы 3 с той разницей, что здесь

$$K_\varepsilon(t) = \varepsilon^{1+2\mu}\, \mathbf{E}\left\{\int_0^t \|\sigma\|^2 ds\right\},$$

которое достаточно для выполнения соотношения (12).

**Заключение.**

Доказанные нами теоремы 2 и 3 и сделанные замечания и полученное следствие раскрывают ценность метода усреднения для систем СИДУ. Смысл этих теорем заключается в том, что неавтономная система стохастических интергро — дифференциальных уравнений с правой частью пропорциональной малому параметру $\varepsilon$ и специальной структурой на больших интервалах времени имеет поведение близкое в среднем квадратическом смысле к поведению автономной системы обыкновенных стохастических или обыкновенных детерминированных дифференциальных уравнений, полученных усреднением данной системы, и это имеет место на временных интервалах вида $[0, L\varepsilon^{-1}]$.

Представляет интерес рассмотреть:

а) Другие схемы усреднения.

б) Другие метрики близости решений исходных и соответствующих им усредненных систем.

Эти вопросы будут объектом новых исследований.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Гихман И. И., Скороход А. В.. *Стохастические дифференциальные уравнения*, „Наукова думка", Киев, 1968.

[2] Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г., *Усреднение в стохастических системах*, Украинский матем. журнал, **23** (1971), 318 — 345.

[3] Митропольский Ю. А., Филатов А. Н., *Усреднение интегро — дифференциальных и интегральных уравнений*, Украинский матем. журнал, **24** (1972), 30 — 48.

[4] Филатов А. Н., *О методе усреднения в системах интегро — дифференциальных уравнений*, ДАН СССР, **165**, 3 (1965).

[5] Филатов А. Н., *Усреднение в системах интегральных и интегро — дифференциальных уравнений*, В сб. „Исследования по аналитической механике", „Наука", Ташкент, 1965.

[6] Филатов А. Н., *К усреднению в системах интегро — дифференциальных уравнений*, Дифференциальные уравнения, **3**, 10 (1967).

[7] Филатов А. Н., *Методы усреднения в дифференциальных и интегро — дифференциальных уравнениях*, „ФАН", Ташкент, 1971.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
БОЛГАРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
СОФИЯ

ПЛОВДИВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЛОВДИВ