PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 15 (29), 1973. 85—94

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ (II)

М. Г. Лазич

(Представлено 9 июня 1972 года)

В этом докладе продолжается изучение функциональных преобразованиях последовательностей начатое в [1]. Здесь идет речь о преобразованиях представляющих собой одно расширение тех которые мы рассматривали в докладе [1], нумерацию которого тоже продолжаем.

4. Операторы типа $(X, F)_g$

4.1. *Определение.* Пусть (Z, τ) — топологическое пространство, $X \subseteq Z$ и $x' \notin X$ точка сгущения множества X с счётным базисом $\{O_i\}_{i=0, 1, \ldots}$ окрестностей в пространстве (Z, τ); пусть, далее, $F=(f_j)$ — последовательность функций $f_j = f_j(x)$ $(j=0, 1, \ldots)$ определенных на X. Полагаем тогда $U=(u_j) \in (X, F)^d_{gx'}$ если существует окрестность O точки x' такая что $U=(u_j) \in (X \cap O, F)^d$; в то же время полагаем $U=(u_j) \in (X, F)^b_{gx'}$, если существует такая окрестност O точки x', что $U=(u_j) \in (X \cap O, F)^b$ (см. определение 2.1 [1]). Для $U=(u_j) \in (X, F)^d_{gx'}$ функцию с областью определения $D_U = \bigcup\limits_{O \in \mathcal{O}} (X \cap O)$, где $\mathcal{O}$ означает семейство окрестностей O точки x' таких что $U=(u_j) \in (X \cap O, F)^d$, и со значениями $(x, F)(U) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(x) u_j$ называем *преобразованием последовательности* $U=(u_j)$ *оператором* $(X, F)_{gx'}$ и обозначаем через $(X, F)_{gx'}(U)$ (легко увидеть что — $D_U = X \cap O^*$, где $O^* = \bigcup\limits_{O \in \mathcal{O}} O$ — максимум (по включению) семейства $\mathcal{O}$; при этом множество $(X, F)^d_{gx'}$ называем *достижением действия* оператора $(X, F)_{gx'}$, а $(X, F)^b_{gx'}$ *достижением b-действвия* оператора $(X, F)_{gx'}$. (Предположение $x' \notin X$ принято только для простоты выражений; в случае $x' \in X$ роль множества X принимает $X_0 = X - \{x'\}$.)

4.1. *i.* Из определения базиса окрестностей $\{O_i\}_{i=0, 1, \ldots}$ точки x' следует что $(X, F)^d_{gx'} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} (X \cap O_i, F)^d$ и $(X, F)^b_{gx'} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} (X \cap O_i, F)^b$.

4.1. *ii.* Операторы матричного типа в смысле определения 4.1 будем обозначать через $(F)_g$; согласно тому же определению, достижение действия и достижение b-действвия оператора $(F)_g$ обозначаем через $(F)^d_g$ и $(F)^b_g$, соответственно (см. примечание 2.1. i[1]). В случае $X=[x_0, x')$ обозначения $(X, F)_{gx'}$, $(X, F)^d_{gx'}$ и $(X, F)^b_{gx'}$ заменяем через $(x_0, x', F)_g$, $(x_0, x', F)^d_g$ и $(x_0, x', F)^b_g$, соответственно.

4.1. *iii*. Из определений операторов (X, F) и $(X, F)_{gx'}$ ясно что $(X, F)^d \subseteq (X, F)^d_{gx'}$ и $(X, F)^b \subseteq (X, F)^b_{gx'}$. Следующий пример показывает что множества $(X, F)^d_{gx'}$ и $(X, F)^b_{gx'}$ могут быть значительно шире соответствующих множеств $(X, F)^d$ и $(X, F)^b$.

Рассмотрим матрицу

$$F=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 & \cdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{j+1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{1}{2^i} & \frac{1}{3^i} \cdots \frac{1}{(j+1)^i} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

Тогда очевидно что $(F)^d$ является истинным подмножеством множества всех последовательностей сходящихся к нулю T^0; в то же время множество всех ограниченных последовательностей T^b является истинным подмножеством множества $(F)^d_g$. Из $(F)^b \subseteq (F)^d$ следует что в рассматриваемом случае и множество $(F)^b$ является истинным подможеством множества T^0; легко проверить что тогда множество T^b — также истинное подмножество множества $(F)^b_g$. (Заметим что для данной матрицы множество $(F)^d$, а поэтому и множество $(F)^b$, — множество первой категории в пространстве T^0. Для доказательства, обозначим через T_1 совокупность последовательностей $U=(u_j)$ таких что ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} u_j$ сходится и положим $A_i(U)=\sum\limits_{j=0}^{i} u_j$ $(i=0, 1, \ldots)$. Тогда $A_i(U)$ $(i=0, 1, \ldots)$ представляет собой последовательность линейных (аддитивных и непрерывных) функционалов на пространстве T^0, а T_1 совпадает с множеством $U=(u_j)$ таких что $\lim\limits_{i} A_i(U)$ существует. Из того что T_1 не совпадает с T^0, следует что множество T_1, а значит и множество $(F)^d$, — множество первой категории в пространстве T^0 (см., нпр., [2], теорема I.5).)

4.1. *iv*. В случае последовательности $F=(f_j)$ функций $f_j=f_j(x)$ $(j=0, 1, \ldots)$ таких что для всех $x \in X$ существует индекс j_x такой что $j>j_x \Rightarrow f_j(x)=0$, множества $(X, F)^d$ и $(X, F)^d_{gx'}$ совпадают с множеством T всех последовательностей. Эти множества совпадают и в случае степенных операторов. (Степенным оператором называем оператор (x_0, x', F) соотнесен ряду $s(x)=\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j \neq 0$ для $x \in [0, R)$, где R означает его радиус сходимости, при выборе: $x_0=0$, $x'=R$ и $f_j(x)=\dfrac{a_j x^j}{s(x)}$ $(j=0, 1, \ldots)$.)

4.1. *v*. Заметим что определение оператора $(X, F)_{gx'}$ предполагает что множество X обладает точкой сгущения x' с счетным базисом окрестностей, а в определении оператора (X, F) (см. 2.1 [1]) X представляет собой любое непустое множество. Желая подчеркнуть зависимость от точки x' оператора нового (обобщенного) типа, мы и вводим в его обозначение $(X, F)_{gx'}$, помимо буквы g, и x'.

4.2. Лемма. *Пусть X — связное GK-пространство*[1], *а* a_{ij} $(i, j=0,1,\ldots)$ *двойная последовательность чисел таких что для всех* $i=0, 1,\ldots$ *существует последовательность* $U^i=(u_j^i)\in X$ *такая что ряд* $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} u_j^i$ *расходится. Тогда множество* $U=(u_j)\in X$ *таких что ряд* $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} u_j$ *расходится для всех* $i=0, 1,\ldots$ *—множество второй категории в пространстве X, а его дополнение является множеством первой категории в том же пространстве.*

(Заметим что утверждение о множестве T_1 приведенное в скобках примечания 4.1. *iii*, можно получить и на основании леммы 4.2 полагая, например, $a_{ij}=1$ $(i, j=0, 1,\ldots)$ и $u_j^i=\frac{1}{j+1}$ $(i, j=0, 1,\ldots)$.)

Доказательство. Для $U=(u_j)\in X$ положим

$$A_{ik}(U)=\sum_{j=0}^{k} a_{ij} u_j \, (i, k=0, 1,\ldots).$$

В силу свойства KG-пространства X, $A_{ik}(U)$ $(i, k=0, 1,\ldots)$ представляет собой двойную последовательность линейных функционалов на X. По предположении, для каждого $i=0, 1,\ldots$ существует такое $U^i=(u_j^i)$ что $\lim_k A_{ik}(U^i)$ не существует. В силу теоремы о сгущении особенностей (нпр., [2], теорема I.6), совокупность $U=(u_j)\in X$ таких что для всех $i=0, 1,\ldots$ не существует $\lim_k A_{ik}(U)$, т.е. совокупность $U=(u_j)\in X$ таких что для каждого $i=0,1,\ldots$ ряд $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} u_j$ расходится,—множество второй категории в пространстве X, а его дополнение является множеством первой категории в этом пространстве.

4.3. Лемма. *Пусть T_1 — связное GK-пространство и* $T_1\subseteq(X, F)_{gx'}^d$. *Тогда существует окрестность O точки x' такая что для каждого* $U=(u_j)\in T_1$ *область сходимости ряда* $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) u_j$ *содержит множество* $X\cap O$, *т.е. что справедливо* $T_1\subseteq(X\cap O, F)^d$.

Доказательство. Предположив противное мы приходим к существованию последовательности (x_i) элементов из X и последовательности $U^i=(u_j^i)$ $(i=0, 1,\ldots)$ точек пространства T_1 таких что $x_i\to x'$ $(i\to\infty)$ и ряд $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_i) u_j^i$ расходится для всех $i=0, 1,\ldots$. В силу леммы 4.2, существует $U^*=(u_j^*)\in T_1$ такое что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_i) u_j^*$ расходится для всех $i=0, 1,\ldots$.

С другой стороны, из $U^*=(u_j^*)\in T_1$ следует $U^*=(u_j^*)\in(X, F)_{gx'}^d$; в силу того, существует индекс i_0 такой что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_i) u_j^*$ сходится для всех $i\geqslant i_0$. Полученное противоречие доказывает лемму 4.3.

---

[1]) т.е. полная метрическая группа (с последовательностями как точками) в которой сходимость по метрике влечет сходимость по координатам.

4.4. Теорема. *Достижение действия оператора* $(X, F)_{gx'}$ *содержит все последовательности сходящиеся к нулю (все сходящиеся последовательности, все ограниченные последовательности), тогда и только тогда, когда выполняется условие*:

$$\text{(1)}\qquad \begin{array}{l}\textit{существует окрестность } O \textit{ точки } x' \textit{ такая что}\\ \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| < \infty \ \textit{ для всех } \ x \in X \cap O.\end{array}$$

Доказательство теоремы 4.4 в неочевидном направлении получается применением леммы 4.3 (на пространство $T_1 = T^0$) и теоремы 2.2 [1] (см. и [3], лемма 2).

4.5. Теорема. *Для того чтобы достижение действия оператора* $(X, F)_{gx'}$ *содержало все последовательности, необходимо и достаточно чтобы выполнялось следующее условие*:

$$\text{(2)}\qquad \begin{array}{l}\textit{существует такая окрестность } O \textit{ точки } x', \textit{ что для каждого}\\ x \in X \cap O \textit{ существует индекс } j_x \textit{ такой что } j > j_x \Rightarrow f_j(x) = 0.\end{array}$$

Достаточность условия (2) очевидна; его необходимость получается последовательным применением леммы 4.3 (на пространство $T_1 = T$) и теоремы 2.3 [1].

4.5. *i.* В случае матричных операторов $(F)_g$ условие (2) означает конечнострочность матрицы $F = (f_{ij})$ начиная с некоторого индекса i_0.

4.6. Теорема. *Достижение b-действия оператора* $(X, F)_{gx'}$ *содержит все последовательности сходящиеся к нулю (все сходящиеся последовательности, все ограниченные последовательности), в том и только в том случае, когда выполняется условие*

$$\text{(3)}\qquad \begin{array}{l}\textit{существует окрестность } O \textit{ точки } x' \textit{ такая что}\\ \sup\limits_{x \in X \cap O} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| < \infty.\end{array}$$

Теорема 4.6 фактически (исключая терминологию) доказана в [3] (лемма 3 и примечания 5 и 8).

4.7. Теорема. *Для того чтобы достижение b-действия оператора* $(X, F)_{gx'}$ *содержало все последовательности необходимо и достаточно чтобы выполнялось следующее условие*:

$$\text{(4)}\qquad \begin{array}{l}\textit{существуют окрестность } O \textit{ точки } x' \textit{ и индекс } j_0 \textit{ такие что:}\\ 1^\circ\ f_j(x) \equiv 0 \textit{ на } X \cap O \textit{ для каждого } j > j_0;\\ 2^\circ\ \sup\limits_{x \in X \cap O} \sum_{j=0}^{j_0} |f_j(x)| < \infty.\end{array}$$

Доказательство. Достаточность условия (4) для $(X, F)_{gx'}^b = T$ очевидна. В доказательстве его необходимости (в силу предшествующей теоремы) существенным является доказательство необходимости условия (4) 1°. Оно получается применением леммы 4.3 (на пространство $T_1 = T$) и следующего результата.

4.7. *i*. Лемма. *Если* — $(X, F)^d = T$, *тогда справедливо утверждение*: $(X, F)^b_{gx'} = T$ *в том и только в том случае, когда существуют окрестность* O *точки* x' *и индекс* j_0 *такие что*: 1° $f_j(x) \equiv 0$ *на* $X \cap O$ *для всех* $j > j_0$; 2° $\sup\limits_{x \in X \cap O} \sum\limits_{j=0}^{j_0} |f_j(x)| < \infty$.

Нетривиальной частью доказательства леммы 4.7. *i* является доказательство что из $(X, F)^b_{gx'} = T$ следует условие 1°. Это можно получить по схеме доказательства необходимости условия (6) 2° в доказательстве теоремы 3.6 [1]. Именно, предположив противное, приходим к последовательности (x_i) элементов из X сходящейся к x' и к возрастающей последовательности (j_i) индексов таким что $f_{j_i}(x_i) \neq 0$ для каждого $i = 0, 1, \ldots$. Из предположения $(X, F)^b_{gx'} = T$ следует тогда что $(G)^b = T$, где (G) означает матричный оператор соответствующий матрице $G = (f_j(x_i))$. На основании теоремы 2.5 [1], получается противоречие, что и заканчивает доказательство леммы 4.7. *i*.

4.7. *ii*. В случае матричных операторов $(F)_g$ условие (4) обозначает существование такого индекса i_0 что для матрицы $F = (f_{ij})$ справедливо: $f_{ij} = 0$ для $i > i_0$ и $j > i_0$ (следовательно, тогда матрица $F = (f_{ij})$ начиная с индекса i_0 ограничена по строкам), и при этом столбцы индексов $j \leqslant i_0$ образуют ограниченные последовательности.

5. Методы типа $(X, F, x')_g$

5.1. *Определение*. Пусть X, F, x' — со значениями из определения 4.1. Полагаем $U = (u_j) \in (X, F, x')^c_g$ если существует такая окрестность O точки x' что $U = (u_j) \in (X \cap O, F, x')^c$ (это эквивалентно предположению что существует $\lim\limits_{x \to x'} (x, F)(U) = \lim\limits_{x \to x'} \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(x) u_j$, которое неявно предполагает существование такой окрестности O точки x' что $U = (u_j) \in (X \cap O, F)^d$; $(X \cap O, F, x') - \lim u_j$ называем тогда *пределом последовательности* $U = (u_j)$ *в смысле метода* $(X, F, x')_g$ и обозначаем через $(X, F, x')_g - \lim u_j$, а множество $(X, F, x')^c_g$ *областью применения* метода $(X, F, x')_g$; аналогичным способом, множество $(X, F, x')^0_g$ определяем как совокупность последовательностей $U = (u_j)$ таких что существует окрестность O точки x' такая что $U = (u_j) \in (X \cap O, F, x')^0$ [1] и называем его *областью о-применения* метода $(X, F, x')_g$ (см. определение 3.1 [1]).

5.1. *i*. Легко увидеть, что $-(X, F, x')^c_g = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} (X \cap O_i, F, x')^c$ и $(X, F, x')^0_g = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} (X \cap O_i, F, x')^0$, где $\{O_i\}_{i=0,1,\ldots}$ — счетный базис окрестностей точки x'.

5.1. *ii*. Метод матричного типа в смысле определения 5.1 будем обозначать через $(F')_g$, где $F = (f_{ij})$ — исходная матрица; область применения и область o-применения обозначаем тогда через $(F')^c_g$ и $(F')^0_g$ соответстенно. В случае $X = [x_0, x')$ используем обозначения $(x_0, x', F)_g$, $(x_0, x', F)^c_g$ и $(x_0, x', F)^0_g$, соответственно; при этом всегда будет ясно о чем идет речь — об операторе или о методе $(x_0, x', F)_g$.

---

[1]) или как множество тех $U = (u_j) \in (X, F, x')^c_g$ для которых $(X, F, x')_g - \lim u_j = 0$.

5.1. *iii*. Как и в случае методов типа (X, F, x'), наряду с каждым методом $(X, F, x')_g$ можно рассматривать и семейство I_g методов $(G')_g$ порожденных $(X, F, x')_g$ (см. определение 3.2 [1]). Можно также доказать и следующий аналог примечанию 3.2.*i*:

Область применения метода $(X, F, x')_g$ *совпадает с пересечением областей всех им порожденных методов, т.е.* $(X, F, x')_g^c = \bigcap_{(G')_g \in I_g} (G')_g^c$. (Предположение $U=(u_j)\notin(X, F, x')_g^c$ значит: либо для каждой окрестности O точки x' существует $x\in X\cap O$ такое что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\,u_j$ расходится, либо $\lim_{x\to x'}\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\,u_j$ не существует. Первая возможность влечет существование последовательности (x_i) элементов x_i множества X стремящихся к x' так что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_i)\,u_j$ расходится для всех $i=0, 1, \ldots$. Тогда $U=(u_j)\notin(G_1')_g^c$, где $(G_1')_g$ обозначает метод сходимости порожденный $(X, F, x')_g$ соответствующий последовательности (x_i). Следовательно, тогда $U=(u_j)\notin \bigcap_{(G')_g\in I_g}(G')_g^c$. Так как и вторая возможность приводит к тому же факту (см. примечание 3.2. *i* [1]), то приведенное равенство можно считать доказанным.)

5.1. *iv*. Из определений 3.1 [1] и 5.1 следует что метод $(X, F, x')_g$ сильнее соответствующего метода (X, F, x'), а тоже и что эти методы всегда совместны между собой. Однако, на примере матрицы

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\cdots1\cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\cdots0\cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\cdots0\cdots \\ . & . & . & \ldots\ \ldots \end{pmatrix}$$

показывается что множество $(X, F, x')_g^c$ может оказаться значительно шире соответствующего множества $(X, F, x')^c$. Именно, в рассматриваемом случае множество $(F')^c$ является истинным подмножеством множества T^0; в то же время, T^c—истинное подмножество множества $(F')_g^c$ (метод $(F')_g$ является эквивалентным с методом Чезаро первого порядка). Тот же пример показывает что $(X, F, x')^0$ может быть истинным подмножеством соответствующего множества $(X, F, x')_g^0\big((F')^0=(F')^c$, и в то же время T^0 является истинным подмножеством множества $(F')_g^0$(так как $(F')_g^0$ кроме T^0 содержит и, например, последовательность $U=(u_j)$, где—$u_j=(-1)^j$ $(j=0, 1, \ldots)\big)\big)$. Заметим также что данная матрица показывает что соответствующие методы (X, F, x') и $(X, F, x')_g$ не должны одновременно быть регулярным.

5.1. *v*. Матрица

$$F=\begin{pmatrix} f_0 & f_0 & f_0 & f_0 & \cdots \\ 0 & f_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & f_2 & 0 & \cdots \\ . & . & . & . & \ldots \end{pmatrix}$$

где—$f_0 \neq 0$ и $\lim f_i = 0$, показывает что соответствующие $(X, F, x')^c$ и $(X, F, x')_g^c$ не должны одновременно содержать даже ни множество T^b. На том же примере также видим что это справедливо и для множества последовательностей состоящих из одних нулей и единиц (множество $(F')^c$ содержит только те из этих последовательностей у которых число единиц конечно).

5.1. *vi.* В случае множества X и последовательности $F=(f_j)$ функций $f_j = f_j(x)$ $(j=0, 1, \ldots)$ обладающих свойством из примечания 4.1. *iv*, методы (X, F, x') и $(X, F, x')_g$ совпадают. Тот же факт имеем и в случае степенных методов (x_0, x', F) и $(x_0, x', F)_g$.

Теоремы с необходимыми и достаточными условиями для того чтобы область применения (область o-применения) содержала какое-то из множеств T^0, T^c, T^b и T, можно получить специализацией следующего результата:

5.2. Теорема. *Пусть T_1—связное GK-пространство. Тогда включение $T_1 \subseteq (X, F, x')_g^c$ $\left((X, F, x')_g^0\right)$ справедливо в том и только в том случае, когда существует такая окрестность O точки x' что $T_1 \subseteq (X \cap O, F, x')^c$ $\left((X \cap O, F, x')^0\right)$.*

Нетривиальная часть доказательства теоремы 5.2 получается на основании леммы 4.3. Именно, в силу этой леммы и отношения $(X, F, x')_g^c \subseteq (X, F)_{gx'}^d$, из предположения $T_1 \subseteq (X, F, x')_g^c$ следует существование окрестности O точки x' такой что $T_1 \subseteq (X \cap O, F)^d$. Однако, легко увидеть что тогда справедливо и $T_1 \subseteq (X \cap O, F, x')^c$.

Полагая $T_1 = T^0$, T^c, T^b и T, соответственно, получаем следующие четыре теоремы. Из их формуляций видно что они несколько проще этих которые мы получили бы формальным применением теоремы 5.2 и соответствующих теорем для методов типа (X, F, x'). Первые три теоремы уже опубликованы ([3], теоремы 4, 4.1, 5, 5.1 и 6 и примечание 8) и здесь приводятся для полноты и некоторых новых примечаний.

5.3. Теорема. *Каждая последовательность $U=(u_j)$ сходящаяся к нулю является $(X, F, x')_g$ — сходящейся $((X, F, x')_g$ — o-сходящейся), и при этом к числу $\sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k$, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

существует такая окрестность O точки x' что

(1) $$\sup_{x \in X \cap O} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| < \infty;$$

(2) *для всех $k=0, 1, \ldots$ существует* $\lim\limits_{x \to x'} f_k(x) = a_k(0)$.

5.4. Теорема. *Все сходящиеся последовательности $U=(u_j)$ являются $(X, F, x')_g$ — сходящимися $\left((X, F, x')_g\right.$ — o-сходящимися$\left.\right)$, и при этом к числу $\sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k + u\left(a - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)$, где—$u = \lim u_j$, в том и только в том случае, когда выполнены условия* (1), (2) *и*

(3) *существует* $\lim\limits_{x \to x'} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) = a$

(*условия* (1), (2) *и* (3) *с* $a_k = 0$ $(k=0, 1, \ldots)$ *и* $a=0$).

5.5. Теорема. *Каждая ограниченная последовательность* $U=(u_j)$ *является* $(X, F, x')_g$ *— сходящейся* ($(X, F, x')_g$ *— о-сходящейся*), *и при этом к числу* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k$, *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (1), (2) *и*

$$(4) \qquad \lim_{x \to x'} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x) - a_j| = 0$$

(*условия* (1) *и* (4′) $\lim_{x \to x'} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| = 0$).

Аналогично теореме 3.5. *i* [1], можно показать что в теореме 5.5 условие (1) можно заменить менее жестким условием (1) параграфа 4. В силу теорем 5.5 и 3.5. *ii* [1], получается следующая

5.5. *i*. Теорема. *Область* $(F')_g$ *— сходимости*, $F=(f_{ij})$, *содержит все ограниченные последовательности, в том и только в том случае, когда выполнены условия* (2) (*т.е. существует* $\lim_i f_{ik} = a_k$ $(k=0, 1, \ldots)$) *и*

(5) *существует индекс* i_0 *такой что ряд* $\sum_{j=0}^{\infty} |f_{ij}|$ *сходится равномерно по* $i > i_0$.

Из теорем 5.4 и 5.5 следует что область применения регулярного метода $(X, F, x')_g$ $(a_k=0$ $(k=0, 1, \ldots)$ и $a=1)$ не может содержать все ограниченные последовательности. В [3] (примечания 6 и 8) приведено что область применения регулярного метода $(X, F, x')_g$ не может охватить ни все последовательности состоящие из одних нулей и единиц. В связи с этим замечаем что построение „нуль-один“ последовательности не имеющей предела в смысле данного регулярного метода $(X, F, x')_g$ можно привести к построению „нуль-один“ последовательности не имеющей предела в смысле некоторого матричного метода (G') порожденного (X, F, x'). Также как и в случае методов типа (X, F, x'), можно рассматривать последовательности с одними $-a$ и a как членами, для $a \neq 0$.

5.5. *ii*. Заметим что из условий (1) и (2) следует сходимость ряда $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ и неравенство

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \leqslant \inf_{O \in \mathcal{O}} \sup_{x \in X \cap O} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| = M,$$

где $\mathcal{O}$ означает семейство всех окрестностей точки x'. В случае регулярного метода $(X, F, x')_g$ имеем $0 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < M$, а, например, в случае $T^b \subseteq (X, F, x')_g^c$ имеем $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| = M$.

5.5. *iii*. Из теоремы 5.5 следует что методы $(X, F, x')_g$ и $(Y, G, y')_g$ обладающие свойством $T^b \subseteq (X, F, x')_g^c$ и $T^b \subseteq (Y, G, y')_g^c$, соответственно, совместны на T^b, тогда и только тогда, когда $a_k = b_k$ $(k=0, 1, \ldots)$, где — $b_k = \lim_{y \to y'} g_k(y)$.

5.6. Т е о р е м а. *Каждая последовательность* $U=(u_j)$ *является* $(X, F, x')_g$-*сходящейся* ($(X, F, x')_g$ – *o-сходящейся*), *и при этом к числу* $\sum_{j=0}^{j_0} a_j u_j$, *в том и только в том случае когда выполнено условие*

(6) *существуют окрестность* O *точки* x' *и индекс* j_0 *такие что*: 1° $f_j(x)\equiv 0$ *на* $X\cap O$ *для всех* $j>j_0$; 2° *для каждого* $j=0, 1, \ldots, j_0$ *существует* $\lim\limits_{x\to x'} f_j(x)=a_j(0)$.

5.6. *i.* В случае матричных методов $(F')_g$, условие (6) обозначает существование такого индекса i_0, что для матрицы $F=(f_{ij})$ справедливо: $f_{ij}=0$ для всех $i>i_0$ и $j>i_0$ (следовательно, тогда матрица $F=(f_{ij})$ начиная с индекса i_0 ограничена по строкам), и при этом столбцы индексов $j\leqslant i_0$ образуют сходящиеся последовательности.

В заключение этого доклада приводим два замечания о методах (X, F, x') и $(X, F, x')_g$ с множеством всех последовательностей в качестве области применения. Благодаря теореме 5.2, достаточно сделать замечания только в случае методов типа (X, F, x').

5.6. *ii.* Если $(X, F, x')^c=T$, тогда методы (X, F, x') и $(X\cap O, F, x')$, с окрестностью O из условия (6), эквивалентны между собой (та же область применения и одинаковые пределы). В этом случае метод $(X\cap O, F, x')$ можно представить „суммой" методов $(X\cap O, F_j, x')$ $(j=0, 1, \ldots, j_0)$ ассоциированных последовательностям $F_j=(0, 0, \ldots, 0, \underset{j}{f_j(x)}, 0, 0, \ldots)$ $(j=0, 1, \ldots, j_0)$, соответственно. Термин „сумма" используется вследствие факта, что для всех $x\in X\cap O$ и $U=(u_j)\in T$

$$(x, F)\ (U)=\sum_{j=0}^{j_0}(x, F_j)\ (U),$$

и, поэтому, для всех $U=(u_j)\in T$

$$(X\cap O, F, x')-\lim u_k=\sum_{j=0}^{j_0}[(X\cap O, F_j, x')-\lim u_k].$$

Тот факт, что область применения методов типа упомянутой „суммы" охватывает все последовательности, был нам известен и до формулировки теоремы 3.6. Однако, значение теоремы 3.6 заключается в том, что она показывает, что другие методы (X, F, x') с можеством T в качестве области применения практически не существуют (как, без существенных убыток, можно рассматривать лишь элементы $x\in X\cap O$, с окрестностью O из условия (6)).

5.6. *iii.* Теорема 3.6 показывает что в случае $(X, F, x')^c=T$ существуют индекс j_0 и числа $a_j(j=0, 1, \ldots, j_0)$ (которые зависят только о методу (X, F, x')), такие что для всех $U=(u_j)\in T$ справедливо

$$(X, F, x')-\lim u_j=\sum_{j=0}^{j_0} a_j u_j.$$

Однако, тот же факт можно получить и следующим способом.

Из $(X, F, x')-\lim u_j=\lim\limits_{x\to x'}\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(x)\,u_j=\lim\limits_{i}\lim\limits_{n}\sum\limits_{j=0}^{n} f_j(x_i)\,u_j$, с последовательностью (x_i) элементов множества X сходящейся к x', и известного факта что T есть пространство $B_0 K$, происходит что в рассматриваемом случае функционал $(X, F, x')-\lim u_j$ аддитивен и принадлежит не больше чем второму классу Бэра. В силу известной теоремы (нпр., [2], гл. I, теорема 4), $(X, F, x')-\lim u_j$ представляет собой линейный функционал на пространстве T. Используя 2.21 и 2.23 [4] (или [2], гл. III, теорема 11), получаем вышеупомянутый вид функционала $(X, F, x')-\lim u_j$. (Последний вывод можно получить и непосредственным применением теоремы 2.21 [4]. В силу этой теоремы, существует такой индекс j_0, что $(X, F, x')(U)=$ $=(X, F, x')-\lim u_j$ является линейным функционалом на T и относительно однородной псевдонормы

$$p_{j_0}^0(U)=\max\big(p_0(U), p_1(U),\dots,p_{j_0}(U)\big)=\max(|u_0|, |u_1|,\dots, |u_{j_0}|).$$

Поэтому существует такое число $M>0$, что

$$|(X, F, x')(U)|\leqslant Mp_{j_0}^0(U) \text{ для всех } U=(u_j)\in T.$$

Как для последовательтеносй $U=(0, 0,\dots, \overset{j_0}{0}, u_{j_0+1}, u_{j_0+2},\dots)$ имеем $p_{j_0}^0(U)=0$, то для таких последовательностей $U=(u_j)$ справедливо $(X, F, x')(U)=0$. Оттуда происходит, что для любой последовательности $U=(u_0, u_1,\dots, u_{j_0}, u_{j_0+1}, u_{j_0+2},\dots)$ и $U^1=(u_0, u_1,\dots, u_{j_0}, 0, 0,\dots)$ имеет место равенство

$$(X, F, x')(U)=(X, F, x')(U^1).$$

Тогда из разложения $U^1=\sum\limits_{j=0}^{j_0} u_j E_j$ получаем $(X, F, x')(U)=(X, F, x')\big(\sum\limits_{j=0}^{j_0} u_j E_j\big)$ $=\sum\limits_{j=0}^{j_0} u_j (X, F, x')(E_j)=\sum\limits_{j=0}^{j_0} a_j u_j$ для всех $U=(u_j)\in T$.)

Следовательно, при наличии $(X, F, x')^c=T$ члены последовательностей $U=(u_j)$ с некоторого фиксиранного индекса j_0—совсем без влияния на (X, F, x') - предел. В силу того мы и ставили гипотезу что тогда выполняется условие типа (6) 1°, которая, согласно теореме 3.6, показалась точной.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лазич, М. Г.: *О функциональных преобразованиях последовательностей* (I), Publications de l'Inst. math. (Nouvelle série), t. 14 (28), 1972, pp. 83—95.

[2] Banach, S.: *Théorie des opérations linéaires*, Monografje Matematyczne I, New York, 1955.

[3] Lazić, M.: *Sur les procédés fonctionnels* (*de limitation*), Mat. vesnik 6 (21), sv. 4, 1969, str. 425—436.

[4] Mazur, S. et Orlicz, W.: *Sur les espaces métriques linéaires* (II), Studia Math. 13 (1953), pp. 137—179.