PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 15 (29), pp. 5—20

SUR LA CONVERGENCE DES RAPPORTS DE LA SOMME PARTIELLE AU TERME GÉNÉRAL ET DU RESTE OU TERME GÉNÉRAL D'UNE SÉRIE RÉELLE OU COMPLEXE

Dušan D. Adamović

(Communiqué le 2. Février 1973.)

Soit dans ce qui suit $a_n\,(n=0, 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres complexes ou réels différents de zéro pour n suffisamment grand. Posons

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k \quad (n=0,\ 1, 2, \ldots).$$

et, dans le cas où la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \tag{1}$$

converge (avec une somme finie),

$$S=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k,\ R_n=\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \quad (n=0,\ 1, 2, \ldots).$$

Dans cette Note, nous allons nous occuper des conditions de validité pour chacune des relations asymptotiques

$$S_n \sim a_n\,(n\to+\infty);\ R_n\sim a_n\ (n\to+\infty),$$

et aussi, plus généralement, pour chacune des égalités suivantes

$$\text{(I)} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=w; \qquad\qquad \text{(II)} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{R_n}{a_n}=w,$$

w étant un nombre complexe donné. Appelons *cas complexe* le cas où $a_n\in \mathbf{C}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ et $w\in\mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ désignant l'ensemble des nombres complexes, et *cas réel* le cas où $a_n\in\mathbf{R}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ et $w\in\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ désignant l'ensemble des nombres réels. Dans le cas réel nous allons considérer aussi (I) et (II) avec les valeurs $w=+\infty$ et $w=-\infty$.

Par le symbole $\alpha_n\uparrow+\infty$ nous désignons ici le fait que la suite de nombres réels $\alpha_n\,(n=0, 1, 2, \ldots)$ croît *strictement* pour n suffisamment grand et tend vers $+\infty$, et par $\alpha_n\downarrow 0$ le fait qu'elle décroît *strictement* pour n suffisamment grand et tend vers 0.

1. Dans les considérations qui suivent nous nous appuyons, entre autre, sur les résultats connus suivants:

Théorème *A* (*théorème de Stolz*). *Soit* $\alpha_n \in \mathbf{R}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *et* $\beta_n \uparrow +\infty$. *Alors on a*

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\beta_n - \beta_{n-1}} \leq \varliminf_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\beta_n - \beta_{n-1}}.$$

En particulier, de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\beta_n - \beta_{n-1}} = l$ *(l nombre réel,* $+\infty$ *ou* $-\infty$*) résulte* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = l$, *l'assertion inverse n'étant pas vraie.*

Théorème *B* (voir, par exemple, [1], p. 127 – 128). *Sous les conditions* $\alpha_n \in \mathbf{R}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ *et* $\beta_n \downarrow 0$, *toutes les assertions du théorème A sont valables.*

Le théorème suivant ([5], partie première, chapitre IV, problème №178) généralise une partie des assertions de notre théorème 2.

Théorème *C*. *Supposons que*: 1° $a_n, b_n \in \mathbf{C}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$; 2° $a_n \neq 0$ *pour n suffisamment grand*; 3° *la série* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$ *ait le rayon de convergence* $r > 0$. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \zeta \wedge |\zeta| < r$$

entraîne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = f(\zeta).$$

Passant à nos résultats, nous allons démontrer tout d'abord l'analogue suivant du théorème *C*, lequel généralise aussi une partie des assertions du théorème 2.

Théorème *1*. *Sous les conditions 1° – 3° du théorème C*,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \zeta \wedge |\zeta| < r$$

entraîne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k b_{k-n} = f(\zeta).$$

Démonstration. Sous les conditions 1° – 3°, soit $|\zeta| < \rho < r$. Il existe alors un nombre naturel n_0 tel que l'on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \rho \quad (n \geqslant n_0)$$

et par suite

$$\left|\frac{a_{n+k}}{a_n}\right| \leq \rho^k \quad (n \geqslant n_0;\ k \geqslant 0).$$

Par conséquent, pour un nombre naturel m arbitrairement choisi, on a

$$\Delta_n \equiv \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k b_{k-n} - f(\zeta) \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} b_k - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \zeta^k \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=0}^{m} b_k \left(\frac{a_{n+k}}{a_n} - \zeta^k \right) \right| + \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k| \left| \frac{a_{n+k}}{a_n} \right| + \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k| \, |\zeta|^k$$

$$\text{(2)} \qquad \leq \left| \sum_{k=0}^{m} b_k \left(\frac{a_{n+k}}{a_n} - \zeta^k \right) \right| + 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k| \, \rho^k \quad (n \geqslant n_0).$$

Vu que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} = \zeta^k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

on obtient de (2), en y faisant tendre n vers $+\infty$,

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \; \Delta_n \leq 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k| \, \rho^k,$$

et puis, en faisant $m \to +\infty$,

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \; \Delta_n \leq 0,$$

c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} \Delta_n = 0$, c.q.f.d.

2. Nos résultats concernant les conditions sous lesquelles se réalise (I) ou (II) sont contenus dans les théorèmes 2–4. Notons qu'ils géneralisent et complètent plusieurs résultats d'autres auteurs, par exemple la première assertion du théorème 33 (page 48) dans [4].

Théorème 2. *Dans le cas complexe et pour* $\mathrm{Re}\,(w) \neq \frac{1}{2}$:

1° *on a* (I) *si et seulement si*

$$\text{(I')} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w}{w-1} \wedge S = 0 \quad \textit{dans le cas où la série (1) converge,}$$

où la première égalité doit être interprétée comme $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ *si* $w = 1$;

2° *on a* (II) *si et seulement si*

$$\text{(II')} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w-1}{w} \wedge \textit{ la série (1) converge.}$$

Remarque. Étant donné que

$$\left| \frac{w}{w-1} \right| < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(w) < \frac{1}{2}, \qquad \left| \frac{w}{w-1} \right| > 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(w) > \frac{1}{2},$$

la seconde partie de la condition (I') *(le second terme de cette conjonction) peut être remplacée par*

$$\text{“}S = 0 \;\; si \;\; \mathrm{Re}\,(w) < \frac{1}{2}\text{”},$$

et la seconde partie de (II') *par*

$$\text{“}\mathrm{Re}\,(w) > \frac{1}{2}\text{”}.$$

Avant de passer à la démonstration du théorème, remarquons qu'on a immédiatement, d'après ce qui précède, le

Corollaire *1. Si* $\operatorname{Re}(w) < \frac{1}{2}$, *l'égalité* (II) *n'est pas possible.*

Nous formulons à part, sous titre de corollaires, deux cas particuliers du théorème 2 qui nous semblent d'intérêt particulier,

Corollaire *2. Dans le cas complexe:*

1° $S_n \sim a_n \quad (n \to +\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0;$

2° $R_n \sim a_n \quad (n \to +\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$

Corollaire *3. Dans le cas complexe:*

1° $|S_n| = o(|a_n|) \ (n \to +\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \wedge S = 0;$

2° $|R_n| = o(|a_n|) \ (n \to +\infty)$ *n'est pas possible.*

Démonstration du théorème 2.

1° On a

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{a_n + S_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{S_{n-1}}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_n};$$

par conséquent, (I) avec $w \neq 1$ entraîne

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{S_{n-1}}{a_{n-1}}}{\dfrac{S_n}{a_n} - 1} = \frac{w}{w-1},$$

et avec $w = 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\dfrac{S_{n-1}}{a_{n-1}}}{\dfrac{S_n}{a_n} - 1} \right| = +\infty.$$

La première partie de la condition (I′) est donc nécessaire. La nécessité de sa seconde partie est évidente.

Supposons que l'on ait, avec $\operatorname{Re}(w) > \frac{1}{2}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w}{w-1}. \tag{3}$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{w-1}{w} \quad \text{et} \quad \left| \frac{w-1}{w} \right| < 1.$$

Par conséquent, en appliquant le théorème C au cas où $b_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, c'est-à-dire où $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = f\left(\frac{w-1}{w}\right) = f\left(1 - \frac{1}{w}\right) = \frac{1}{1 - \left(1 - \dfrac{1}{w}\right)} = w.$$

Enfin, si l'on a (3), $\operatorname{Re}(w) < \dfrac{1}{2}$ et $S = 0$, alors, d'après l'assertion 2° (qu'on va démontrer tout de suite),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{S - S_n}{a_n} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{R_{n+1}}{a_n} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = 1 - \frac{1}{1 - \dfrac{w}{w-1}} = w.$$

2° Il est évident que la seconde partie de la condition (II') est nécessaire pour (II). La nécessité de la première partie résulte de

$$\frac{R_n}{a_n} = 1 + \frac{R_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Supposons la condition (II') remplie. Alors l'application du théorème 1 au cas où $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ donne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = f\left(\frac{w-1}{w}\right) = w. -$$

C'est au cas "singulier" où $\operatorname{Re}(w) = \dfrac{1}{2}$ que se rapporte le

Théorème 3. *Dans le cas complexe, pour tout* $w \in \mathbf{C}$ *satisfaisant à*

(4) $$\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{2}:$$

1° *la condition* (I') *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* (I);

2° *la condition* (II') *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* (II).

En particulier, s'il s'agit du cas réel avec $w = \dfrac{1}{2}$:

3° *la condition*

$$(\mathrm{I}'')\quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = -1 \left(= \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} \right) \wedge \dfrac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+1}+a_{n+2}} \ \textit{converge (vers } -1) \\ \qquad \wedge \left[|a_n| \uparrow +\infty \vee (|a_n| \downarrow 0 \wedge S = 0) \right] \end{cases}$$

est suffisante pour (I);

4° *la condition*

$$(\mathrm{II}'')\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1 \left(= \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}} \right) \wedge \frac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+1}+a_{n+2}} \ \textit{converge (vers } -1) \wedge |a_n| \downarrow 0$$

est suffisante pour (II).

Remarque. Les mots „vers -1“ dans (I″) et (II″) sont mis entre parenthèses puisque, d'après les autres parties de chacune des conditions (I″) et (II″), -1 est, dans les deux cas, la seule possible valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+1}+a_{n+2}}$; on établit aisément ce fait au moyen des théorèmes *A* et *B*.

Démonstration. La nécessité des conditions (I′) et (II′) pour (I) et (II), respectivement, résulte des parties correspondantes da la démonstration du théorème 1.

Étant donné que

$$Re(w) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{w}{w-1} = e^{\theta i} \text{ avec } \theta \in (0, 2\pi),$$

l'exemple de la suite

$$(5)\qquad a_n = e^{n\theta i} \, (n = 0, 1, 2, \ldots; 0 < \theta < 2\pi)$$

montre que pour aucun w satisfaisant à (4) la condition (I′) n'est suffisante pour (I). En effet, dans le cas de la suite (5) on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{\theta i},$$

et la suite

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{1}{e^{n\theta i}} \frac{e^{(n+1)\theta i}-1}{e^{\theta i}-1} = \frac{1}{e^{\theta i}-1} (e^{\theta i} - e^{-n\theta i}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ne converge pas. Afin de prouver que pour aucun w satisfaisant à (4) la condition (II′) n'est suffisante pour (II), remarquons que, pour tout $\theta \in (0, 2\pi)$, la suite $e^{n\theta i} (n=0, 1, 2, \ldots)$ a 1 comme point d'accumulation. Soit $\theta \in (0, 2\pi)$ donné et posons

$$a_k = \frac{1}{n+1} e^{k\theta i} \quad (p_n \leqslant k < p_{n+1};\ n=0, 1, 2, \ldots),$$

les nombres $0=p_0<p_1<p_2< \cdots$ étant choisis de manière que l'on ait

$$\left| \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} e^{k\theta i} \right| = \left| \frac{1}{e^{\theta i}-1} \right| \left| e^{(p_{n+1}-p_n)\theta i} - 1 \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} (n=0, 1, 2, \ldots),$$

ce qui est possible, d'après la remarque précédente. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ est convergente (critère de Dirichlet) et, évidemment,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{\theta i} \left(= \frac{w-1}{w} \right).$$

Cependant,

$$\left| \frac{R_{p_n}}{a_{p_n}} \right| = \frac{\left| \sum_{k=n}^{+\infty} (k+1)^{-1} \sum_{\nu=p_k}^{p_{k+1}-1} e^{\nu\theta i} \right|}{(n+1)^{-1}} \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} (k+1)^{-1} \cdot (k+1)^{-2}}{(n+1)^{-1}} = \frac{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{(n+1)^{-1}} \to 0 \, (n \to +\infty),$$

et

$$\frac{R_{p_n-1}}{a_{p_n-1}} = \frac{a_{p_n-1} + R_{p_n}}{a_{p_n-1}} = 1 + \frac{R_{p_n}}{a_{p_n}} \cdot \frac{a_{p_n}}{a_{p_n-1}} \to 1 \, (n \to +\infty),$$

de sorte que le rapport $\frac{R_n}{a_n}$ ne converge pas dans ce cas.

Passons à la démonstration de l'assertion relative au cas réel.

3° Les conditions (II″) peuvent être exprimées autrement de la manière suivante: on a

$$(6) \qquad a_n = (-1)^n \alpha_n \, (n=0, 1, 2, \ldots), \text{ ou } a_n = (-1)^{n+1} \alpha_n \, (n=0, 1, 2, \ldots);$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$; $\frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}}$ converge (vers 1); $\alpha_n \uparrow +\infty$, ou bien $\alpha_n \downarrow 0$ et $S=0$. Sans diminuer la généralité, on peut se borner à la première des possibilités (6). Si $\alpha_n \uparrow +\infty$, on a, d'après le théorème A,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{2n}}{a_{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{2k} - \alpha_{2k-1})}{\alpha_{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}}{\alpha_{2::} - \alpha_{n-2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}}{\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1} + \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n-2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n-2}}{\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

et par suite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{2n+1}}{a_{2n+1}}=1+\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{2n}}{a_{2n}}\cdot\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}=1+\frac{1}{2}(-1)=\frac{1}{2}.$$

Il résultera de 4° que la condition (I″) est aussi suffisante si $\alpha_n\downarrow 0$ et $S=0$.

4° Sous la condition (II″) et en choisissant la première des possibilités (6), on a, d'après le théorème B,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{2n}}{a_{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(\alpha_{2k}-\alpha_{2k+1})}{\alpha_{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_{2n}-\alpha_{2n+1}}{\alpha_{2n}-\alpha_{2n+2}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{\alpha_{2n+1}-\alpha_{2n+2}}{\alpha_{2n}-\alpha_{2n+1}}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{2n-1}}{a_{2n-1}}=1+\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{2n}}{a_{2n}}\cdot\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.-$$

Le thèorème suivant traite, dans le cas réel, les égalités (I) et (II) avec $w=+\infty$ et $w=-\infty$.

Théorème *4. Dans le cas réel:*

1° *chacune des conditions suivantes*

($I'_{+\infty}$) $a_n>0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S>0$;

($I''_{+\infty}$) $a_n<0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S<0$;

($I'''_{+\infty}$) $\begin{cases} a_n \text{ est de signe constant pour } n \text{ suffisamment grand} \\ \wedge\,(1) \text{ diverge} \wedge \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1 \end{cases}$

est suffisante pour

($I_{+\infty}$) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=+\infty;$$

2° *chacune des conditions*

($I'_{-\infty}$) $a_n>0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S<0$;

($I''_{-\infty}$) $a_n<0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S>0$;

($I'''_{-\infty}$) (1) *converge avec* $S=0\wedge\underline{\lim}_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$

est suffisante pour

($I_{-\infty}$) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=-\infty;$$

3° *l'inégalité*

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1$$

est une condition nécessaire pour ($I_{+\infty}$), *de même que pour* ($I_{-\infty}$);

4° *la condition*

$$(\mathrm{II}'_{+\infty}) \qquad (1) \text{ converge } \wedge \varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

est suffisante pour

$$(\mathrm{II}_{+\infty}) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = +\infty;$$

5° *l'égalité*

$$(\mathrm{II}_{-\infty}) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = -\infty$$

n'est pas possible.

Avant la démonstration, citons une conclusions de 1°, 2°, et 4°.

Corollaire *4. L'égalité*

$$(7) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

entraîne $(\mathrm{I}_{+\infty})$, *ou* $(\mathrm{I}_{-\infty})$, *suivant qu'il s'agit des cas où* (1) *diverge ou converge avec* $a_n S > 0$ *pour n suffisamment grand, d'une part, ou du cas où* (1) *converge avec* $a_n S \leqslant 0$ *pour n suffisamment grand, d'autre part. L'égalité* (7) *et la convergence de* (1) *entraînent* $(\mathrm{II}_{+\infty})$.

Démonstration du théorème *4.*

1° Il est évident que chacune des conditions $(\mathrm{I}'_{+\infty})$ et $(\mathrm{I}''_{+\infty})$ est suffisante pour $(\mathrm{I}_{+\infty})$. La condition $(\mathrm{I}'''_{+\infty})$ entraîne, d'après le théorème *A*,

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{S_n} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} = \varlimsup_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) =$$

$$= 1 - \varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 - 1 = 0,$$

d'où, étant donné que, sous cette condition, $\frac{a_n}{S_n} > 0$ pour n suffisamment grand,

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = +\infty, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = +\infty.$$

2° La suffisance de chacune des conditions $(\mathrm{I}'_{-\infty})$ et $(\mathrm{I}''_{-\infty})$ pour $(\mathrm{I}_{-\infty})$ est évidente. La condition $(\mathrm{I}'''_{-\infty})$ entraîne, d'après le théorème *B*,

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{R_{n+1}} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = 0,$$

et par conséquent, puisque $\frac{a_n}{R_{n+1}} > 0$ pour n suffisamment grand,

$$\varliminf_{n \to +\infty} \frac{R_{n+1}}{a_n} = +\infty,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{S - R_{n+1}}{a_n} = - \lim_{n \to +\infty} \frac{R_{n+1}}{a_n} = -\infty.$$

3° L'inégalité

$$\varliminf_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \tag{8}$$

entraîne la divergence de (1) et la constance du signe de a_n pour n suffisamment grand. Il en résulte $\frac{S_n}{a_n} > 0$ pour n suffisament grand, d'où l'impossiblité de $(\mathrm{I}_{-\infty})$. L'égalité $(\mathrm{I}_{+\infty})$ est aussi impossible dans le cas (8), puisqu'on a alors, d'après le théorème A,

$$\varliminf_{n \to +\infty} \frac{a_n}{S_n} \geqslant \varliminf_{n \to +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} = \varliminf_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$
$$= 1 - \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{\varliminf\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}} > 0,$$

c'est-à-dire

$$\varlimsup_{n \to +\infty} \frac{S_n}{a_n} < +\infty.$$

4° La condition $(\mathrm{II}'_{+\infty})$ entraîne la constance du signe de a_n pour n suffisamment grand, et l'on a, d'après le théorème B,

$$\varlimsup_{n \to +\infty} \frac{a_n}{R_n} \leqslant \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} = \varlimsup_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1 - \varliminf_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

d'où, puisque $\frac{a_n}{R_n} > 0$ pour n suffisamment grand,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{R_n}{a_n} = +\infty.$$

5° L'égalité

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{R_n}{a_n} = -\infty \tag{$\mathrm{II}_{-\infty}$}$$

entraîne

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{R_n}{a_n} - 1}{\frac{R_{n+1}}{a_{n+1}}} > 0 \text{ pour } n \text{ suffisamment grand,} \tag{9}$$

mais (9) est évidemment incompatible avec $(\mathrm{II}_{-\infty})$.

3. *Autres corollaires et applications*

3.1. Mettant à profit les relations

$$\frac{S_{n-1}}{a_n}=\frac{S_n}{a_n}-1 \quad \text{et} \quad \frac{R_{n+1}}{a_n}=\frac{R_n}{a_n}-1,$$

on peut, pour les égalités

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n-1}}{a_n}=w \quad et \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n+1}}{a_n}=w,$$

formuler les énoncés correspondant aux théorèmes $2-4$.

3.2. En ce qui concerne la question plus générale de la convergence et des limites des rapports

$$\frac{S_{n+m}}{a_n},\quad \frac{S_{n-m}}{a_n},\quad \frac{R_{n+m}}{a_n} \quad \text{et} \quad \frac{R_{n-m}}{a_n},$$

avec un nombre naturel m fixe, c'est au moyen des égalités

$$\frac{S_{n+m}}{a_n}=\frac{S_n}{a_n}+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{a_{n+\nu}}{a_n},\quad \frac{S_{n-m}}{a_n}=\frac{S_n}{a_n}-\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{a_{n-\nu}}{a_n},$$

$$\frac{R_{n+m}}{a_n}=\frac{R_n}{a_n}-\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{a_{n+\nu}}{a_n},\quad \frac{R_{n-m}}{a_n}=\frac{R_n}{a_n}+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{a_{n-\nu}}{a_n}$$

qu'on déduit des théorèmes $2-4$ la proposition suivante:

C o r o l l a i r e 5. *Soit m un nombre naturel fixe. Alors:*

1° (I) *avec* $w\in\mathbf{C}\setminus\{1\}$ *entraîne*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n+m}}{a_n}=w\left(\frac{w}{w-1}\right)^m; \tag{10}$$

2° (I) *avec* $w\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$ *entraîne*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n-m}}{a_n}=w\left(\frac{w-1}{w}\right)^m;$$

3° (II) $\left(avec\ \operatorname{Re}(w)\geqslant\frac{1}{2}\right)$ *entraîne*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n+m}}{a_n}=w\left(\frac{w-1}{w}\right)^m;$$

4° (II) *avec* $w\neq1$ $\left(et\ \operatorname{Re}(w)\geqslant\frac{1}{2}\right)$ *entraîne*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n-m}}{a_n}=w\left(\frac{w}{w-1}\right)^m. \tag{11}$$

5° *Dans le cas réel avec* a_n *de signe constant pour* n *suffisamment grand, les formules* (10) *et* (11) *sont valables même pour* $w=1$, *si l'on attribue alors à* $\frac{w}{w-1}$ *la valeur* $+\infty$. *Dans le cas réel avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, *on a aussi*:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n+m}}{a_n}=+\infty \quad si \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n}=+\infty, \; et \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{R_{n-m}}{a_n}=+\infty \, si \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n}=+\infty$$

(voir le corollaire 4).

3.2.1. On a immédiatement la conséquence suivante:

Corollaire. *6.* 1° (I) *avec* $w \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ *entraîne, dans le cas complexe*:

$$\lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n+m}}{a_n} \begin{cases} =\infty, & si \; Re(w)>\frac{1}{2}, \\ =0, & si \; Re(w)<\frac{1}{2}, \\ n'existe \; pas, & si \; Re(w)=\frac{1}{2}; \end{cases}$$

dans le cas réel:

$$\lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n+m}}{a_n} \begin{cases} =+\infty, & si \; w>1, \\ =0, & si \; w<\frac{1}{2}, \\ n'existe \; pas, & si \; \frac{1}{2}\leqslant w<1. \end{cases}$$

2° (I) *avec* $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *entraîne,*

dans le cas complexe:

$$\lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n-m}}{a_n} \begin{cases} =0, & si \; Re\;(w)>\frac{1}{2}, \\ =\infty, & si \; Re(w)<\frac{1}{2}, \\ n'existe \; pas, & si \; Re(w)=\frac{1}{2}; \end{cases}$$

dans le cas réel:

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n-m}}{a_n}\begin{cases} =0, \; si\; w>\dfrac{1}{2}, \\ =-\infty, \; si\; w<0, \\ n'existe\ pas,\; si\; 0<w\leqslant\dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

3° (II) $\left(avec\ Re(w)\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$ *entraîne, dans les deux cas (complexe et réel),*

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n+m}}{a_n}\begin{cases} =0, \; si\; Re(w)>\dfrac{1}{2}, \\ n'existe\ pas,\; si\; Re(w)=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

4° (II) *avec* $w\neq 1$ $\left(et\ Re(w)\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$ *entraîne,*

dans le cas complexe:

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n-m}}{a_n}\begin{cases} =\infty, \; si\; Re\ (w)>\dfrac{1}{2}, \\ n'existe\ pas,\; si\; Re(w)=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

dans le cas réel:

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{R_{n-m}}{a_n}\begin{cases} =+\infty, \; si\; w>1, \\ n'existe\ pas,\; si\; \dfrac{1}{2}\leqslant w<1. \end{cases}$$

Remarque. Il faut tenir compte du fait que le sens de la notion d'existence de limite varie quelque peu suivant qu'il s'agit du cas complexe ou du cas réel. Par exemple, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2)^n=\infty$ si l'on considère la suite $(-2)^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ comme suite complexe (dans le cas complexe), et la même suite n'a pas de limite si elle est considérée comme suite réelle (dans le cas réel)

3.3. *Séries de puissances*

L'application du théorème 2 à la série de puissances

$$(12) \qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ avec } a_n\neq 0 \text{ pour } n \text{ suffisamment grand,}$$

conduit au résultat suivant:

Corollaire 7. *Soit* $f(z)$ *une série de puissances satisfaisant à* (12).

1° *Pour que la suite*

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{a_n z^n} \quad (n=0,\,1,\,2,\ldots)$$

converge vers un nombre complexe pour un $z\neq 0$ *au moins, il faut que l'on on ait*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\zeta,\ \textit{avec}\ \zeta\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}. \tag{13}$$

Si la condition (13) *est remplie, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{a_n z^n}=\frac{\zeta z}{\zeta z-1}\quad \textit{pour}\ |z|>\frac{1}{|\zeta|}=r\ \textit{et pour}\ 0<|z|<r\ \textit{tel que}\ f(z)=0,$$

ou

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{a_n z^n}=1\ \textit{pour}\ z\neq 0,$$

suivant que $\zeta\in\mathbf{C}$ *ou* $\zeta=\infty$, *respectivement.*

2° *Pour que la suite*

$$\frac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^k}{a_n z_n} \quad (n=0,\,1,\,2,\ldots)$$

converge vers un nombre complexe pour un $z\neq 0$ *au moins, il faut que l'on ait*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\zeta\in\mathbf{C}. \tag{14}$$

Si la condition (14) *est remplie, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^k}{a_n z_n}=\frac{1}{1-\zeta z}\quad \textit{pour}\ 0<|z|<\frac{1}{|\zeta|}=r.$$

3.3.1. On a, en particulier, la proposition suivante:

Corrollaire *8. Soit* $a_n\neq 0$ *pour* n *suffisamment grand.*

1° *Pour qu'on ait*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \sim a_n z^n \qquad (n\to+\infty) \tag{15}$$

pour un $z\neq 0$ *au moins il faut, et pour que* (15) *soit valable pour tout* $z\neq 0$ *il suffit, que l'on ait*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=0.$$

2° *Pour qu'on ait*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^k \sim a_n z^n \quad (n \to +\infty) \tag{16}$$

pour un $z \neq 0$ *au moins il faut, et pour que* (16) *soit valable pour tout* $z \neq 0$ *il suffit, que l'on ait*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

3.3.2. D'après *3.3.1, si le nombre* $\theta_n \, (0 < \theta_n < 1)$ *figure dans la formule de Mac-Laurin appliquée à la fonction* e^x:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta_n x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

alors, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ *fixe,* $\lim_{n \to +\infty} \theta_n = 0$.

On a les propositions analogues pour la formule de Mac-Laurin appliquée aux fonctions $\sin x$ et $\cos x$.

3.3.3. On a aussi le résultat suivant concernant les séries de puissances lacunaires:

Corollaire *9. Soit* $a_n \neq 0$ *pour* n *suffisamment grand et soit* $\varphi(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *une suite strictement croissante d'éléments de* $N_0 = \{0\} \cup N$ *telle que* $\varphi(n+1) - \varphi(n) \to +\infty \quad (n \to +\infty)$. *Alors*:

1° *si* $\varliminf_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 0$, *on a*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^{\varphi(k)} \sim a_n z^{\varphi(n)} \quad \textit{pour} \; |z| > 1,$$

2° *si* $\varlimsup_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < +\infty$, *on a*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^{\varphi(k)} \sim a_n z^{\varphi(n)} \quad \textit{pour} \; |z| < 1.$$

3.4. Le résultat suivant est un cas particulier de la partie du théorème 3 relative au cas réel:

Soit $0 < \omega < 1$ *et soient*

(17) $\alpha, \beta, \gamma_\nu \; (\nu = 1, \ldots, p)$ *des nombres réels tels que* $|\alpha| + |\beta| + \sum_{\nu=1}^{p} |\gamma_\nu| > 0$.

Si le premier des nombres (17) *différents de zéro est positif, on a*

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k e^{\alpha k^\omega} k^\beta \prod_{\nu=1}^{p} (\log_\nu k)^{\gamma_\nu} \sim \frac{(-1)^n}{2} e^{\alpha n^\omega} n^\beta \prod_{\nu=1}^{p} (\log_\nu n)^{\gamma_\nu} \equiv \frac{1}{2} a_n \quad (n \to +\infty)$$

($\log_\nu x \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\log\log\cdots\log x}_{\nu \text{ fois}}$; *m un nombre naturel suffisamment grand*). *Si le premier des nombres* (17) *différents de zéro est négatif, alors*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \sim \frac{1}{2} a_n \quad (n \to +\infty).$$

En effet, on vérifie sans difficulté que a_n donné par

$$(18) \qquad a_n = (-1)^n e^{\alpha n} n^\beta \prod_{\nu=1}^{p} (\log_\nu n)^{\gamma_\nu}$$

satisfait, selon le cas, à la condition (I''), ou à la condition (II'').

Notons que l'expression (18) pour a_n dans l'énoncé précédent pourrait être bien plus générale: par exemple, on peut remplacer n^β par $[R(n)]^\beta$, où $R(x)$ est une fonction rationnelle tendant vers $+\infty$ avec x.

3.5. Les résultats de ce travail peuvent être appliqués à beaucoup de problèmes relatifs aux limites des suites de nombres complexes ou réels. Par exemple, le problème suivant [3]:

»Déterminer la limite de la suite

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k} \quad (n=1, 2, \ldots)«$$

- a été résolu dans [2] sous une forme plus générale:

»Déterminer le comportement asymptotique de la suite

$$(19) \qquad \sum_{k=2}^{n} a^{k^\alpha} k^\beta (\log k)^\gamma \quad (n=2, 3, \ldots;\ a>1;\ \alpha \geqslant 1;\ \beta, \gamma \text{ nombres réels}).«$$

D'après nos résultats correspondants, on peut déterminer immédiatement le comportement asymptotique de la suite (19) où a est un nombre complexe satisfaisant à $|a|>1$, et l'on peut généraliser cette considération encore plus, dans diverses directions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. D. Adamović, *Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata* (I), Matematički vesnik 3 (18), 1966, sv. 2, p. 123—136,

[2] D. D. Adamović, *Solution du problème N° 190*. Matematički vesnik 8 (23), 1971, sv. 3, p. 96—97.

[3] K. M. Brown, *Problem E* 2115, The American Mathematical Monthly, October 1968.

[4] G. H. Hardy, *Orders of Infinity*, Cambridge University Press, 1954.

[5] Г. Полия и Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, Москва, 1956.