PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 14 (28), 1972. pp. 149—156

SUR LE MOUVEMENT ADIABATIQUE D'UN GAZ PARFAIT EN COUCHES PARALLÈLES

K. Voronjec

(Communiqué le 8 Mars 1972)

Dans un travail récent [1] ont été données les conditions les plus générales auxquelles doivent satisfaire la vitesse $\vec{v}$ le tourbillon $2\vec{\omega}$ et la densité ρ dans le cas d'un mouvement permanent adiabatique en trois dimensions d'un gaz parfait. L'équation de continuité $\operatorname{div}(\rho\,\vec{v})=0$ permet d'introduire deux fonctions de courant $\psi_1(x, y, z)$ et $\psi_2(x, y, z)$ par l'équation

$$\rho\,\vec{v}=[\operatorname{grad}\psi_1\ \operatorname{grad}\psi_2] \tag{1}$$

et il est facile à voir que les lignes de courant sont données par $\psi_1=\text{const.}$, $\psi_2=\text{const.}$ Le mouvement étant adiabatique et gaz non visqueux l'équation d'énergie détermine la pression p sous la forme

$$p=\rho^{\varkappa}\,\varepsilon(\psi_1, \psi_2), \tag{2}$$

où ε est une fonction de ψ_1 et ψ_2, liée à l'entropie. Enfin, la transformation habituelle (v. p. ex. [2]) des équations d'Euler permet de trouver les projections de tourbillon sur les directions de grad ψ_1 et de grad ψ_2

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\vec{\omega}}{\rho}\operatorname{grad}\psi_1\right)&=\frac{\partial\lambda}{\partial\psi_2}-\frac{1}{\varkappa-1}\,\rho^{\varkappa-1}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi_2},\\ -\left(\frac{2\vec{\omega}}{\rho}\operatorname{grad}\psi_2\right)&=\frac{\partial\lambda}{\partial\psi_1}-\frac{1}{\varkappa-1}\,\rho^{\varkappa-1}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi_1},\end{aligned} \tag{3}$$

avec λ une nouvelle fonction arbitraire de ψ_1 et ψ_2. L'équation généralisée de Bernoulli donne la condition

$$v^2=2\left(\lambda-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,\rho^{\varkappa-1}\,\varepsilon\right), \tag{4}$$

à laquelle doit satisfaire la vitesse. Quelques conslusions ont été tirées des équations déduites dans le travail cité [1].

$\psi_1=\text{const.}$ et $\psi_2=\text{const.}$ étant des surfaces de courant, on voit que le problème peut se rapporter au mouvement en couches parallèles sur des surfaces courbes. Supposons qu'il existe un système de coordonnées curvilignes orthogonales q_1, q_2 et q_3, où $q_1=\text{const.}$ détermine une famille des surfaces considérées. En désignant par $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ les vecteurs-unités dans les directions des lignes de coordonnées, on voit que la projection v_1 de la vitesse $\vec{v}=\vec{e}_1 v_1+\vec{e}_2 v_2+\vec{e}_3 v_3$ est égale à 0. On peut accepter, sans aucune restriction, que la fonction ψ_1 ne dépend que de q_1 et l'équation (1) est alors équivalente à deux équations

(5) $$g_i g_3 \rho v_2 = -\psi_1' \frac{\partial \psi_2}{\partial q_3}, \quad g_i g_2 \rho v_3 = \psi_1' \frac{\partial \psi_2}{\partial q_2},$$

avec

$$g_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2, \qquad i=1,\, 2,\, 3.$$

Les formules (3) donnent les projections de tourbillon sur les directions de grad ψ_1 et de grad ψ_2 qui déterminent un plan orthogonal à la vitesse, mais la projection sur la direction de la vitesse reste arbitraire. On commence à étudier le cas où cette dernière projection est nulle. On aura ainsi une certaine analogie avec les mouvements plans et mouvements symétriques par rapport à un axe.

Désignons pour abréger

(6) $$V_2 = g_2 v_2, \quad V_3 = g_3 v_3.$$

La condition que le tourbillon

(7) $$2\vec{\omega} = \operatorname{rot}\vec{v} = \frac{\vec{e}_1}{g_2 g_3}\left(\frac{\partial V_3}{\partial q_2} - \frac{\partial V_2}{\partial q_3}\right) - \frac{\vec{e}_2}{g_3 g_1}\frac{\partial V_3}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_3}{g_1 g_2}\frac{\partial V_2}{\partial q_1}$$

soit orthogonal à la vitesse se traduit par l'équation

$$V_3 \frac{\partial V_2}{\partial q_1} - V_2 \frac{\partial V_3}{\partial q_1} = 0$$

d'où l'on tire

$$\frac{V_3}{V_2} = \text{fonct.}\,(q_2,\, q_3).$$

On peut, donc, poser

$$V_2 = \sigma(q_1, q_2, q_3)\, \overline{V}_2(q_2, q_3),$$

$$V_3 = \sigma(q_1, q_2, q_3)\, \overline{V}_3(q_2, q_3)$$

et l'expression (7) se transforme en

$$2\vec{\omega} = \frac{\vec{e}_1}{g_1 g_3}\left(\frac{\partial V_3}{\partial q_2} - \frac{\partial V_2}{\partial q_3}\right) - (v_3 \vec{e}_2 - v_2 \vec{e}_3)\frac{1}{g_1 \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial q_1}.$$

Si le facteur introduit σ ne dépend pas de q_1 le tourbillon est orthogonal à des surfaces $q_1 = \text{const.}$

Mais les résultats obtenus doivent satisfaire à l'équation de continuité. On obtient

(8) $$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\rho\sigma \frac{g_3 g_1}{g_2} \overline{V}_2\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\rho\sigma \frac{g_1 g_2}{g_3} \overline{V}_3\right) = 0$$

où $\overline{V}_2$ et $\overline{V}_3$, solutions de cette équation, ne peuvent pas dépendre de q_1. Cette condition sera accomplie si les coefficients de $\overline{V}_2$ et $\overline{V}_3$ ne contiennent q_1 que sous la forme d'un facteur commun indépendant de q_2 et q_3. On arrive ainsi à la conclusion que le rapport g_3/g_2 ne dépend pas de q_1.

Cette condition a été déjà analysée dans notre travail ancient [3], où nous avons démontré qu'elle correspond au cas où les rayons de courbure sont égaux. Donc, le mouvement traité ici ne peut se produire que sur des sphères concentriques, exception faite des mouvements avec des lignes de courant planes.

On peut maintenant poser

$$\rho\sigma g_1 = \sigma_1(q_1)\,\sigma_2(q_2, q_3)$$

et les équations (5) et (8) montrent que $\sigma_1 = \psi_1'$. Le tourbillon sera orthogonal à des surfaces $q_1 = \text{const.}$ si le rapport $\psi_1'/\rho g_1$ présente une fonction de q_2 et q_3 seulement.

Cette démonstration permet de passer à l'analyse des mouvements en couches sphériques. A la place des coordonnées sphériques habituelles r, μ, θ données par les expressions

$$x = r \sin\mu \cos\theta, \quad y = r \sin\mu \sin\theta, \quad z = r\cos\mu,$$

introduisons les coordonnées isométriques r, ν, θ, où

$$\frac{d\mu}{\sin\mu} = d\nu, \quad \operatorname{ch}\nu = \frac{1}{\sin\mu}.$$

On a, donc,

$$q_1 = r,\ q_2 = \nu,\ q_3 = \theta,\quad g_1 = 1,\ g_2 = g_3 = \frac{r}{\operatorname{ch}\nu},\quad V_\nu = \frac{r}{\operatorname{ch}\nu} v_\nu,\quad V_\theta = \frac{r}{\operatorname{ch}\nu} v_\theta.$$

où v_r, v_ν, v_θ sont les projections correspondantes de la vitesse.

Il est évident que dans ce cas existent sur les sphères les trajectoires $\psi_3 = \text{const.}$ orthogonales à la famille des lignes de courant $\psi_1 = \text{const.}$, $\psi_2 = \text{const.}$ Soit γ facteur intégrant qui doit être introduit pour la recherche de fonction ψ_3. On obtient, alors

$$V_\nu = -\frac{\psi_1'}{\rho}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} = \gamma\frac{\partial\psi_3}{\partial\nu}, \quad V_\theta = \frac{\psi_1'}{\rho}\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial\nu} = \gamma\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}. \tag{9}$$

On peut supposer que les fonctions ψ_2 et ψ_3 ne dépendent pas de r, mais le paramètre γ et la densité ρ peuvent être fonctions de trois coordonnées r, ν, θ. Les équations (9) montrent que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho\gamma}{\psi_1'}\right) = 0$$

ce qui s'ensuit aussi de l'équation de continuité. Si γ ne dépend pas de r, le tourbillon reste toujours orthogonal à des surfaces sphériques. Dans ce cas la densité ρ peut être décomposée en deux facteurs $\rho_1(r)\,\rho_2(\nu, \theta)$. Les projections v_ν et v_θ de la vitesse sont inversement proportionnelles à r et le tourbillon à r^2. Nous laissons à part ce cas car il a été analisé, d'un autre point de vue, dans le travail [3] déjà cité.

Pour tirer quelques conclusions des formules obtenus il est opportun de passer à des coordonnées ψ_1, ψ_2, ψ_3. Les conditions (3) deviennent alors

$$(10)\qquad \begin{aligned} -\left(\frac{2\vec{\omega}}{\rho}\operatorname{grad}\psi_2\right) &= v^2\frac{\partial \ln\gamma}{\partial\psi_1} = \frac{\partial\lambda}{\partial\psi_1} - \frac{1}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi_1},\\ \left(\frac{2\vec{\omega}}{\rho}\operatorname{grad}\psi_1\right) &= v^2\frac{\partial \ln\gamma}{\partial\psi_2} = \frac{\partial\lambda}{\partial\psi_2} - \frac{1}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi_2}. \end{aligned}$$

Commençons par l'étude de cas où les quantités ε et λ sont indépendentes l'une de l'autre. En introduisant les dérivées de $\ln\gamma$ par rapport à ε et λ à la place des dérivées par rapport à ψ_1 et ψ_2 on obtient (10) sous la forme

$$(11)\qquad \begin{aligned} \left(v^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\gamma - 1\right)\frac{\partial\lambda}{\partial\psi_1} + \left(v^2\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln\gamma + \frac{1}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi_1} &= 0,\\ \left(v^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\gamma - 1\right)\frac{\partial\lambda}{\partial\psi_2} + \left(v^2\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln\gamma + \frac{1}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi_2} &= 0. \end{aligned}$$

Il faut accepter les solutions triviales

$$v^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\gamma - 1 = 0,\qquad v^2\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln\gamma + \frac{1}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1} = 0$$

puisqu'autrement les fonctions ε et λ ne sont plus indépendentes. La compatibilité des solutions trouvées amène à l'équation

$$\lambda\frac{\partial\rho}{\partial\lambda} + \varkappa\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon} + \rho = 0,$$

où ψ_3 peut être considéré comme un paramètre. Cette équation peut être résolue par le procédé habituel et donne comme solution

$$u = \varepsilon\lambda^{-\varkappa},\qquad \rho\lambda = f(u, \psi_3).$$

où f est une fonction arbitraire, après quoi on trouve facilement

$$\gamma^2 = \lambda f_1(u, \psi_3)$$

avec

$$\ln f_1 = -\frac{1}{\varkappa-1}\int\frac{f^{\varkappa-1}\,du}{1-\dfrac{\varkappa}{\varkappa-1}uf^{\varkappa-1}}.$$

L'intégrale doit être calculée en supposant ψ_3 comme un paramètre. La constante d'intégration, fonction de ψ_3, peut être supprimée car γ se détermine à un facteur dépendant de ψ_3 près.

Si ε et λ ne sont pas deux fonctions indépendentes on suppose que ε est une fonction de λ et à la place des équations (11) on obtient une seule équation

$$(12)\qquad v^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\gamma = 1 - \frac{1}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\varepsilon',$$

d'où l'on tire les mêmes conclusions qu'avant mais avec u fonction de λ.

Il est opportun d'introduire les fonctions ϑ et V à la place de V_ν et V_θ par les formules

$$V^2 = V_\nu^2 + V_\theta^2, \quad \operatorname{tg}\vartheta = V_\theta / V_\nu,$$

car V est lié à v^2 déterminé par (4). Les équations (9) peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_3} = -\frac{\rho\gamma}{\psi_1'} \frac{\partial}{\partial \psi_2} \ln\left(\frac{1}{\gamma} V\right). \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_2} = \frac{\psi_1'}{\rho\gamma} \frac{\partial}{\partial \psi_3} \ln\left(\frac{\rho}{\psi_1'} V\right), \tag{13}$$

Dans ce qui suit nous tâcherons de satisfaire à toutes les conditions par la relation $\rho\lambda = 1$. Il s'ensuit alors de (9) que $\psi_1' = \text{const.}$ et on peut poser $\psi_1' = -1$. Les équations (9) deviennent

$$\rho V_\nu = \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_3}{\partial \nu}, \quad \rho V_\theta = -\frac{\partial \psi_2}{\partial \nu} = \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta}, \tag{9'}$$

et (13) donnent

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_2} = -\frac{\partial}{\partial \psi_3} \ln(\rho V), \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_3} = \frac{\partial}{\partial \psi_2} \ln(\rho V), \tag{13'}$$

Les fonctions ψ_2 et ψ_3 sont, donc, deux fonctions harmoniques satisfaisant à des conditions de Cauchy par rapport à des variables ν et θ. On peut former une fonction analytique $w(z) = \psi_3 + i\psi_2$ de variable complexe $z = \nu + i\theta$, analogue au potentiel complexe dans le mouvement plan d'un fluide incompressible.

Il est évident que dans ce cas ε et λ ne sont plus deux fonctions indépendentes et qu'il faut appliquer l'équation (12). Cette équation donne

$$2\left(\lambda - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \rho^{\varkappa-1} \varepsilon\right) d\rho + \rho\left(1 - \frac{1}{\varkappa - 1} \rho^{\varkappa-1} \varepsilon'\right) d\lambda = 0$$

et, en l'intégrant, il faut considérer ψ_3 comme un paramètre. Dans le travail [4] nous avons analysé le mouvement plan d'un gaz sous la condition que

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \operatorname{rot}(\rho \vec{v}) = 0$$

et une équation presque identique à celle ci a été obtenue. La différence est seulement dans le fait que λ apparaît comme fonction d'une seule fonction de courant ψ et non pas de deux fonctions ψ_1 et ψ_2. Dans le travail cité nous avons accepté le facteur intégrant $\rho^m \lambda^n$ avec m et n deux constantes réelles et nous avons trouvé facilement que $2n = m - 1$ et que

$$\ln \varepsilon_m = \ln K_m + \frac{(m-1)\varkappa}{m - \varkappa} \ln \lambda$$

avec K_m constante d'intégration qui peut dépendre de m.

Après l'intégration on obtient la liaison entre ρ et λ sous la forme

$$2\rho^{m+1}\lambda^{\frac{m+1}{2}}\left[1 - \frac{K_m(m+1)\varkappa}{(m+\varkappa)(\varkappa-1)} \rho^{\varkappa-1} \lambda^{\frac{m(\varkappa-1)}{m-\varkappa}}\right] = (m+1)\mu, \tag{14}$$

avec μ une fonction arbitraire de ψ_3. On peut démontrer [5] qu'il est possible de satisfaire à toutes les conditions seulement dans le cas où la densité ne dépend pas de ψ_3, c'est-à-dire où $\mu = \text{const.}$ Par le même procédé on arrive au résultat identique dans le problème traité ici.

Prenons comme exemple le cas où $\mu = \text{const.} = 0$. Il s'ensuit de (14) que

$$\rho = a_m \lambda^{-\frac{m}{m-\varkappa}} \tag{15}$$

avec

$$a_m^{\varkappa-1} = \frac{(m+\varkappa)(\varkappa-1)}{K_m (m+1)\varkappa}$$

et $m+\varkappa/m+1$ doit être positif. La formule (4) pour la vitesse donne

$$v^2 = -2\frac{\varkappa-1}{m+1}\lambda, \tag{16}$$

d'où l'on trouve que $m < -1$. On calcule ensuite

$$\rho^2 v^2 = b_m^2 \lambda^{-m_1} \tag{17}$$

avec

$$b_m^2 = -2a_m^a \frac{\varkappa-1}{m+1}, \quad m_1 = \frac{m+\varkappa}{m-\varkappa}, \quad 0 < m_1 < 1.$$

Il est évident que l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial\psi_2^2}\ln(\rho V) + \frac{\partial^2}{\partial\psi_3^2}\ln(\rho V) = 0 \tag{18}$$

doit être satisfaite par les valeurs de v et de ρ tirées de (15) et de (16). Puisque ρv ne dépend pas de ψ_3 et

$$\frac{\partial^2}{\partial\psi_2^2}\ln\operatorname{ch}\nu + \frac{\partial^2}{\partial\psi_3^2}\ln\operatorname{ch}\nu = \frac{1}{\rho^2 V^2}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\nu} = \frac{1}{r^2\rho^2 v^2},$$

cette équation devient

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\psi_2^2} - \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\psi_2}\right)^2 + \frac{2}{b_m^2 m_1} r^{\frac{1}{2}}\lambda^{m_1} = 0. \tag{19}$$

Il est nécessaire de poser

$$\lambda = r^{\frac{2}{m_1}}\lambda_1(\psi_2)$$

et l'on arrive à

$$\frac{1}{\lambda_1}\frac{d^2\lambda_1}{d\psi_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\left(\frac{d\lambda_1}{d\psi_2}\right)^2 + \frac{2}{b_m^2 m_1}\lambda_1^{m_1} = 0.$$

Un calcul élémentaire donne

$$\lambda_1^{-\frac{m_1}{2}} = \frac{2}{Cb_m m_1}\operatorname{ch}\overline{\psi}_2$$

avec $\overline{\psi}_2 = \frac{1}{2}Cm_1(\psi_2 - \psi_{20})$. ($\psi_{20}$ — constante d'intégration). Par cette valeur de λ_1 les équations (13′) deviennent compatibles et servent à déterminer ϑ.

On retourne de nouveau à des variables indépedentes ν et θ et, en désignant par $\bar{\psi}_3$ l'expression $\bar{\psi}_3 = \frac{1}{2} C m_1 (\psi_3 - \psi_{30})$ on obtient les équations (9′) sous la forme

$$\frac{\sin\vartheta \operatorname{ch}\bar{\psi}_2}{\operatorname{ch}\nu} = -\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\nu} = \frac{\partial\bar{\psi}_3}{\partial\theta}, \quad \frac{\cos\vartheta \operatorname{ch}\bar{\psi}_2}{\operatorname{ch}\nu} = \frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\theta} = \frac{\partial\bar{\psi}_3}{\partial\nu}, \tag{20}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\nu} = \frac{\cos\vartheta \operatorname{sh}\bar{\psi}_2}{\operatorname{ch}\nu}, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\theta} = \frac{\sin\vartheta \operatorname{sh}\bar{\psi}_2}{\operatorname{ch}\nu} + \operatorname{th}\nu. \tag{21}$$

Après l'élimination de $\bar{\psi}_2$ de deux dernières formules on arrive à l'équation

$$\operatorname{tg}\vartheta \frac{\partial\vartheta}{\partial\nu} - \frac{\partial\vartheta}{\partial\theta} + \operatorname{th}\nu = 0 \tag{22}$$

qui peut être résolue par des méthodes habituelles. On trouve

$$\operatorname{ch}\nu \sin\theta \sin\vartheta + \operatorname{sh}\nu \cos\theta \cos\vartheta = F \operatorname{ch}\vartheta, \tag{23}$$

où F est une fonction arbitraire de rapport $\operatorname{ch}\nu/\cos\vartheta$.

On calcule les dérivées de ϑ par rapport à ν et θ et, en les comparant avec celles données par (21), on arrive à l'expression

$$\operatorname{sh}\bar{\psi}_2 = -\frac{\operatorname{sh}\nu \sin\theta \sin\vartheta - \operatorname{ch}\nu \cos\theta \cos\vartheta - F' \operatorname{sh}\nu}{\sin\theta - F' \sin\vartheta}. \tag{24}$$

Le problème consiste, donc, à déterminer la forme de la fonction F de tel sorte que les équations (20) soient satisfaites. En calculant de (24) la dérivée de $\bar{\psi}_2$ par rapport à θ (ou ν) et en comparant sa valeur avec celle tirée de première (ou de seconde) équation (20) on arrive, après un calcul assez long, à l'équation

$$(F^2+1)F' - 2uFF'^2 + (u^2-1)F'^3 + u(u^2-1-F^2)F'' = 0, \tag{25}$$

où par u est désigné le rapport

$$u = \frac{\operatorname{ch}\nu}{\cos\vartheta}.$$

L'équation est très compliquée mais quelques solutions sont évidentes.

a) L'équation (25) est évidemment satisfaite par $F = K = \text{const.}$ On déduit de (23) que

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{K - \operatorname{sh}\nu \cos\theta}{\operatorname{ch}\nu \sin\theta}$$

et (24) donne

$$\operatorname{sh}\bar{\psi}_2 = -\frac{K \operatorname{sh}\nu + \cos\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\nu \sin^2\theta + (K - \operatorname{sh}\nu \cos\theta)^2}}.$$

Tenant compte de relation Ch ν sin $\mu = 1$ on amène l'équation des lignes de courant $\overline{\psi}_2 = \text{const.}$ à la forme

$$K \cos \mu + \sin \mu \cos \theta = C$$

ou

$$Kz + x = CR$$

avec R — rayon de la sphère considérée. Donc les surfaces de courant sont des plans parallèles dont l'intersection avec la sphère sont des cercles. Pour $K = 0$ les plans sont donnés par $x = CR$ et les cercles sont parallèles au plan Oyz avec centres sur l'axe des x. La possibilité d'un tel mouvement pourrait être prévue par les résultats obtenus dans le cas d'un mouvement plan [6].

b) En supposant que $F = K_1 u + K_2$ on voit que l'équation (25) sera satisfaite seulement si $K_2^2 = K_1^2 - 1$, mais ensuite on constate facilement que cette solution ne peut pas être acceptée car elle amène à des valeurs imaginaires pour quelques quantités physiques.

c) L'équation (25) sera satisfaite par

$$F^2 = u^2 - 1 - K_3^2$$

où K_3 est une constante. Il s'ensuit de (23) que

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\operatorname{sh} \nu \sin \theta \pm K_3}{\operatorname{ch} \nu \cos \theta}$$

et de (24) que

$$\operatorname{sh} \overline{\psi}_2 = \frac{\sin \theta \mp K_3 \operatorname{sh} \nu}{\operatorname{ch} \nu \cos \theta} = \frac{\sin \mu \sin \theta \mp K_3 \cos \mu}{\cos \theta}.$$

Par exemple, pour $K_3 = 0$ les lignes de courant passent d'un pôle à l'autre en traversant l'équateur en points différents, mais elles ne coïncident pas avec les méridiens. Leurs projections sur le plan Oxy sont données par

$$\operatorname{tg} \theta \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const.}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Voronjec, *Sur les mouvements tridimensionnels d'un gaz parfait*, Publ. Inst. Math. T. 12 (26) (1971) p. 138.

[2] Кочин, Кибель, Розе, *Теоретическая Гидромеханика*, Москва, (1963), p. 245.

[3] К. Вороњец, *О jедном проблему из струјања по кривим површинама*, Гл. CCXVII САН од. тех. н. књ. 5 (1961) p. 67.

[4] К. Вороњец, *О неким применама комплексних функција у адијабатским струјањима невискозног гаса*. Зб. рад. посв. акад. J. Хлитчиjеву. Београд (1970), p. 91.

[5] K. Voronjec. *Sur les mouvements analogues d'un gaz parfait et d'un fluide incompressible*. Publ. Inst. Math. T. 9 (23), (1969), p. 203.

[6] K. Voronjec. *Sur quelques mouvements adiabatiques d'un gaz parfait*. Publ. Inst. Math. T. 10 (24) (1970) p. 185.