PUBLICATION DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 14 (28) 1972, pp. 137–138

SUR L'INTÉGRALE DE CAUCHY DES SYSTÈMES EN INVOLUTION DE DARBOUX DU TROISIÈME ORDRE

B. Rachajsky

(Reçu le 4. Novembre 1972)

Il est possible d'établir dans la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles d'une fonction à deux variables indépendantes en involution de *Darboux* du troisième ordre, (SD), plusieurs propriétés analogues aux propriétés de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre et des systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de *Darboux-Lie.*

On peut établir pour les systèmes (SD), par example, les propriétés suivantes [1, 2]:

1) On peut former un système correspondants de *Charpit* jouant le rôle d'un système des caractéristiques;

2) On peut définir une intégrale complète à six constantes arbitraires et donner les conditions concernant cette intégrale;

3) On peut, en suivant l'idée de *Courant*, [3], former l'intégrale de *Cauchy* des systèmes (SD) grâce à l'intégrale générale du système mentionné de *Charpit*;

4) On peut entendre la théorie de *Lagrange* des intégrales des systèmes (SD).

En étudiant les propriétés nouvelles pour les systèmes (SD) nous allons utiliser la méthode de Lagrange *de la variation des constantes dans l'intégrale complète pour poser et résoudre le problème correspondents de* Cauchy.

Nous considérons un système en involution de *Darboux* du trosième ordre

$$\text{(SD)} \qquad r+f(x, y, z, p, q, s, t)=0, \quad z_{xyy}+F(x, y, z, p, q, s, t, z_{yyy})=0$$

en désignant respectivement par $p, q, r, s, t, z_{xyy}, z_{yyy}$ les dérivées partielles correspondantes de la fonction z par rapport aux x et y. On supposera pour la fonction f que $f\in C^2(G)$, où G est un domaine déterminé des variables x, y, z, p, q, s, t et que $F\in C^1(G_1)$ où G_1 est un domaine des variables $x, y, z, p, q, s, t, z_{yyy}$ et $G\subset G_1$.

Nous partons de l'intégrale du système (SD) avec six constantes C_i

$$\text{(I)} \qquad z=V(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_6)$$

L'équation (I) définit une intégrale complète du système (SD) si la fonction V admet les conditions nécessaires et suffisantes

$$(1) \qquad \Delta\neq 0, \quad \delta=0, \quad \Delta''/\Delta=\Delta'/\Delta'',$$

$\Delta, \delta, \Delta', \Delta''$ désignant les déterminants fonctionnels:

$$\Delta \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}, V_{yyy}}{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6}\right), \qquad \delta \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xx}, V_{xy}, V_{yy}}{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6}\right),$$

$$\Delta' \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}, V_{xxy}}{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6}\right), \qquad \Delta''' \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}, V_{xyy}}{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6}\right),$$

dans un domaine bien déterminé des variables $x, y, C_1, \ldots, C_6$.

Nous cherchons l'intégrale de *Cauchy* du système (SD) sous les conditions suivantes

(C) $\qquad x = x_0, \quad z = z(y)$, et

(c) $\qquad p = a, \quad s = b$ pour $x = x_0$ et $y = y_0$, $(x_0, y_0) \in (C)$,

où a et b sont des constantes données, la courbe (C) est une courbe non-caractéristiques, et la fonction donnée $z(y) \in C^3(i)$ dans un intervalle (i) de la variable y.

Si l'on considère dans l'intégrale (I), avec les conditions (1), les C_i, d'après la méthode de la variation des constantes, comme les fonctions $C_i(x, y)$ des variables x et y, l'équation (I) définit une intégrale du système (SD) seulement sous les conditions suivantes, [4],:

$$(2) \qquad \begin{cases} \nabla V \cdot C_{\xi j} = 0, \quad \nabla V_x \cdot C_{\xi j} = 0, \quad \nabla V_y \cdot C_{\xi j} = 0, \\ \nabla V_{xy} \cdot C_{\xi j} = 0, \quad \nabla V_{yy} \cdot C_{\xi j} = 0, \qquad (j = 1,2) \end{cases}$$

où l'on a

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial C_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial C_6}\right), \quad \nabla V_x = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_1}, \ldots, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_6}\right), \ldots,$$

$$C_{\xi_1} \equiv C_x, \; C_{\xi_2} \equiv C_y, \; C_x = \left(\frac{\partial C_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial C_6}{\partial x}\right), \quad C_y = \left(\frac{\partial C_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial C_6}{\partial y}\right).$$

Grâce aux conditions (C), (c), (1) et (2) on peut d'une manière analogue, comme dans la théorie des équations en involution de Darboux-Lie, [2], déterminer les fonctions $C_i(x, y)$ et de cette manière obtenir l'intégrale cherchée de Cauchy pour le système (SD).

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Goursat. *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, T. II, Paris, 1898.

[2] B. Rachajsky, *Sur les systèmes en involution des équations aux dériyées partielles du premier ordre et d'ordre supérieure. L'application des systèmes de Charpit.* Editions spéciales de l'Institut Mathématique de Beograd, T. 10, 1971.

[3] R. Courant, *Partial Differential Equations* — D. Hilbert. R. Courant: Methods of mathematical physics, II 1962.

[4] B. Rachajsky, *Sur les intégrales des systèmes en involution de Darboux du troisième ordre*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 259. p. 2336—39 (1964).