PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 14 (28), 1972. pp. 133–136

EIN SATZ ÜBER REPRODUKTIVE LÖSUNGEN

Slaviša B. Prešić

(Eingegangen am 15 April 1972)

S. Rudeanu hat in der Arbeit [4] das Problem der Bestimmung aller reproduktiven Lösungen gegebener Booleschen Gleichung betrachtet.

In dieser Arbeit wird, allgemeiner, das ähnliche Problem fur irgendeine Relationsgleichung

$$r(x)=1 \tag{1}$$

betrachtet werden. Dazu ist r eine Relation der gegebenen Menge S, d. h. eine Abbildung von S in die Menge $\{0, 1\}$ (0, 1 sind zwei verschiedene Objekte — „Wahrheitswerte").

Es sei

$$x=F(t) \qquad (t \text{ ist Parameter, } t\in S)$$

eine *allgemeine Lösung* von (1). Das heißt:

(i) $$(\forall\, t\in S)\ \big(r(F(t))=1\big), \qquad \text{und}$$

(ii) $$(\forall\, x\in S)\ \big(r(x)=1\ \Rightarrow\ (\exists\, t\in S)\ (x=F(t))\big)$$

Die Konjunktion (i) $\wedge$ (ii) ist mit der folgenden Formel (Bedingung)

$$(\forall\, x\in S)\ \big(r(x)=1\ \Leftrightarrow\ (\exists\, t\in S)\ (x=F(t))\big) \tag{2}$$

äquivalent.

B e w e i s. Die Implikation

$$(\forall\, x\in S)\ \big(r(x)=1\ \Rightarrow\ (\exists\, t\in S)\ (x=F(t))\big),$$

die „ein Teil" von (2) ist, ist gleich (ii).

Weiter

$$(\forall\, x\in S)\ \big((\exists\, t\in S)\,(x=F(t))\ \Rightarrow\ r(x)=1\big)$$

$$\Leftrightarrow\ (\forall\, x\in S)\ \big(\neg\,(\exists\, t\in S)\ (x=F(t))\vee r(x)=1\big)$$

$$\Leftrightarrow\ (\forall\, x\in S)\ \big((\forall\, t\in S)\,\neg\,(x=F(t))\vee r(x)=1\big)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in S)\ (\forall t \in S)\ \big(\neg(x = F(t)) \vee r(x) = 1\big)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in S)\ (\forall t \in S)\ \big(x = F(t) \Rightarrow r(x) = 1\big)$$

$$\Leftrightarrow (\forall t \in S)\big(r(F(t)) = 1\big)$$

$$\Leftrightarrow (i)$$

Also: $(2) \Leftrightarrow (i) \wedge (ii)$.

Die allgemeine Lösung von (1) nennt man *reproduktiv*, wenn die Bedingung

$$r(x) = 1 \Rightarrow F(x) = x \tag{3}$$

gilt ([1], [3], [4])

Unser Hauptproblem lautet:

Alle reproduktiven Lösungen der Gleichung $r(x) = 1$ zu bestimmen, unter Voraussetzung daß

$$x = F(t) \qquad (t \text{ ist Parameter, } t \in S)$$

eine gegebene allgemeine Lösung ist.

Zuerst, beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma. *Die Formel*

$$x = F(t) \qquad (t \textit{ ist Parameter, } t \in S)$$

ist eine reproduktive Lösung der Gleichung $r(x) = 1$ *genau dann, wenn die Bedingungen*

$$(\forall x \in S)\ \big(r(x) = 1 \Rightarrow x = F(x)\big) \tag{j}$$

$$(\forall x \in S)\ \big(r(x) = 0 \Rightarrow r(F(x)) = 1\big) \tag{jj}$$

gelten.

Beweis.

$x = F(t)$ ist eine reproduktive Lösung von (1)

$$\Leftrightarrow (\forall t \in S)\, r(F(t)) = 1 \wedge (\forall x \in S)\ \big(r(x) = 1 \Rightarrow (\exists t \in S)\ (x = F(t))\big)$$
$$\wedge (\forall x \in S)\ \big(r(x) = 1 \Rightarrow x = F(x)\big)$$

(nach (i), (ii), (3))

$$\Leftrightarrow (\forall t \in S)\, r(F(t)) = 1 \wedge (\forall x \in S)\ \big(r(x) = 1 \Rightarrow x = F(x)\big)$$

$$\Leftrightarrow (\forall t \in S)\ \big(r(t) \neq 1 \Rightarrow r(F(t)) = 1\big) \wedge (\forall t \in S)\ \big(r(t) = 1 \Rightarrow r(F(t)) = 1\big)$$
$$\wedge (\forall x \in S)\ \big(r(x) = 1 \Rightarrow x = F(x)\big)$$

(Tautologie $q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$; p ist $r(x) = 1$)

$$\Leftrightarrow (\forall x \in S)\ \big(r(x) = 0 \Rightarrow r(F(x)) = 1\big) \wedge (\forall x \in S)\ \big(r(x) = 1 \Rightarrow x = F(x)\big)$$

(denn $(\forall x \in S)\ \big(r(x) = 1 \Rightarrow x = F(x)\big) \Rightarrow (\forall t \in S)\ \big(r(t) = 1 \Rightarrow r(F(t)) = 1\big)$)

$$\Leftrightarrow (j) \wedge (jj)$$

Also: $x = F(t)$ ist eine reproduktive Lösung von (1) $\Leftrightarrow (j) \wedge (jj)$.

Es seien

$$+:(S\cup\{0,\ 1\})^2\to S,\quad \cdot:(S\cup\{0,\ 1\})^2\to S\cup\{0,\ 1\},\quad ':\{0,\ 1\}\to\{0,\ 1\}$$

beliebige Abbildungen (Verknüpfungen), die die Gesetze

(4) $$0+x=x,\quad x+0=x,\quad 0\cdot x=0,\ 1\cdot x=x,\quad 0'=1,\quad 1'=0\qquad (x\in S)$$

erfüllen.

Weiter, sei R die Lösungsmenge von $r(x)=1$, d. h.

$$x\in R\ \Leftrightarrow\ r(x)=1$$

und $x=A(t)$ (Parameter $t\in S$) sei eine allgemeine Lösung von $r(x)=1$.

Es gilt der folgende Satz.

S a t z. *Die Formel*

$$F(x)\overset{\text{def}}{=}r(x)\cdot x+r'(x)\cdot A\big(f(x)\big)$$

mit dem Parameter $f: S\to S$ *beschreibt alle Funktionen* $F: S\to S$, *für die*

$$x=F(t)\qquad (t\ \textit{ist Parameter},\ t\in S)$$

eine reproduktive Lösung der Gleichung $r(x)=1$ *ist.*

B e w e i s.

$x=F(t)$ ist eine reproduktive Lösung von $r(x)=1$

$$\Leftrightarrow\ (\forall x\in R)\ \big(F(x)=x\big)\ \wedge\ (\forall x\in S\setminus R)\ \big(F(x)\in R\big)$$

(Lemma)

$$\Leftrightarrow\ (\forall x\in R)\ \big(F(x)=x\big)\ \wedge\ (\forall x\in S\setminus R)\ (\exists t\in S)\ \big(F(x)=A(t)\big)$$

$\big(x=A(t)$ ist eine allgemeine Lösung von $r(x)=1\big)$

$$\Leftrightarrow\ (\forall x\in R)\ \big(F(x)=x\big)\ (\exists \bar f: S\setminus R\to S)\ (\forall x\in S\setminus R)\ \big(F(x)=A(\bar f(x))\big)$$

(Auswahlaxiom, [2])

$$\Leftrightarrow\ (\exists f: S\to S)\ (\forall x\in S)\ \Big(F(x)=r(x)\cdot x+r'(x)\cdot A\big(f(x)\big)\Big)$$

(Die Gesetze (4). Ist $\bar f$ gegeben, dann f ist eine beliebige Extension von $\bar f$. Ist f gegeben, dann $\bar f$ ist die Restriktion von f).

Also:

$x=F(t)$ ist eine reproduktive Lösung von (1)

$$\Leftrightarrow\ (\exists f: S\to S)\ (\forall x\in S)\ \Big(F(x)=r(x)\cdot x+r'(x)\cdot A\big(f(x)\big)\Big)$$

B e i s p i e l. Für Boolesche Gleichung

(5) $$r(x_1,\ \ldots,\ x_n)=1\qquad (x_i\in\{0,\ 1\})$$

sind alle reproduktive Lösungen beispielweise durch Formeln

$$x_1 = x_1 r(x_1, \ldots, x_n) + r'(x_1, \ldots, x_n)\,[x_{10} r'(X_1, \ldots, X_n) + X_1 r(X_1, \ldots, X_n)]$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_n r(x_1, \ldots, x_n) + (r' x_1, \ldots, x_n)\,[x_{n0} r'(X_1, \ldots, X_n) + X_n r(X_1, \ldots, X_n)]$$

$((x_{10}, \ldots, x_{n0})$ ist eine Lösung von (5); $x_i : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ sind Parameter) bestimmt.

Hier werden Löwenheimsche Formeln

$$x_1 = x_{10} r'(t_1, \ldots, t_n) + x_1 r(t_1, \ldots, t_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n0} r'(t_1, \ldots, t_n) + x_n r(t_1, \ldots, t_n)$$

angewendet.

LITERATUR

[1] L. Löwenheim, *Über das Auflösungsproblem im logischen Klassenkalkul*, Sitzungsber. Berl. Math. Gesellschaft, 7, 1908, 89—94.

[2] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Fasc. résultats, Paris, 1958.

[3] S. Prešić, *Une classe d'équations matricielles et l'équation fonctionnelle $f^2 = f$*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 8 (22), 1968, 143—148.

[4] S. Rudeanu, *On reproductive solutions of Boolean equations*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 10 (24), 1970, 71—78.