PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 14 (28) 1972. pp. 83–95

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ (I)

М. Г. Лазич

(Представлено 5 мая 1972 года)

1. Резюме

Последовательности функций определенных на некотором множестве ставится в соответствие оператор преобразовающий последовательности в функции; *достижение действия* этого оператора определяется как совокупность тех последовательностей для которых функция-образ определена на рассматриваемом множестве; *достижение b-действия* данного оператора определяется как совокупность тех последовательностей из достижения действия для которых функция-образ ограничена (определение 2.1). Между прочим, изучаются условия, необходимые и достаточные для того чтобы достижение b-действия упомянутого оператора содержало все последовательности (теорема 2.5).

Последовательности функций определенных на множестве с точкой сгущения ставится в соответствие метод суммирования для последовательностей (определение 3.1). Между прочим, изучаются необходимые и достаточные условия, для того чтобы поле суммируемости такого метода содержало все последовательности (теорема 3.6).

2. Операторы типа (X, F)

2.1. Пусть X — произвольное непустое множество и $F=(f_j)$ последовательность вещественных (комплексных) функций $f_j=f_j(x)\,(j=0,1,\ldots)$ определенных на X. Для $x\in X$ и $U=(u_j)$ положим

$$(x, F)(U)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\,u_j$$

и

$$(X, F)(U)=\left(\overset{x}{\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\,u_j}\right)_{x\in X}.$$

Если, при фиксированному $U=(u_j)$, ряд $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\,u_j$ сходится для всех $x\in X$, тогда так полученную функцию $(X, F)(U)$ называем *преобразованием пос-*

ледовательности $U=(u_j)$ *оператором* (X, F). Совокупность последовательностей $U=(u_j)$ таких что существует преобразование $(X, F)(U)$, т. е. ряд $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) u_j$ сходится для всех $x \in X$, называем *достижением действия оператора* (X, F) и обозначаем через $(X, F)^d$.

Совокупность

$$\{U \mid \sup_{x \in X} |(x, F)(U)| < \infty\}$$

называем *достижением b-действия оператора* (X, F) и обозначаем через $(X, F)^b$. При этом, очевидно, справедливо включение $(X, F)^b \subseteq (X, F)^d$.

2.1. i. Матричные операторы составляют один подкласс класса операторов типа (X, F). Именно, можно считать что оператор (F) определенный матрицей $F=(f_{ij})$ в самом деле ассоцирован множеству $X=\{0,1, \ldots, i, \ldots\}$ и последовательности функций $F=(f_j)$ таких что $f_j(i)=f_{ij}(i, j=0,1, \ldots)$. Согласно вперед введенным общим обозначениям, достижение действия и достижение b-действия оператора (F) обозначаем через $(F)^d$ и $(F)^b$, соответственно.

Обозначим через T^o, T^c, T^b и T множества последовательностей сходящихся к нулю, сходящихся последовательностей, ограниченных последовательностей и всех последовательностей, соответственно.

2.2. Т е о р е м а. *Достижение действия оператора (X, F) содержит все последовательности сходящиеся к нулю (все сходящиеся последовательности, все ограниченные последовательности), тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| < \infty \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{1}$$

Очевидно, существенным здесь является доказательство импликации $T^o \subseteq (X, F)^d \Rightarrow (1)$. Она получается последовательным использованием теоремы Целлера ([4], 4.4 b))[1] и теоремы о представлении линейного функционала в пространстве T^o (нпр., [6], стр. 230).

2.3. Т е о р е м а. *Для того чтобы достижение действия оператора (X, F) содержало все последовательности, необходимо и достаточно чтобы было выполнено следующее условие:*

(2) *для каждого $x \in X$ существует такой индекс j_x, что*

$$j > j_x \Rightarrow f_j(x) = 0.$$

Доказательство теоремы 2.3 в неочевидном направлении (необходимость условия (2)) получается последовательным применением вышеупомянутой теоремы Целлера и утверждения о представлении линейного функционала на пространстве T (нпр., [1], гл. III, теорема 11).

2.3. i. Заметим, что в случае матричных операторов условие (2) выражает конечнострочность матрицы F.

---

[1] Формулировка Целлера относится к B_0-пространствам; заметим что — доказательство то же и в случае пространств типа F (в смысле определения 1 [2] Мазура и Орлича).

2.4. Теорема. *Достижение b-действия оператора (X, F) содержит все послгдовательности сходящиеся к нулю (все сходящиеся последовательности, все ограниченные последовательности), в том и только в том случае, когда выполняется условие*

(3) $$\sup_{x \in X} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| < \infty.$$

Доказательство теоремы 2.4, как уже замечено в [7], теорема 1, можно получить по схеме использованной в случае $X = [x_0, x')$ ([8], теорема I).

2.5. Теорема. *Для того чтобы достижение b-действия оператора (X, F) содержало все последовательности, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия* (3) *и*

(4) *существует индекс j_0 такой что $f_j(x) \equiv 0$ на X для всех $j > j_0$.*

Примечаем что, при наличии условия (4), условие (3) значит

$$\sup_{x \in X} \sum_{j=0}^{j_0} |f_j(x)| < \infty,$$

которое, очевидно, эквивалентно с

(5) $$\sup_{x \in X} |f_j(x)| < \infty \, (j = 0, 1, \ldots, j_0).$$

Доказательство теоремы 2.5. Достаточность условий (4) и (5) для $(X, F)^b = T$, очевидно. Мы показываем и их необходимость. В самом деле, имея в виду теорему 2.4 и предыдущее замечание, надо еще доказать, что $(X, F)^b = T$ влечет условие (4).

С этой целью замечаем, что, в силу уже использованной теоремы Целлера, для произвольно взятого и затем фиксированного $x \in X$,

$$(x, F)(U) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) u_j \quad \left(U = (u_j) \in T\right)$$

определяет линейное отображение B_0K-пространства T[1] в B-пространство вещественных (комплексных) чисел. (Замечаем, дополнительно, что, ввиду теоремы 2.3, для всех $U = (u_j) \in T$ имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) u_j = \sum_{j=0}^{j_x} f_j(x) u_j,$$

где j_x — индекс из условия (2).) Так как предположение $(X, F)^b = T$ значит ограниченность множества $\{(x, F)(U) \mid x \in X\}$ для всех $U = (u_j) \in T$, то, в силу принципа равномерной непрерывности (нпр., [5], стр. 64), получаем $\lim\limits_{U \to 0} (x, F)(U) = \lim\limits_{U \to 0} \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(x) u_j = 0$ равномерно относительно $x \in X$. Иными словами, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$n(U) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} |u_j| (1 + |u_j|)^{-1} < \delta$$

влечет за собой $\quad |(x, F)(U)| = \left|\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(x) u_j\right| < \varepsilon \quad$ для всех $x \in X$.

---

[1]) K обозначает свойство: сходимость по норме влечет сходимость по координатам.

Пусть теперь $\varepsilon>0$ и соответствующее $\delta>0$ — фиксированные числа, и j_0 взято так что $\sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{-j}<\delta$. Тогда для всех последовательностей формы $U=(0, 0, \ldots, \overset{j_0}{0}, u_{j_0+1}, u_{j_0+2}, \ldots)$, имеем

$$n(U)=\sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{-j}|u_j|(1+|u_j|)^{-1}\leqslant \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{-j}<\delta,$$

и, поэтому,

$$|(x, F)(U)|=\Big|\sum_{j=j_0+1}^{\infty} f_j(x)u_j\Big|<\varepsilon \qquad \text{для всех } x\in X.$$

Полагая $u_{j_0+k}=m$ и $u_j=0$ для $j\neq j_0+k\,(m=1, 2, \ldots)$, где k произвольно выбрано и затем фиксированно натуральное число, получаем

$$|mf_{j_0+k}(x)|<\varepsilon \qquad \text{для всех } x\in X \text{ и } m=1, 2, \ldots, \text{ т. е.}$$

$$|f_{j_0+k}(x)|<\frac{\varepsilon}{m} \qquad \text{для всех } x\in X \text{ и } m=1, 2, \ldots.$$

Оттуда вытекает что — $f_{j_0+k}(x)=0$ для всех $x\in X$ и, ввиду произвольности числа k, что — $f_j(x)=0$ для всех $x\in X$ и $j>j_0$. Следовательно, так выбрано j_0 обладает свойством о котором идет речь в условии (4), что, как мы в начале сказали, заканчивает доказательство теоремы 2.5.

2.5. i. При доказательстве теоремы 2.5, необходимость условия (4) можно получить и следующим способом.

С такой целью заметим что T представляет пространство B_0K относительно нормы $n(U)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}|u_j|(1+|u_j|)^{-1}$, где в качестве последовательности однородных псевдонорм можно взять $p_i(U)=|u_i|\,(i=0, 1, \ldots)$. В продолжении мы показываем что T — пространство B_0K и относительно нормы $n_1(U)=\sup\limits_{x\in X}\left|\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x)\,u_j\right|+n(U)\;\left(=\sup\limits_{x\in X}\left|\sum_{j=0}^{j_x}f_j(x)\,u_j\right|+n(U)\right)$, когда в качестве последовательности однородных псевдонорм можно взять $p(U)=$ $=\sup\limits_{x\in X}\left|\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x)\,u_j\right|$ и $p_i(U)$ $(i=0, 1, \ldots)$ ($p(U)$ конечно ввиду предположения $(X, F)^b=T$). Следовательно, доказываем что из отношений

(a) $$p(U^m-U^n)\to 0\,(m\to\infty,\ n\to\infty)$$

и

(b) $$p_i(U^m-U^n)\to 0\,(m\to\infty,\ n\to\infty)\ (i=0, 1, \ldots),$$

где — $U^m=(u_j^m)$ $(m=0, 1, \ldots)$, следует существование последовательности $U=(u_j)$, такой что справедливы

(a′) $$p(U^m-U)\to 0\,(m\to\infty)$$

и

(b′) $$p_i(U^m-U)\to 0\,(m\to\infty)\ (i=0, 1, \ldots).$$

Замечаем что, уже на основании (b), существует последовательность $U=(u_j)$ такая что справедливо (b′) ((T, n) является пространством B_0).

В дальнейшем показываем, что та же последовательность удовлетворяет и отношению (a').

Ввиду (a), для данного $\varepsilon>0$ существует такое m_0, что

$$p(U^m - U^n) = \sup_{x\in X}\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\left(u_j^m - u_j^n\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

при $m>m_0$ и $n>m_0$, т. е.

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\left(u_j^m - u_j^n\right)\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x\in X,\ m>m_0 \quad \text{и} \quad n>n_0.$$

Переходя, при фиксированном $x\in X$, к пределу для $n\to\infty$, ввиду (b') (означающее сходимость по координатам, т. е. сходимость последовательности (U^m) к U в пространстве (T, n)) и теоремы 4.4 b) [4] Целлера, получаем

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\left(u_j^m - u_j\right)\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{для всех } x\in X \quad \text{и} \quad m>m_0,$$

или

$$p(U^m - U) = \sup_{x\in X}\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\left(u_j^m - u_j\right)\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad m>m_0.$$

Отношение (a') происходит теперь из произвольности выбора $\varepsilon>0$, чем доказана полнота $B_0^* K$-пространства (T, n_1).

Используя известную теорему Целлера ([4], 4.5 a) и b)), приходим затем к выводу что нормы $n(U)$ и $n_1(U)$ эквивалентны. Оттуда вытекает импликация $n(U)\to 0 \Rightarrow p(U)\to 0$, т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$ что из $n(U) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}|u_j|(1+|u_j|)^{-1} < \delta$ следует $p(U) = \sup_{x\in X}\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\,u_j\right| \leqslant \varepsilon$, или

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\,u_j\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{для всех } x\in X.$$

Доказательство необходимости условия (4) в этом варианте можно закончить по схеме использованной в второй части выше приведенного варианта.

2.5. ii. В случае матричных операторов (F), теорема 2.5 получает следующую интерпретацию: Равенство $(F)^b = T$ справедливо тогда и только тогда, когда матрица F типа

$$(*) \qquad F = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} \cdots f_{0j_0} & 0 & 0 \cdots \\ f_{10} & f_{11} \cdots f_{1j_0} & 0 & 0 \cdots \\ \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_{i0} & f_{i1} \cdots f_{ij_0} & 0 & 0 \cdots \\ \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{pmatrix}$$

т. е. ограничена по строкам, и при этом столбцы индексов $j\leqslant j_0$ ограничены.

Обозначим через (F') метод сходимости ассоцированный матрице F и через $(F')^c$ область применения метода (F'); дополнительно, мы называем *областью о-применения* метода (F') совокупность последовательностей $U=(u_j)$ имеющих нуль своим (F')-пределом и обозначаем ее через $(F')^0$. В силу 2.5. ii, получаем следующий результат:

2.5. iii. *Из равенства* $(F')^c=T$ *вытекает что* F — *матрица типа* (*). (При этом используется факт что в случае матричного оператора (F) и соответствующего метода (F') справедливо включение $(F')^c \subseteq (F)^b$.)

Характеризация матричных методов с множеством T как областью применения, получается на основании теоремы 3.6.

3. Методы типа (X, F, x')

3.1. Пусть X — часть какого-то топологического пространства и x' — точка сгущения множества X с счетным базисом окрестностей. Для простоты, предположим и $x' \notin X$ (в случае $x' \in X$ вместо множества X рассматриваем $X_0 = X - \{x'\}$). (Следовательно, в частном случае $X \cup \{x'\}$ может составлять целое топологическое пространство.)

Если для $U=(u_j) \in (X, F)^d$ существует предел $\lim\limits_{x \to x'} (x, F)(U) = \lim\limits_{x \to x'} \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(x) u_j$ (x, естественно, проходит через элементы множества X), называем его *пределом последовательности* $U=(u_j)$ *в смысле метода* (X, F, x') и обозначаем через $(X, F, x')(U)$ или, более адекватно, через $(X, F, x') - \lim u_j$.

Совокупность последовательностей $U=(u_j) \in (X, F)^d$ таких что существует $(X, F, x') - \lim u_j$, называем, как обыкновенно, *областью применения* метода (X, F, x') или, короче, *областью* (X, F, x')*-сходимости*, и обозначаем через $(X, F, x')^c$; совокупность последовательностей $U=(u_j) \in (X, F, x')^c$ таких что $(X, F, x') - \lim u_j = 0$ называем *обласьтю о-применения* метода (X, F, x') (или, *областью* (X, F, x')*-о-сходимости*) и обозначаем через $(X, F, x')^0$.

3.1. i. Матричные методы сходимости составляют один подкласс класса методов типа (X, F, x'). Именно, можно считать что матричный метод (F') определенный матрицей $F=(f_{ij})$ по сути дела ассоцирован множеству $X=\{0, 1, \ldots, i, \ldots\}$, его единственной точки сгущения $x'=\infty$ и последовательности $F=(f_j)$ функций f_j таких что $f_j(i)=f_{ij}$ $(i, j=0, 1, \ldots)$.

Следующее определение каждому методу типа (X, F, x') присоединяет естественным способом целое семейство матричных методов, находящихся с ним в непосредственном и простом соотношении.

3.2. *Определение*. Матричный метод (G'), $G=(g_{ij})$, *порождается методом* (X, F, x'), если — $g_{ij}=f_j(x_i)$ $(i, j=0, 1, \ldots)$, где (x_i) означает последовательность элементов из X сходящуюся к x'.

3.2. i. Обозначим через I семейство методов порожденных (X, F, x'). Из определений методов (X, F, x') и $(G') \in I$ происходит что для любого $(G') \in I$ справедливо $(X, F, x')^c \subseteq (G')^c$ (как и $(G') - \lim u_j = (X, F, x') - \lim u_j$ для всех $U=(u_j) \in (X, F, x')^c$), т. е. что $(X, F, x')^c \subseteq \bigcap\limits_{(G') \in I} (G')^c$. Однако, легко видеть что справедливо и обратное включение, т. е. что

$$(X, F, x')^c = \bigcap_{(G') \in I} (G')^c.$$

(Предположение $U=(u_j) \notin (X, F, x')^c$ значит: либо существует такое $x_0 \in X$ что ряд $(x_0, F)(U)$ расходится, либо $\lim\limits_{x \to x'} (x, F)(U) = \infty$, либо $\lim\limits_{x \to x'} (x, F)(U)$

не существует ни как ∞. Первая и вторая возможность, очевидно, влекут за собой $U \notin \bigcap_{(G')\in I} (G')^c$. Третья возможность приводит к существованию двух последовательностей (x_i^1) и (x_i^2) таких что $\lim_{i\to\infty} (x_i^1, F)(U)$ и $\lim_{i\to\infty} (x_i^2, F)(U)$ существуют (конечные или нет) и различны. Тогда рассматриваемая последовательность $U=(u_j)$ не обладает пределом в смысле метода (G_1') порожденного (X, F, x') соответствующего последовательности

$$\left(x_0^1, x_0^2, x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, \ldots\right).$$

Из этого снова происходит $U \notin \bigcap_{(G')\in I} (G')^c$, что доказывает включение $\bigcap_{(G')\in I} (G')^c \subseteq (X, F, x').^c)$

3.3. Теорема. *Каждая последовательность $U=(u_j)$ сходящаяся к нулю является (X, F, x')-сходящейся ((X, F, x')-о-сходящейся), и при этом к числу $\sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k$* (по определению, к нулю), *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(1) *существует такая окрестность O точки x', что*

$$\sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| + \sup_{x\in X\cap O} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| < \infty \text{ для всех } x\in X;$$

(2) *для каждого $k=0, 1, \ldots$ существует $\lim_{x\to x'} f_k(x) = a_k$ $(=0)$.*

Как уже отмечено в [9], теорема 1 и замечание 8, доказательство теоремы 3.3 можно получить по схеме испоьзованной в случае $X=[x_0, x')$ ([8], теорема II).

3.3. i. Доказательство, что из условий (1) и (2) следует $T^0 \subseteq (X, F, x')^c$ и соотношение $(X, F, x') - \lim u_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k$ для всех $U=(u_j)\in T^0$, можно, при использовании понятия метода порожденного методом (X, F, x'), обосновать и на результате принципа сходимости (для случая F-пространств; нпр., [5], стр. 67).

Замечаем что из условия (1) вытекает: для каждого (фиксиранного) $x\in X$

$$(x, F)(U) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) u_j \qquad (U=(u_j)\in T^0)$$

— линейный фукционал в пространстве T^0. Без ограничения общности заключения, мы можем при этом рассматривать только элементы $x\in X\cap O$, где O — окрестность из условия (1).

Пусть теперь (x_n) — произвольно выбрана и затем фиксирована последовательность элементов из X и (G') — соответствующий метод порожденный (X, F, x'). Тогда $(x_n, F)(U)$ $(n=0, 1, \ldots)$ означает последовательность (обыкновенную, а следовательно и обобщенную) линейных отображений B-пространства T^0 в B-пространство вещественных (комплексных) чисел. Из предположения $x_n \in X\cap 0$ $(n=0, 1, \ldots)$ следует ограниченность множества $\{(x_n, F)(U) \mid n=0, 1, \ldots\}$ для всех $U=(u_j)\in T^0$ (на этом месте использованно свойство окрестности O из условия (1)). Ввиду (2), для каждого $k=0, 1, \ldots$ существует $(G')(E_k) = \lim_{n\to\infty} (x_n, F)(E_k)$ $(= \lim_{n\to\infty} f_k(x_n) = a_k)$, где $E_k = (0, 0, \ldots, 0, \overset{k}{1}, 0, 0, \ldots)$. Так как $E_k (k=0, 1, \ldots)$ фундаментальная последовательность в пространстве T^0, то, в силу принципа сходимости, $(G') - \lim u_j = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, F)(U)$ существует для всех $U = (u_j) \in T^0$ и при этом $(G')(U) = (G') - \lim u_j$ — линейный функционал в пространстве T^0.

На основании произвольности выбора последовательности (x_n), получаются следующие два вывода. Во-первых: множество T^0 содержится в области применения любого матричного метода порожденного методом $(X \cap O, F, x')$, а следовательно, в силу замечания 3.2. i, и в области применения метода $(X \cap O, F, x')$; включение $T^0 \subseteq (X, F, x')^c$ тогда вытекает из условия (1). Во-вторых: из линейности функционала $(G')(U)$ в пространстве T^0 и разложения (в смысле нормы пространства T^0)

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} u_k E_k \quad (U = (u_j) \in T^0)$$

следует, что для каждого метода (G') порожденного методом $(X \cap O, F, x')$ и для каждой последовательности $U = (u_j)$ сходящейся к нулю имеем

$$(G')(U) = (G')\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k E_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k (G')(E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k;$$

оттуда вытекает существование $(X, F, x')(U) = (X, F, x') - \lim u_j$ и равенство

$$(X, F, x') - \lim u_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k$$

для всех $U = (u_j) \in T^0$; упомянутая часть теоремы 3.3 доказана.

3.4. Теорема. *Каждая сходящаяся последовательность* $U = (u_j)$ *является* (X, F, x')*-сходящейся* ((X, F, x')*-о-сходящейся*), *и при этом к числу* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k u_k + u\left(a - \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right)$ (конечно, к нулю), *где* — $u = \lim u_j$, *в том и только в том случае, когда выполняются условия* (1), (2) *и*

$$\text{(3)} \qquad \textit{существует} \lim_{x\to x'} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) = a$$

(*условия* (1), (2) *и* (3) *с* $a_k = 0 \, (k=0, 1, \ldots)$ *и* $a = 0$, *соответственно*).

В [9], теорема 2 и замечание 8, подчеркнуто что доказательство теоремы 3.4 может быть по схеме использованной в случае $X = [x_0, x')$ ([8], теорема III). Доказательство что из условий (1), (2) и (3) следуют $T^c \subseteq (X, F, x')^c$ и часть теоремы касающаяся (X, F, x')-предела сходящихся последовательностей, можно, однако, получить и по модели замечания 3.3. i, используя при этом факт что последовательность состоящая из точек $E_k (k=0, 1, \ldots)$ и $E = (1, 1, 1, \ldots)$ — фундаментальная в пространстве T^c.

3.5. Теорема. *Каждая ограниченная последовательность* $U = (u_j)$ *является* (X, F, x')*-сходящейся* ((X, F, x')*-о-сходящейся*), *и при этом к числу* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k u_k$, *тогда и только тогда, когда выпольнены условия* (1), (2) *и*

$$\text{(4)} \qquad \lim_{x\to x'} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x) - a_j| = 0$$

(*условия* (1) *и* (4′) $\lim\limits_{x\to x'} \sum\limits_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| = 0$, *соответственно*).

Доказательство теоремы 3.5 опубликовано в [9], теорема 3 и замечание 8. Оно обосновано на понятии метода порожденного методом (X, F, x') и аналогичной теоремы Шура [10] для матричных методов.

Согласно теореме Шура (нпр., [11], 1.2.1), в теореме 3.5 условиям (1), (2) и (4) надо добавить условие (3). Мы этого не сделали так как условие (3) является очевидным следствием (1), (2) и (4).

Однако, замечаем что имеет место следующий более простой вариант теоремы 3.5:

3.5. i. Теорема. *Область применения метода (X, F, x') содержит все ограниченные последовательности в том и только в том случае, когда выполнены условия* 2. (1) (условие (1) из параграфа 2), (2) *и* (4).

Ввиду теоремы 3.5, нетривиальная часть доказательства теоремы 3.5. i состоится в утверждении что условия 2. (1), (2) и (4) влекут за собой условие (1). Это можно получить в двух шагах. Во-первых, из неравенства

$$\sum_{j=0}^{\infty}|a_j| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}|a_j - f_j(x)| + \sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$$

и условий 2. (1) и (4) вытекает сходимость ряда $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|$. Во-вторых, из неравенства

$$\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x) - a_j| + \sum_{j=0}^{\infty}|a_j|,$$

условия (4) и только что установленного поведения ряда $\sum_{j=0}^{\infty}a_j$, следует:

(*) существует такая окрестность O точки x', что $\sup\limits_{x\in X\cap O}\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)| < \infty$.

Условие (1) является, очевидно, конъюнкцией условий 2. (1) и (*).

Следовательно, в теореме 3.5, условие (1) можно заменить более слабым требованием 2. (1).

В продолжении приводим еще некоторые замечания связанные с теоремой 3.5.

Шур [10] (нпр., [12], стр. 44) показал что в случае матричных методов справедлива следующая

3.5. ii. Теорема. *Область (F')-сходимости, $F=(f_{ij})$, содержит все ограниченные последовательности тогда и только тогда, когда выполняются условия* (2) (т. е. для каждого $k=0, 1, \ldots$ существует $\lim\limits_i f_{ik} = a_k$) *и ряд* $\sum_{j=0}^{\infty}|f_{ij}|$ *сходится равномерно относительно* $i=0, 1, \ldots$.

Однако, пример метода ассоциированного множеству $X=[-3, -1]\cup\{0, 1, 2, \ldots\}$, точке $x'=\infty$ и последовательности $F=(f_j)$ функций

$$f_j(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{[1+(x+2)^2]^{j+1}}, & x\in[-3, -1] \\ \dfrac{1}{2^{x+j}}, & x\in\{0, 1, 2, \ldots\} \end{cases} \qquad (j=0, 1, \ldots),$$

показывает что это не справедливо в случае произвольных методов (X, F, x'). (В рассматриваемом случае выполнены условия 2. (1), (2) и (4), т. е. область применения данного метода (X, F, x') содержит множество T^b; в то же время ряд $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$ не сходится равномерно на множестве X (функции $f_j(x)$ $(j=0, 1, \ldots)$ непрерывны на X, а сумма ряда $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$ имеет разрыв в точке $x=-2$).)

Таким образом условие

$$(5) \qquad \textit{ряд } \sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)| \textit{ сходится равномерно на } X$$

не является необходимым для справедливости $T^b \subseteq (X, F, x')^c$. Однако, легко увидеть что *условия* (2) *и* (5) *являются достаточными для* $T^b \subseteq (X, F, x')^c$.

Из теорем 3.4 и 3.5 вытекает, что область применения регулярного метода $(a_k=0\ (k=0, 1, \ldots)$ и $a=1)$ не может охватить все ограниченные последовательности. Штейнгауз [13] показал что область применения регулярного матричного метода не может содержать ни все последовательности состоящие из одных нулей и единиц (нпр., [14], стр. 93). Так, например, последовательность $U \triangleq (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots)$ (на нультом месте 1, на первом месте 0, и дальше чередуется столько единиц и нулей сколько их уже имеется) не обладает пределом в смысле метода Чезаро первого порядка. $\Big($Если берутся последовательные суммы $u_0+\cdots+u_i$ до первого нуля наборов нулей имеем: $\frac{u_0}{1}=1$ и далее $\frac{u_0+\cdots+u_i}{i+1}=\frac{2}{3}$; если берутся последовательные суммы до первой единици наборов единиц, получается: $\frac{u_0+\cdots+u_i}{i+1}=\frac{1}{2}$.$\Big)$

Посредством матричных методов порожденных методом (X, F, x'), результат Штейнгауза переносится на произвольные методы (X, F, x') ([9], замечания 3 и 8).

Из доказительства теоремы 3.5. ii приведенного в [12], стр. 44, ясно что (благодаря аддитивности и однородности матричных методов) в формулировке теоремы 3.5. ii часть „все ограниченные последовательности" можно заменить на „все последовательности состоящие из одних нулей и единиц". Следовательно, если множество $(F')^c$ содержит все последовательности состоящие из одних единиц и нулей, тогда то же множество охватывает и все ограниченные последовательности (обратное наверно справедливо). Ввиду равенства $(X, F, x')^c = \bigcap_{(G')\in I} (G')^c$, где I обозначает семейство методов порожденных методом (X, F, x') и известного соотношения методов $(G')\in I$ и исходного метода (X, F, x'), этот результат переносится и на какие-либо методы (X, F, x'), т. е. справедлива следующая

3.5. iii. Теорема. *Множество* $(X, F, x')^c$ *охватывает все ограниченные последовательности в том и только в том случае, когда оно содержит все последовательности состоящие из одних нулей и единиц.*

Оттуда происходит что в теоремах 3.5 и 3.5. i и их следствиях вместо множества T^b можно рассматривать множество последовательностей с одними нулями и единицами как членами.

Ввиду простого соотношения последовательностей состоящих из одних нулей и единиц и последовательностей с одними -1 и 1 как членами, в предшествующем изложении можно, вместо с последовательностями состоящими из одних нулей и единиц, оперировать с последовательностями с одними -1 и 1 как членами (нпр., [15], стр. 88). (В самом деле, можно рассматривать последовательности с членами $-a$ и a для любого $a \neq 0$).

В случае матрицы

$$F_j = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & f_{0j} & 0 & 0 \cdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & f_{1j} & 0 & 0 \cdots \\ . & \cdots\cdots & . & . & \cdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & f_{ij} & 0 & 0 \cdots \\ . & \cdots\cdots & . & . & \cdots \end{pmatrix} \end{array}$$

при существовании $\lim\limits_i f_{ij} = a_j$, для всех $U = (u_j) \in T$ имеем $(F_j)(U) = = f_{ij} u_j (i = 0, 1, \ldots)$ и ввиду того, $(F_j')(U) = a_j u_j$ для всех $U = (u_j) \in T$. Следовательно, тогда справедливо $(F_j')^c = T$. Легко увидеть что этим же свойством обладает и матрица $F = \sum\limits_{j=0}^{j_1} F_j$, т. е. матрица

$$F = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} \cdots f_{0j_1} & 0 & 0 \cdots \\ f_{10} & f_{11} \cdots f_{1j_1} & 0 & 0 \cdots \\ . & \cdots\cdots & . & \cdots \\ f_{i0} & f_{i1} \cdots f_{ij_1} & 0 & 0 \cdots \\ . & \cdots\cdots & . & \cdots \end{pmatrix},$$

где существует $\lim\limits_i f_{ij} = a_j \, (j = 0, 1, \ldots, j_1)$ (и при этом: $(F')(U) = \sum\limits_{j=0}^{j_1} a_j u_j$ для всех $U = (u_j) \in T$). Следующая теорема показывает что матрица F — именно упомянутого типа каждый раз, когда $(F')^c = T$.

3.6. Теорема. *Для того чтобы область применения метода (X, F, x') охватывала все последовательности, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие:*

(6) *существуют окрестность O точки x' и индекс j_0, такие что*: 1° *для каждого $x \in X - O$ существует такое j_x что $j > j_x$ влечет $f_j(x) = 0$*; 2° $f_j(x) \equiv 0$ *на $X \cap O$ для всех $j > j_0$*; 3° *для каждого $j = 0, 1, \ldots, j_0$ существует* $\lim\limits_{x \to x'} f_j(x) = a_j$.

При условии (6), *для каждого $U = (u_j) \in T$ справедливо*

$$(X, F, x') - \lim u_j = \sum_{j=0}^{j_0} a_j u_j.$$

В случае матричного метода (F'), $F = (f_{ij})$, условие (6) значит существование таких индексов i_0 и j_0 что: 1° строки с индексами $i \leqslant i_0$ содержат только конечное число отличных од нуля элементов; 2° $f_{ij} = 0$ для всех $i > i_0$ и $j > j_0$; 3° существует $\lim\limits_i f_{ij} = a_j \, (j = 0, 1, \ldots, j_0)$. Однако, легко увидеть что тогда существует индекс j_1 обладающий свойством приведенным в подготовке теоремы 3.6.

Доказательство теоремы 3.6. Из условия (6) непосредственно следуют $(X, F, x')^c = T$ и часть теоремы касающаяся (X, F, x')-пределов последовательностей $U = (u_j) \in T$. (Тот же факт можно получить и использованием принципа сходимости по модели замечания 3.3. i. При этом, ввиду условия (6) 3°, можно предположить, что окрестность O из условия (6) обладает свойством $\sup\limits_{x \in X \cap O} \sum\limits_{j=0}^{j_0} |f_j(x)| < \infty$; кроме того, мы использовали бы и факт что E_k $(k = 0, 1, \ldots)$ — фундаментальная последовательность в пространстве T.) Необходимость условия (6) 1° получается использованием теоремы 2.3. Необходимость (6) 3° происходить в силу теоремы 3.3 ($\lim\limits_{x \to x'} f_j(x) = a_j$ существует и для всех $j = j_0 + 1, j_0 + 2, \ldots$, но это уже содержится в условии (6) 2°). Таким образом, остается доказать необходимость условия (6) 2°.

С этой целью предполагаем противное, т. е. что для любой оккрестности O точки x' и для каждого индекса i, существуют элемент $x_i \in X \cap O$ и индекс $j_i > i$ такие, что $f_{j_i}(x_i) \neq 0$. Следовательно, тогда существуют возрастающая последовательность индексов (j_i) и последовательность (x_i) элементов из X сходящаяся к x' так, что $f_{j_i}(x_i) \neq 0$ для всех $i = 0, 1, \ldots$.

Рассмотрим теперь матричный метод (G') порожден методом (X, F, x') соответствующий так полученной последовательности (x_i), т. е. матрице $G = (f_j(x_i))$. Из предположения $(X, F, x')^c = T$ следует что тем более $(G')^c = T$. В силу замечания 2.5. iii, тогда существует такой индекс j_*, что $f_j(x_i) = 0$ для всех $i = 0, 1, \ldots$ и $j > j_*$. (Эта часть доказательства неявно состоится из последовательного применения принципа равномерной непрерывности к последовательности линейных отображений

$$(x_i, F)(U) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_i)\, u_j \left(= \sum_{j=0}^{j_{x_i}} f_j(x_i)\, u_j, \text{ с индексами } j_{x_i} \text{ из условия } 2.(2) \right)$$
$(i = 0, 1, \ldots)$

$B_0 K$-пространства T в B-пространство вещественных (комплексных) чисел и процедуры из второй части доказательства теоремы 2.5. При этом эффект применения упомянутого принципа можно получить и использованием эквивалентности на T обыкновенной нормы $n(U)$ и нормы $n_1(U) = p(U) + n(U)$, где — $p(U) = \sup\limits_i |(x_i, F)(U)|$ (теорема 4.5 a) и b) [4] Целлера; см. также вариант 2.5. i доказательства теоремы 2.5).) Однако, это в противоречии с условием $f_{j_i}(x_i) \neq 0$ для всех $i = 0, 1, \ldots$, где (j_i) возрастающая последовательность индексов. Следовательно, существуют окрестность O точки x' и индекс j_0 такие, что функция $f_j(x)$ исчезает на $X \cap O$ для всех $j > j_0$, что полностью доказывает теорему 3.6.

Приводим два непосредственные следствия теоремы 3.6.

3.6. i. *Область (X, F, x')-о-сходимости содержит все последовательности тогда и только тогда, когда выполнено условие* (6) *с* $a_j = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, j_0)$.

3.6. ii. *Пусть справедливо* $(X, F, x')^c = (Y, G, y')^c = T$. *Тогда: методы* (X, F, x') *и* (Y, G, y') *совместны на* T $((X, F, x') - \lim u_j = (Y, G, y') - \lim u_j$ *для всех* $U = (u_j) \in T$), *в том и только в том случае, когда* $a_j = b_j$ $(j = 0, 1, \ldots, \max(j_0^1, j_0^2))$, *где принято* $b_j = \lim\limits_{y \to y'} g_j(y)$ *и индексы* j_0^1 *и* j_0^2 *соответствуют методам* (X, F, x') *и* (Y, G, y') *в смысле условия* (6).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Banach, S.: *Théorie des operations linéaires*, Monografje Matematyczne I, New York, 1955.

[2] Mazur, S. et Orlicz, W.: *Sur les espaces métriques linéaires* (I), Studia Math. 10 (1948), pp. 184—208.

[3] Mazur, S. et Orlicz, W.: *Sur les espaces métriques linéaires* (II), Studia Math. 13 (1953), pp. 137—179.

[4] Zeller, K.: *Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren*, Math. Zeitschrift 53 (1951), pp. 463—487.

[5] Данфорд, Н. и Шварц, Дж.: *Линейные операторы (Общая теория)*, Издатель. иностр. литературы, Москва, 1962.

[6] Aljančić, S.: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Beograd, 1968.

[7] Lazić, M. G.: *Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour que le domaine d'un procédé continu contienne toutes les suites bornées*, Mat. vesnik 7 (22), sv. 2, 1970, стр. 217—222.

[8] Wlodarski, L.: *Sur les méthodes continues de limitation* (I) *et* (II), Studia Math. 14 (1954), pp. 161—187, 188—199.

[9] Lazić, M.: *Sur les procédés fonctionels* (*de limitation*), Mat. vesnik 6 (21), sv. 4, 1969, стр. 425—436.

[10] Schur, I.: *Über lineare Transformationen in der Theorie unendlihen Reichen*, J. f. reine u. ang. Math. 151 (1921), pp. 79—111.

[11] Mazur, S. and Orlicz, W.: *On linear methods of summabili.y*, Studia Math. 14 (1954), pp. 129—160.

[12] Hardy, G. H.: *Divergent series*, Oxford, 1949.

[13] Steinhaus, H.: *Kilka slow o uogólnieniu pojecia granicy*, Prace matematyczno-fizyczne 22 (1911), стр. 121.

[14] Кук, Р.: *Бесконечные матрицы и пространства последовательностей*, Москва, 1960.

[15] Гелбаум, Б. и Олмстед, Дж.: *Контрпримеры в анализе*, Москва, 1967.