PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 14 (28), 1972. 75–82

# ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СВЕРХНЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

*М. М. Константинов, Д. Д. Байнов*

(Поступило 2. сентября 1972)

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим начальную задачу

$$\dot{x}(t)=f\big(t;\ x(t),\ \bar{x}(t),\ \tilde{x}(t),\ x(\tau_0);\ \dot{x}(t),\ \bar{\dot{x}}(t),\ \tilde{\dot{x}}(t),\ \dot{x}(\Delta_0)\big);\quad t>0, \tag{1}$$

$$x(t)=\varphi(t),\ \dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t);\quad t\leqq 0 \tag{2}$$

где

$$\bar{x}(t)=\sup_{u\in[0,\,t]} x(u);\quad \tilde{x}(t)=\sup_{u\in[t-h,\,t]} x(u),\ h\geqq 0 \tag{3}$$

и

$$\tau_k=\tau_k\big(t;\ x(t),\ \bar{x}(t),\ \tilde{x}(t),\ x(\tau_{k+1});\ \dot{x}(t),\ \bar{\dot{x}}(t),\ \tilde{\dot{x}}(t),\ \dot{x}(\Delta_{k+1})\big),$$

$$\Delta_k=\Delta_k\big(t;\ x(t),\ \bar{x}(t),\ \tilde{x}(t),\ x(\tau_{k+1});\ \dot{x}(t),\ \bar{\dot{x}}(t),\ \tilde{\dot{x}}(t),\ \dot{x}(\Delta_{k+1})\big);$$

$$k=0,\ldots,m-1\qquad (m\geqq 1);$$

$$\tau_m=\tau_m\big(t;\ x(t),\ \bar{x}(t),\ \tilde{x}(t);\ \dot{x}(t),\ \bar{\dot{x}}(t),\ \tilde{\dot{x}}(t)\big),$$

$$\Delta_m=\Delta_m\big(t;\ x(t),\ \bar{x}(t),\ \tilde{x}(t);\ \dot{x}(t),\ \bar{\dot{x}}(t),\ \tilde{\dot{x}}(t)\big).$$

Отметим, что уравнения с наследственостью вида (3) исследовались в [1] для частного случая, когда $f$ от $x(\tau_0)$, $\dot{x}(t)$, $\bar{\dot{x}}(t)$, $\tilde{\dot{x}}(t)$ и $\dot{x}(\Delta_0)$ не зависит.

Далее предполагаем, что функция $f(t;\ \xi_1,\ldots,\xi_4;\ \eta_1,\ldots,\eta_4)$ определена по $t$ на интервале $I_T=[0,T]$, а по осталньным аргументам — на некотором множестве $G\subset R^8$ ($R$ — вещественная ось).

Пусть $F=F(t)$ — скалярная, неотрицательная, ограниченная и суммируемая на интервале $I_T$ функция.

Определим следующие множества из $R$:

$$\omega_T=\{\xi : |\xi| \leqq |\varphi(0)| + \int_0^T F(t)\,dt\},$$

$$\Omega_T=\{\eta : |\eta| \leqq F^* = \sup_{t\in I_T} F(t)\},$$

$$\tilde{\omega}=\bigcup_{s\in J_0}\{\varphi(s)\},\ \tilde{\Omega}=\bigcup_{s\in J_0}\{\dot{\varphi}(s)\},\ J_a=(-\infty,\ a].$$

Предполагаем, что $G$ имеет вид

$$G=\omega^{(1)}\times\cdots\times\omega^{(4)}\times\Omega^{(1)}\times\cdots\times\Omega^{(4)},$$

где

$$\omega^{(1)}=\omega^{(2)}=\omega_T,\quad \omega^{(3)}=\omega^{(4)}=\omega_T\cup\tilde{\omega},$$

$$\Omega^{(1)}=\Omega^{(2)}=\Omega_T,\quad \Omega^{(3)}=\Omega_T\cup\tilde{\Omega},\quad \Omega^{(4)}=\Omega_{T-\Delta}\cup\tilde{\Omega},\quad (\Delta>0).$$

Положим $\Xi=(\xi_1, \ldots, \xi_4)$, $H=(\eta_1, \ldots, \eta_4)$.

Всюду дальше будем ститать, что выполнены следующие условия:

**1.1.** В области $Q_T=I_T\times G$ функция $f$ непрерывна по $t$ и $\Xi$ и удовлетворяет неравенству $|f(t;\ \Xi;\ H)|\leqq F(t)$ и условиям Липшица

$$|f(t;\ \Xi;\ H)-f(t;\ \Xi';\ H')|\leqq L|\xi_4-\xi_4'|+M|\eta_4-\eta_4'|+\sum_{i=1}^{3}M_i|\eta_i-\eta_i'|.$$

**1.2.** В области $Q_T$ функции $\tau_k$ и $\Delta_k$ $(k=0, \ldots, m)$ непрерывны по $t$ и $\Xi$, удовлетворяют условиям Липшица

$$|\gamma_k(t;\ \Xi;\ H)-\gamma_k(t;\ \Xi';\ H')|\leqq\lambda|\xi_4-\xi_4'|+\mu|\eta_4-\eta_4'|+\sum_{i=1}^{3}\mu_i|\eta_i-\eta_i'|$$

и ограничениям

$$t-\tau_k\geqq 0;\quad t-\Delta_k\geqq\Delta>0,$$

где через $\gamma_k$ обозначена какая—нибудь из функций $\tau_k$, $\Delta_k$.

**1.3.** На интервале $J_0$ $\varphi$ и $\dot{\varphi}$ удовлетворяют условиям Липшица

$$|\varphi(t)-\varphi(t')|\leqq B|t-t'|,\ |\dot{\varphi}(t)-\dot{\varphi}(t')|\leqq\beta|t-t'|;\quad t,\ t'\in J_0.$$

**1.4.** Выполнено условие

$$\dot{\varphi}(0)=f\big(0;\ \varphi(0),\ \varphi(0),\ \tilde{\varphi}(0),\ \varphi(\tau_0^0);\ \dot{\varphi}(0),\ \dot{\varphi}(0),\ \tilde{\dot{\varphi}}(0),\ \dot{\varphi}(\Delta_0^0)\big),$$

где

$$\gamma_k^0=\gamma_k\big(0;\ \varphi(0),\ \varphi(0),\ \tilde{\varphi}(0),\ \varphi(\tau_{k+1}^0);\ \dot{\varphi}(0),\ \dot{\varphi}(0),$$

$$\tilde{\dot{\varphi}}(0),\ \dot{\varphi}(\Delta_{k+1}^0)\big);\quad k=0, \ldots, m-1;$$

$$\gamma_m^0=\gamma_m\big(0;\ \varphi(0),\ \varphi(0),\ \tilde{\varphi}(0);\ \dot{\varphi}(0),\ \dot{\varphi}(0),\ \tilde{\dot{\varphi}}(0)\big).$$

## 2. Локальное существование и единственность решения начальной задачи

Теорема 1. *Пусть*

$$\nu_1 = M_1 + \mu_1 Q \frac{1-q^{m+1}}{1-q} < 1$$

и

$$M_2 = M_3 = \mu_2 = \mu_3 = 0,$$

где

$$Q = L\Phi + M\beta, \quad q = \lambda\Phi + \mu\beta, \quad \Phi = \max\{F^*, B\}.$$

*Тогда начальная задача* (1), (2) *имеет по крайней мере одно непрерывно дифференцируемое решение на интервале* $J_d$, *где* $d = \min\{T, \Delta\}$.

Доказательство. Рассмотрим пространство $C_d$ непрерывных ограниченных функций $y: J_d \xrightarrow{y} R$ с метрикой, порожденной нормой

$$\|y\| = \sup\{|y(t)| : t \in J_d\}.$$

Пусть $\tilde{Y} \subset C_d$ — замкнутое равностепенно непрерывное множество для которого

$$y \in \tilde{Y} \Rightarrow \{|y(t)| \leq F(t),\ t \in I_d\} \wedge \{y(t) = \dot{\varphi}(t),\ t \in J_0\}. \tag{4}$$

Определенное таким образом множество $\tilde{Y}$ — выпуклое.

Пусть оператор П действует в $C_d$ по формуле

$$\Pi y(t) = \begin{cases} f\big(t;\ x(t),\ \bar{x}(t),\ \tilde{x}(t),\ x(\tau_0);\ \ y(t),\ \bar{y}(t), \\ \tilde{y}(t),\ y(\Delta_0)\big);\quad t > 0 \\ \dot{\varphi}(t);\quad t \leq 0. \end{cases} \tag{5}$$

где

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t y(s)\, ds.$$

Отметим, что для $y \in \tilde{Y}$ функция $\Pi y$ удовлетворяет условию (4).

Покажем, что оператор П непрерывен на $\tilde{Y}$ в смысле метрики пространства $C_d$.

Действительно, неравенство

$$\|x - x'\| \leq ad; \quad a = \text{const},$$

будет выполняться для всех $x$, $x'$, получаемых соответственно из таких $y$, $y'$, для которых $\|y - y'\| \leq a$.

В силу непрерывности $f$, $\tau_k$ и $\Delta_k$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$|f(t;\ \Xi;\ H) - f(t';\ \Xi';\ H)| \leq \varepsilon,$$

$$|\gamma_k(t;\ \Xi;\ H) - \gamma_k(t';\ \Xi';\ H)| \leq \varepsilon,$$

при

$$\max_i |\xi_i - \xi_i'| \leq \delta, \quad |t - t'| \leq \delta.$$

Выберем $\varepsilon_1>0$ настолько малым, чтобы $\delta(\varepsilon_1)=\chi\varepsilon$, где

$$\chi^{-1}=1+M_1+Ld+Q(1+\mu_1+\lambda d)\,\frac{1-q^{m+1}}{1-q}.$$

Пусть кроме того $a=\min\{\chi\varepsilon,\ \varepsilon_1 d^{-1}\}$.

При сделанных предположений имеет место оценка

$$\begin{aligned}(6)\qquad &|\Pi y(t)-\Pi y'(t)|\leqq\chi\varepsilon+L\Phi|\tau_0-\tau_0'|+L\|x-x'\|+\\ &+M_1\|y-y'\|+M\beta|\Delta_0-\Delta_0'|\leqq\chi\varepsilon(1+M_1+Ld)+\\ &+L\Phi|\tau_0-\tau_0'|+M\beta|\Delta_0-\Delta_0'|,\end{aligned}$$

где через $\tau_k'$, $\Delta_k'$ обозначены соответствующие запаздывания, в которых $y$ следует заменить на $y'$.

С другой стороны

$$\begin{aligned}(7)\qquad &|\gamma_k-\gamma_k'|\leqq\chi\varepsilon+\lambda\Phi|\tau_{k+1}-\tau_{k+1}'|+\lambda\|x-x'\|+\\ &+\mu_1\|y-y'\|+\mu\beta|\Delta_{k+1}-\Delta_{k+1}'|;\quad k=0,\ldots,m-1;\\ &|\gamma_m-\gamma_m'|\leqq\chi\varepsilon+\mu_1\|y-y'\|.\end{aligned}$$

Из (7) находим

$$(8)\qquad |\gamma_0-\gamma_0'|\leqq\chi\varepsilon(1+\mu_1+\lambda d)\,\frac{1-q^{m+1}}{1-q}=\frac{\chi\varepsilon}{Q}(\chi^{-1}-1-M_1-Ld).$$

Подставляя (8) в (6) получаем

$$\|\Pi y-\Pi y'\|\leqq\chi\varepsilon(1+M_1+Ld)+Q\,\frac{\chi\varepsilon}{Q}(\chi^{-1}-1-M_1-Ld)=\varepsilon$$

т. е., оператор $\Pi$ непрерывен на $\tilde{Y}$.

В силу равностепенной непрерывности множества $\tilde{Y}$ для каждого $\varepsilon_2>0$ существует $\delta_2=\delta_2(\varepsilon_2)>0$, такое, что $|y(t)-y(t')|\leqq\varepsilon_2$ при всех $y\in\tilde{Y}$ и всех $t,\ t'\in J_d$, для которых $|t-t'|\leqq\delta_2$.

Пусть $|t'-t''|\leqq\delta_3$, где

$$\delta_3=\min\left\{\delta_2,\ \frac{\nu_1\varepsilon_2}{2\beta},\ \delta(\varepsilon_3)\right\},\quad \varepsilon_3=\frac{\nu_1\varepsilon_2}{2}\left(1+Q\,\frac{1-q^{m+1}}{1-q}\right)^{-1}.$$

Предположим, что $t'\in J_0$ и $t''\in I_d$ (случай $t',\ t''\in I_d$ рассматривается аналогично, а случай $t',\ t''\in J_0$ тривиален). Тогда

$$\begin{aligned}(9)\qquad &|\Pi y(t')-\Pi y(t'')|=|\Pi y(t')-\Pi y(0)+\Pi y(0)-\Pi y(t'')|\leqq\\ &\leqq\delta_3\beta+\varepsilon_3+L|x(\tau_0'')-x(\tau_0^0)|+\\ &M_1|y(0)-y(t'')|+M|y(\Delta_0'')-y(\Delta_0^0)|\leqq\\ &\leqq\delta_3\beta+\varepsilon_3+M_1\varepsilon_2+L\Phi|\tau_0''-\tau_0^0|+M\beta|\Delta_0''-\Delta_0^0|,\end{aligned}$$

где через $\gamma_k''$ и $\gamma_k^0$ обозначена какая—нибудь из функций $\tau_k$, $\Delta_k$ в которых $t$ следует заменить соответственно на $t''$ и 0.

Аналогичным образом как в (9) находим оценку

$$|\gamma_k''-\gamma_k^0|\leqq\varepsilon_3+\mu_1\varepsilon_2+\lambda\Phi|\tau_{k+1}''-\tau_{k+1}^0|+$$
$$+\mu\beta|\Delta_{k+1}''-\Delta_{k+1}^0|;\quad k=0,\ldots,m-1;\quad |\gamma_m''-\gamma_m^0|\leqq\varepsilon_3+\mu_1\varepsilon_2,$$

откуда

$$|\gamma_0''-\gamma_0^0|\leqq\frac{1-q^{m+1}}{1-q}(\varepsilon_3+\mu_1\varepsilon_2). \tag{10}$$

Используя (10) для (9) получаем

$$\begin{aligned}&|\Pi y(t')-\Pi y(t'')|\leqq\delta_3\beta+\varepsilon_3\left(1+Q\frac{1-q^{m+1}}{1-q}\right)^{-1}+\\&+(1-\nu_1)\varepsilon_2\leqq\frac{\nu_1\varepsilon_2}{2}+\frac{\nu_1\varepsilon_2}{2}+(1-\nu_1)\varepsilon_2=\varepsilon_2.\end{aligned} \tag{11}$$

Неравенство $|\Pi y(t)|\leqq F(t)$, $t\in I_d$ вместе с (11) показывает, что $\Pi\tilde{Y}\subset\tilde{Y}$. Следовательно оператор $\Pi$ преобразует выпуклое множество $\tilde{Y}$ в относительно компактное множество $\Pi\tilde{Y}\subset\tilde{Y}$ (относительная компактность множества $\Pi\tilde{Y}$ в равномерной топологии пространства $C_d$ следует из включения $\Pi\tilde{Y}\subset\tilde{Y}$), т. е., согласно принципу Шаудера существует по крайней мере одна неподвижная точка $y\in\tilde{Y}$ операторного уравнения $y=\Pi y$, которая и является решением начальной задачи (1), (2) на интервале $J_d$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть функции $f$ и $\gamma_k$ $(k=0,\ldots,m)$ удовлетворяют в $Q_T$ условиям Липшица*

$$|f(t;\ \Xi;\ H)-f(t;\ \Xi';\ H)|\leqq\sum_{i=1}^{4}L_i|\xi_i-\xi_i'|,\quad L_4=L,$$

$$|\gamma_k(t;\ \Xi;\ H)-\gamma_k(t;\ \Xi',\ H)|\leqq\sum_{i=1}^{4}\lambda_i|\xi_i-\xi_i'|,\quad \lambda_4=\lambda.$$

*Тогда начальная задача (1), (2) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение на интервале $J_\alpha$, где $\alpha<\min\{d,\alpha^*\}$, если*

$$0<\alpha^*=(1-\nu_0)\left(L_0+L+Q(\lambda_0+\lambda)\frac{1-q^{m+1}}{1-q}\right)^{-1},$$

$$\nu_0=M_0+\mu_0Q\frac{1-q^{m+1}}{1-q};$$

$$L_0=L_1+L_2+L_3,\quad \lambda_0=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,$$

$$M_0=M_1+M_2+M_3,\quad \mu_0=\mu_1+\mu_2+\mu_3.$$

**Доказательство.** Рассмотрим пространство $C_\alpha$ непрерывных ограниченных функций $y:J_\alpha\xrightarrow{y}R$, с метрикой, порожденной нормой

$$\|y\|=\sup\{|y(t)|:t\in J_\alpha\}.$$

Пусть оператор $\Pi$ действует в $C_\alpha$ по формуле (5).

Ясно, что $\Pi Y \subset Y$, где $Y \subset C_\alpha$:

$$Y = \{y : |y(t)| \leqq F(t),\ t \in I_\alpha;\ y(t) = \dot{\varphi}(t),\ t \in J_0\}.$$

Если $y, y' \in Y$, для соответствующих $x, x'$ имеем $\|x - x'\| \leqq \alpha \|y - y'\|$.

Обозначим через $\alpha'_k$ какую—нибудь из функций $\tau_k$, $\Delta_k$ $(k = 0, \ldots, m)$ в которых $x$ и $y$ следует заменить на $x'$ и $y'$.

Нетрудно получить оценку

$$\begin{aligned}
&|\Pi y(t) - \Pi y'(t)| \leqq L_0 \|x - x'\| + L |x(\tau_0) - x'(\tau'_0)| + \\
&+ M_0 \|y - y'\| + M |y(\Delta_0) - y'(\Delta'_0)| \leqq L_0 \|x - x'\| + \\
&+ L(|x(\tau_0) - x(\tau'_0)| + |x(\tau'_0) - x'(\tau'_0)|) + \\
&+ M_0 \|y - y'\| + M |\dot{\varphi}(\Delta_0) - \dot{\varphi}(\Delta'_0)| \leqq (L_0 + L) \|x - x'\| + \\
&+ M_0 \|y - y'\| + M\beta |\Delta_0 - \Delta'_0| + \Phi L |\tau_0 - \tau'_0|.
\end{aligned} \tag{12}$$

Аналогичным образом имеем

$$|\alpha_k - \alpha'_k| \leqq (\lambda_0 + \lambda) \|x - x'\| + \mu_0 \|y - y'\| + \lambda \Phi |\tau_{k+1} - \tau'_{k+1}| +$$

$$+ \mu\beta |\Delta_{k+1} - \Delta'_{k+1}|; \quad k = 0, \ldots, m-1;$$

$$|\alpha_m - \alpha'_m| \leqq \lambda_0 \|x - x'\| + \mu_0 \|y - y'\|$$

и соответственно

$$|\alpha_0 - \alpha'_0| \leqq \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} \left((\lambda_0 + \lambda) \|x - x'\| + \mu_0 \|y - y'\|\right). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12) получаем

$$\|\Pi y - \Pi y'\| \leqq \varkappa(\alpha) \|y - y'\|$$

где

$$\varkappa(\alpha) = 1 - \nu_0 + \nu_0 \frac{\alpha}{\alpha^*}.$$

Имея ввиду, что $\varkappa(\alpha) < \varkappa(\alpha^*) = 1$, $\Pi$ — оператор сжатия на множестве $Y$, т. е., существует единственное решение $y \in Y$ операторного уравнения $y = \Pi y$, которое может быть найдено итерациями по схеме $y^{(k)} = \Pi y^{(k-1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, при $y^{(0)} \in Y$. Теорема 2 доказана.

## 3. Глобальное существование и единственность решения начальной задачи

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 при $T = \infty$. Пусть кроме того в $Q_\infty$ имеют место условия Липшица*

$$|f(t;\ \Xi;\ H) - f(t';\ \Xi;\ H)| \leqq E |t - t'|,$$

$$|\gamma_k(t;\ \Xi;\ H) - f(t';\ \Xi;\ H)| \leqq e |t - t'|$$

*и пусть $M_2 = M_3 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. Пусть наконец*

$$C_3 - C_2 \geqq 2\sqrt{C_1 C_4}; \quad C_1 \geqq 0,\ C_2 \geqq 0,\ C_3 > 0,\ C_4 \geqq 0, \tag{14}$$

*где*

$$C_1=(E+L_0\Phi)(1-\lambda\Phi)+L\Phi(e+\lambda_0\Phi),$$
$$C_2=M(e+\lambda_0\Phi)-\mu(E+L_0\Phi),$$
$$C_3=(1-M_1)(1-\lambda\Phi)-\mu_1 L\Phi,$$
$$C_4=\mu_1 M+\mu(1-M_1).$$

*Тогда если*

(15) $$\beta\leqq\tilde{\beta}=\frac{1}{2C_4}\left(C_3-C_2+\sqrt{(C_3-C_2)^2-4C_1C_4}\right),$$

*то начальная задача (1), (2) имеет единственное почти всюду непрерывно дифференцируемое решение на интервале $J_\infty$.*

**Доказательство.** Рассмотрим шаговый процесс построения решения с шагом $h_1$, где $h_1=\min\{\Delta_0, h_2\}$ и

$$h_2<(C_3-C_4\tilde{\beta})\left(L_0+L+\tilde{Q}(\lambda_0+\lambda)\right)^{-1},$$
$$\tilde{Q}=(L\Phi+M\tilde{\beta})(1-\lambda\Phi-\mu\tilde{\beta})^{-1}.$$

Производная этого решения удовлетворяет условию Липшица с константой $\tilde{\beta}$.

Действительно, в силу условий теоремы 3 заведомо выполняются и условия теоремы 2, т. е., существует единственное непрерывно дифференцируемое решение $x=x(t)$ начальной задачи на интервале $J_{h_1}$, $h_1\leqq\alpha$.

Обозначим через $\gamma_k'$ какое—нибудь из запаздываний $\tau_k$, $\Delta_k$ $(k=0, \ldots, m)$ в котором $t$ следует заменить на $t'$. Пусть $t$, $t'\in I_{h_1}$. Тогда

(16) $$\begin{aligned}|\dot{x}(t)-\dot{x}(t')|\leqq(E+L_0\Phi)|t-t'|+L\Phi|\tau_0-\tau_0'|+\\+M_1|\dot{x}(t)-\dot{x}(t')|+M\beta|\Delta_0-\Delta_0'|.\end{aligned}$$

С другой стороны

$$|\gamma_k-\gamma_k'|\leqq(e+\lambda_0\Phi)|t-t'|+\lambda\Phi|\tau_{k+1}-\tau_{k+1}'|+\mu_1|\dot{x}(t)-\dot{x}(t')|+$$
$$+\mu\beta|\Delta_{k+1}-\Delta_{k+1}'|;\quad k=0, \ldots, m-1;$$
$$|\gamma_m-\gamma_m'|\leqq(e+\lambda_0\Phi)|t-t'|+\mu_1|\dot{x}(t)-\dot{x}(t')|,$$

откуда следует

(17) $$|\gamma_0-\gamma_0'|\leqq\frac{1}{1-q}\left((e+\lambda_0\Phi)|t-t'|+\mu_1|\dot{x}(t)-\dot{x}(t')|\right).$$

Подставляя (17) в (16), после некоторых выкладок, находим

$$|\dot{x}(t)-\dot{x}(t')|\leqq\frac{C_1+C_2\beta}{C_3-C_4\beta}|t-t'|=\beta_1|t-t'|.$$

Следовательно

$$|\dot{x}(t')-\dot{x}(t'')|\leqq\beta^*(t'-t''|$$

при $t'$, $t''\in J_{h_1}$, где $\beta^*=\max\{\beta, \beta_1\}$.

Но тогда из (14) и (15) получаем оценку $\beta^* \leqq \tilde{\beta}$.

Допустим теперь, что при помощи $l$ ($l \geqq 2$) шагов построено решение начальной задачи на интервале $J_{lh_1}$, с производной, удовлетворяющей условию Липшица с константой $\beta_l$. Продолжим это решение на интервал $J_{(l+1)h_1}$. Как в случае $l=1$ можно доказать, что

$$\beta_{l+1} \leqq \max\left\{\beta_l, \frac{C_1 + C_2\beta_l}{C_3 - C_4\beta_l}\right\} \leqq \tilde{\beta}$$

т. е., индукцией по $l$ показано, что рассматриваемое решение обладает производной, удовлетворяющей условию Липшица с константой $\tilde{\beta}$.

Теперь ясно, что шаговый процесс построения решения можно продолжить до бесконечности и полученное таким образом склеенное решение будет соответствовать утверждению теоремы 3. Теорема 3 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Р. Петухов, Изв. вузов матем., 3 (40), 1964.

Высший машинно — элетктотехнический институт
Имени В. И. Ленина — София