PUBLICATIONS DE l'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 13 (27), 1972, pp. 43—49

LES FAMILLES DE FONCTIONS CONDUISANT AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES IMPLICITES PAR RAPPORT A LA DÉRIVÉE

Andrzej Kapcia

(Reçu le 11 Mai 1972)

Introduction. Dans la présente note nous donnons deux genres de problèmes dont les solutions conduissent aux équations différentielles implicites par rapport à la dérivée. On peut en général formuler ces problèmes comme suit: Soit une famille de solutions $u(p, C)$ satisfaisant à l'équation

$$u' = g(p, u). \tag{I}$$

Le problème consiste à chercher la famille de fonctions en forme paramétrique

$$x = x(p, C), \quad y = y(p, C), \tag{II}$$

qui est définie d'une certaine manière à l'aide de la famille $u(p, C)$ et puis à trouver son équation différentielle (v. P. I. 2, P. II. 1). Ce problème avait résulté d'une remarque du Professeur A. Plis. Les résolutions partielles de ce problème sont les équations différentielles implicites par rapport à la dérivée. Elles sont données dans les théorèmes: th. I. 1 — I. 2, th. II. 1 et coroll. II. 1 — II. 2. Les résultats des th. I. 2 et II. 1 ces sont les généralisations des équations de Clairaut, de d'Alembert et du Professeur D. S. Mitrinović données dans ses travaux [6] p. 113 (v. aussi [3] p. 54 ou [2] p. 394) et [7] p. 23.

I. Familles de fonctions satisfaisant à la condition $u'_p(p, C) \neq 0$.

Introduisons les notations suivantes: on désigne l'intervalle ouvert (x_1, x_2) par X, [l'intervalle ouvert (u_1, u_2) par U etc.]; domaine rectangulaire ouvert $(p_1, p_2;\ u_1, u_2)$ par $P \times U$; fonction inverse par rapport à la fonction $f(x)$ par $f_{-1}(y)$.

Dans ce chapitre nous donnons deux problèmes dont le premier sera résolu complètement et le second partiellement. Le point de départ dans nos considérations constitue la famille de solutions de l'équation différentielle linéaire.

P r o b l è m e I.1. Supposons que:

1° les fonctions $a(p)$ et $b(p)$ soient de la classe C pour $p \in P$,

2° la famille de fonctions $x(p, C)$ satisfasse à l'équation différentielle

$$x' = a(p)\, x + b(p), \tag{I.1}$$

3° les fonctions de la famille $x(p, C)$ satisfassent à la condition

$$x'_p(p, C) \neq 0 \tag{1.1}$$

pour chaque $p \in P$ et C fixé,

4° les fonctions de la famille $y(p, C)$ soient définies à l'aide de l'identité

$$y'_p(p, C) = x'_p(p, C)\, p, \tag{1.2}$$

pour chaque $p \in P$ et C fixé.

On définit donc certaine famille en forme paramétrique (II). Trouver la forme de la famille (II) et son équation différentielle.

Nous avons le théorème suivant:

Théorème I.1. *Si les hypothèses* 1°—4° *du problème* I.1 *sont remplies, alors la famille de fonctions* (II) *est définie paramétriquement par les formules*

$$x = x(p, C), \quad y = x(p, C)\, h(p) + g(p), \tag{II.1}$$

où les fonctions $h(p)$ et $g(p)$ sont convenablement de la forme

$$h(p) = \left(\exp - \int a(p)\, dp\right)\left\{K + \int p\, a(p) \left(\exp \int a(p)\, dp\right) dp\right\}, \tag{1.3}$$

$$g(p) = \int b(p) \left(p - h(p)\right) dp + L, \tag{1.4}$$

où K et L sont les constantes arbitraires et $p \in P$. L'équation différentielle de la famille (II.1) *c'est une équation différentielle de d'Alembert*

$$y = x\, h(y') + g(y'). \tag{1.5}$$

Démonstration. Nous posons

$$x = x(p, C). \tag{1.6}$$

Substituant la solution (1.6) à l'équation (I.1) puis l'identité obtenue à la condition (1.2) nous avons

$$y'_p(p, C) = \left(a(p)\, x(p, C) + b(p)\right) p. \tag{1.7}$$

Ajoutons et sous-trayons dans l'identité (1.7) les expressions $a(p)\, h(p)\, x(p, C)$ et $b(p)\, h(p)$ où $h(p)$ est en forme (1.3), d'après l'accomplissement des groupements convenables, nous obtenons

$$\begin{aligned} y'_p(p, C) = {} & [a(p)\, x(p, C) + b(p)]\, h(p) + \\ & + x(p, C)\, [-a(p)\, h(p) + p\, a(p)] + b(p) \left(p - h(p)\right). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Nous remarquons que l'expression dans la première des parenthèses carrées, en vertu de 2° est égale à $x'_p(p, C)$ et l'expression dans la deuxième est la dérivée de la fonction (1.3). L'identité (1.8) obtient donc la forme

$$y'_p(p, C) = x'_p(p, C)\, h(p) + x(p, C)\, h'_p(p) + b(p) \left(p - h(p)\right), \tag{1.9}$$

d'où, d'après son intégration par rapport à p, nous obtenons

$$y(p, C) = x(p, C)\, h(p) + \int b(p) \left(p - h(p)\right) dp + L. \tag{1.10}$$

En vertu de (1.4) nous avons obtenu la deuxième des équations (II.1). Substituant (1.6) dans la deuxième des équations (II.1) et en profitant des conditions (1.1) et (1.2), en vertu desquelles $p=y'_x(x)=y'$, nous obtenons l'équation différentielle (1.5).

P r o b l è m e I.2. Supposons que:

1° la fonction $g(p,u)$ soit de la classe C pour chaque couple $(p,u)\in P\times U$,

2° $u(p,C)$ soit la famille de solutions de l'équation différentielle (I),

3° la fonction $\psi(u)$ soit de la classe C^1 et telle que $\psi'_u(u)\neq 0$ le long de chaque solution $u(p,C)$ définie pour $p\in P$,

4° les fonctions de la famille $u(p,C)$ satisfassent à la condition

$$u'_p(p,C)\neq 0 \tag{1.11}$$

pour $p\in P$ et C fixé,

5° les fonctions de la famille $x(p,C)$ soient définies par l'égalité

$$x(p,C)=\psi\big(u(p,C)\big) \tag{1.12}$$

pour $p\in P$ et C fixé,

6° les fonctions de la famille $y(p,C)$ soient définies à l'aide de l'identité (1.2) pour $p\in P$ et C fixé.

Nous avons donc défini une famille en forme paramétrique (II). Le problème consiste à trouver la forme de la famille (II) et son équation différentielle.

Nous remarquons que ce problème se réduit au problème I.1 lorsque nous posons $g(p,u)\equiv a(p)u+b(p)$, $\psi(u)\equiv u$. En présent nous formulons le théorème qui donne une solution partielle du problème I.2.

T h é o r è m e I.2. *Si les hypothèses suivantes sont remplies:*

1° *les fonctions $b(p)$ et $c(p)$ sont de la classe C pour $p\in P$ et la fonction $a(p)$ est de la forme*

$$a(p)=-\exp\int b(p)\,dp, \tag{1.13}$$

2° *$u(p,C)$ est la famille de solutions de l'équation différentielle linéaire avec une perturbation en forme*

$$u'=a(p)\,\psi(u)+b(p)\,u+c(p), \tag{I.2}$$

3°, 4° *et* 6° *du problème* I.2, *alors la famille de fonctions* (II) *est définie paramétriquement par les formules*

$$x=\psi\big(u(p,C)\big),\quad y=\psi\big(u(p,C)\big)\,p+u(p,C)\,f(p)+g(p), \tag{II.2}$$

où $p\in P$ et les fonctions $f(p)$ et $g(p)$ sont de la forme

$$f(p)=\exp\int\big(-b(p)\big)\,dp,\quad g(p)=\int\big(-c(p)\,f(p)\big)\,dp+K, \tag{1.14}$$

où K — constante arbitraire. L'équation différentielle de la famille (II.2) *a la forme*

$$y=xy'+\varphi(x)\,f(y')+g(y'), \tag{1.14}$$

où la fonction $\varphi(x)\equiv\psi_{-1}(x)$.

Démonstration. Nous posons

(1.15) $$x = x(p, C) = \psi(u(p, C)).$$

Différenciant (1.15) et profitant de l'identité (1.2) nous obtenons

(1.16) $$y'_p(p, C) = \psi'_u(u(p, C))\, u'_p(p, C)\, p.$$

Ajoutant et sous-trayant dans l'identité (1.16) l'expression $\psi(u(p, C))$ et puis profitant du fait que la famille $u(p, C)$ satisfait à l'équation (I.2), nous obtenons l'identité

(1.17) $$y'_p(p, C) = \psi'_u(u)\, u'_p\, p + \psi(u) - \frac{u'_p}{a(p)} + \frac{b(p)}{a(p)}\, u + \frac{c(p)}{a(p)}.$$

En vertu de la condition (1.13) nous avons donc

(1.18) $$\begin{aligned} y'_p(p, C) = {} & \psi(u(p, C)) + \psi'_u(u(p, C))\, u'_p(p, C)\, p + \\ & + u'_p(p, C)\left(\exp \int (-b(p))\, dp\right) - \\ & - u(p, C)\, b(p)\left(\exp \int (-b(p))\, dp\right) - \\ & - c(p)\left(\exp \int (-b(p))\, dp\right). \end{aligned}$$

En intégrant nous obtenons

(1.19) $$\begin{aligned} y(p, C) = {} & \psi(u(p, C))\, p + u(p, C)\left(\exp \int (-b(p))\, dp\right) + \\ & + \int \left(-c(p)\left(\exp \int (-b(p))\, dp\right)\right) dp + K, \end{aligned}$$

où K est une const. arbitraire. Remarquons que les deux dernières fonctions dans l'expression (1.19) sont en forme (1.14). Nous avons donc obtenu la deuxième équation (II.2). Pour déterminer l'équation différentielle de la famille (II.2) nous remarquons que d'après la première équation (II.2), en vertu de (1.15) et 3° nous avons

(1.20) $$u(p, C) = \psi_{-1}(x(p, C)) \equiv \varphi(x(p, C)) \equiv \varphi(x).$$

D'après 3° et 4° nous avons $x'_p(p, C) \neq 0$, et selon 6° il résulte que

(1.21) $$y'_p(p, C)/x'_p(p, C) = p = y'_x(x) = y'.$$

D'après (1.20) et (1.21) on déduit de la deuxième équation (II.2) l'équation différentielle (1.14).

Nous remarquons que l'équation (1.14) est une généralisation des équations de Clairaut, de d'Alembert et de D. S. Mitrinović de son travail [6]. La méthode de la résolution de cette équation a été donnée dans le travail [1] (v. aussi [4] ou [5]). Les systèmes de fonctions $\varphi(x)$, $f(p)$, $g(p)$ pour lesquels l'équation (1.14) se donne transformer aux types connus ont été donnés p. e. dans le travail [3].

II. Familles de fonctions satisfaisant à la condition $u''_{pp}(p, C) \neq 0$.

Problème II. 1 Supposons que:

1° la fonction $g(p, u)$ soit de la classe C^1 pour chaque couple $(p, u) \in P \times U$,

2° $u(p, C)$ soit la famille de solutions de l'équation différentielle (I), 3° les fonctions de la famille $u(p, C)$ satisfassent à la condition

$$u''_{pp}(p, C) \neq 0 \tag{2.1}$$

pour $p \in P$ et C fixé,

4° les fonctions de la famille $x(p, C)$ soient définies par l'égalité

$$x(p, C) = g\,(p, u(p, C)) \tag{2.2}$$

pour $p \in P$ et C fixé,

5° les fonctions de la famille $y(p, C)$ soient définies à l'aide de identité (1.2) pour $p \in P$ et C fixé.

Nous avons donc défini une famille en forme paramétrique (II). Trouver la forme de la famille (II) en dépendance des fonctions données $g(p, u)$ et $u(p, C)$ et son équation différentielle.

Une solution partielle du problème (II.1) c'est un théorème suivant:

Théorème II.1 *Si les hypothèses suivantes sont remplies:*

1° *les fonctions $a(p)$, $b(p)$ et $\psi(u)$ sont de la classe C^1 dans les intervalles convenables P et U,*

2° *$u(p, C)$ est la famille de solutions de l'équation linéaire généralisée*

$$u' = a(p)\,\psi(u) + b(p), \tag{I.3}$$

3° *du problème* II.1, 4° 1) *la fonction $a(p) \neq 0$ pour $p \in P$,*

4° 2) *la fonction $\psi(u)$ est telle que $\psi'_u(u) \neq 0$ le long de chaque solution définie pour $p \in P$,*

5° *du problème* (II.1), *alors la famille de fonctions* (II) *est définie paramétriquement par les formules*

$$\begin{aligned} x &= a(p)\,\psi\big(u(p, C)\big) + b(p), \\ y &= \big\{a(p)\,\psi\big(u(p, C)\big) + b(p)\big\}\,p - u(p, C) + K, \end{aligned} \tag{II.3}$$

où K — une const. arbitraire et $p \in P$. L'équation différentielle de la famille (II.3) *c'est une équation différentielle de la forme*

$$y = xy' + \varphi\big(c(y')\,x + d(y')\big) + K, \tag{2.3}$$

où $\varphi(z) \equiv -\psi_{-1}(z)$, $c(y') \equiv 1/a(y')$, $d(y') \equiv -b(y')/a(y')$.

Démonstration. Nous posons

$$x = x(p, C) = a(p)\,\psi\big(u(p, C)\big) + b(p). \tag{2.4}$$

Différenciant (2.4) et profitant de l'identité (1.2) nous obtenons

$$y'_p(p, C) = \big[a'(p)\,\psi\big(u(p, C)\big) + a(p)\,\psi'_u\big(u(p, C)\big)\,u'_p(p, C) + b'(p)\big]\,p. \tag{2.5}$$

Vu que la dérivée dans la parenthèse carrée c'est la seconde dérivée de la famille $u(p, C)$, qui selon de 3° est différente de zéro, et plus c'est la première dérivée de la famille $x(p, C)$, alors nous avons

$$x'_p(p, C) \neq 0 \tag{2.6}$$

pour $p \in P$ et C fixé. De (2.5) en vertu de l'hypothèse 2° on déduit

$$(2.7) \qquad y'_p(p, C) = \{[a(p)\psi(u(p, C)) + b(p)]\, p\}'_p - u'_p(p, C).$$

En intégrant nous obtenons

$$(2.8) \qquad y(p, C) = [a(p)\psi(u(p, C)) + b(p)]\, p - u(p, C) + K,$$

où K — une const. arbitraire. Nous avons obtenu la deuxième équation du système (II.3). De l'hypothèse 5° et de la condition (2.6) résulte que pour le système d'équations (II.3) est remplie la formule (1.21). En conséquance de la première d'équations (II.3) à côté de l'hypothèse 4° et de (1.21) nous avons

$$(2.9) \qquad u(p, C) = \psi_{-1}\left(\frac{x - b(y')}{a(y')}\right).$$

Profitant dans la deuxième des équations du système (II.3) de la première équation (II.3), d'après (1.21) et (2.9) on en déduit l'équation

$$(2.10) \qquad y = xy' - \psi_{-1}\left(\frac{x - b(y')}{a(y')}\right) + K,$$

d'où après les substitutions $-\psi_{-1}(z) \equiv \varphi(z)$, $1/a(y') \equiv c(y')$, $-b(y')/a(y') \equiv d(y')$ nous obtenons l'équation différentielle (2.3).

Du thèorème II.1 résultent les corollaires suivants:

Corollaire II.1 *Si les hypothèses suivantes sont remplies*:

1° *les fonctions $a(p)$ et $b(p)$ sont de la classe C^1 pour $p \in P$,*

2° *$u(p, C)$ est une famille de solutions de l'équation linéaire*

$$(I.4) \qquad u' = a(p)\, u + b(p),$$

3°, 4° 1, 5° *du théorème* II.1, *alors la famille de fonctions* (II) *est définie paramétriquement par les formules*

$$(II.4) \qquad \begin{aligned} x &= a(p)\, u(p, C) + b(p), \\ y &= \{a(p)\, u(p, C) + b(p)\}\, p - u(p, C) + K, \end{aligned}$$

où K — une const. arbitraire et $p \in P$. L'équation différentielle de la famille (II.4) *c'est une équation de d'Alembert à la forme*

$$(2.11) \qquad y = x\, h(y') + g(y'),$$

où $h(y') \equiv (y'\, a(y') - 1)/a(y')$, $g(y') \equiv b(y')/a(y') + K$.

Corollaire II.2 *Si les hypothèses suivantes sont remplies*:

1° *les fonctions $a(p)$ et $\psi(u)$ sont de la classe C^1 dans les intervalles convenables P et U,*

2° *$u(p, C)$ est une famille de solutions de l'équation différentielle à variables séparables*

$$(I.5) \qquad u' = a(p)\, \psi(u),$$

3°, 4° *et* 5° *du théorème* II.1, *alors la famille de fonctions* (II) *est définie paramétriquement par les formules*

$$x=a(p)\,\psi\big(u(p,C)\big),$$
$$\text{(II.5)}\qquad y=\big\{a(p)\,\psi\big(u(p,C)\big)\big\}\,p-u(p,C)+K,$$

où K *— une const. arbitraire et* $p\in P$. *L'équation différentielle de la famille* (II.5) *a la forme*

$$\text{(2.12)}\qquad y=xy'+\varphi\big(c(y')\,x\big)+K,$$

où $\varphi(z)\equiv-\psi_{-1}(z)$, $c(y')\equiv 1/a(y')$.

L'équation (2.12) a été donnée par D. S. Mitrinović dans son travail [7] p. 23. La méthode de l'obtention de cette équation était autre. Il est évident que l'équation (2.3) est une généralisation des équations de Clairaut, de d'Alembert et de l'équation (2.12). De nos considérations résulte qu'on peut obtenir beaucoup de classes de fonctions en forme (II) dont les équations différentielles ces sont les équations implicites par rapport à la dérivée.

LITTÉRATURE

[1] C. Ginalski, A. Kapcia, *O pewnej klasie rownan rozwiązanych względem funkcji*, Zesz. nauk. Polit. Częst. 7, Nauki podst. 1, (1960) pp. 3—6.

[2] E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen* I, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Leipzig 1959.

[3] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy.* I. *Une généralisation des équations différentielles de Clairaut et de d'Alembert transformée aux équations des types connus*, Publ. Inst. Math., Belgrade, Nouvelle série 12 (26), (1971), pp. 51—61.

[4] A. Kapcia, *Sur une généralisation des équations différentielles de Clairaut et de d'Alembert et sur ses solutions paramétriques*, Ann. Soc. Pol. Math. Commentationes Mathematicae (sous presse).

[5] A. Kapcia, *Badanie regularnosci i osobliwosci calek pewnego uogolnienia rownan Clairauta i d'Alemberta*, Zesz. nauk. Polit. Częst. 31, Nauki podst. 7, (1964), pp. 79—104.

[6] D. S. Mitrinović, *Nouveaux cas d'intégrabilité d'une équation différentielle du premier ordre*, Acad. Royale Serbe, Bull. Acad. Sc. math. nat. (A) 1, (1933) pp. 107—117.

[7] D. S. Mitrinović, *Istraživania o jednoj važnoj differencijalnoj jednačini prvoga reda*, Beograd 1935.

Institut Mathématique
L'École Polytechnique, Częstochowa, Pologne