

SCHEIBENSCHWINGUNGEN IN RÄUMLICH BEGRENZTER
ROTIERENDER FLÜSSIGKEIT

Zum 70-en Geburtstag von Herrn Prof. Dr. Konstantin P. Voronjec gewidmet.
Vladan D. Đorđević

(Dargestellt am 15. März 1972)

Görtler [1] zeigte, dass die durch die kleinen Schwingungen eines Körpers in einer inkompressiblen reibungslosen rotierenden Flüssigkeit verursachten Strömungsvorgänge sich wesentlich unterscheiden in Abhängigkeit davon, ob die Schwingungsfrequenz grösser oder kleiner ist als die doppelte Winkelgeschwindigkeit des ganzen Systems. Im ersten Fall sind nämlich die Strömungsgrundgleichungen vom elliptischen, und im zweiten Fall vom hyperbolischen Typ. Einige konkrete Beispiele mit gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen sind später theoretisch als auch experimentell in den Arbeiten von Oser [2], [3] und Reynolds [4], [5] durchgearbeitet. Die Schwingungen in Richtung der Rotationsachse einer endlichen in der Öffnung einer unendlichen Platte senkrecht zur Rotationsachse aufgestellten Scheibe in einer räumlich unbegrenzten Flüssigkeit wurden betrachtet, wobei die besondere Aufmerksamkeit zum hyperbolischen Fall, der sich als interessanter und komplizierter zeigte, gewidmet wurde. Das Grundproblem bestand in dem Ansatz von zeitlich-harmonischen erzwungenen Schwingungen. Oser [2] hat angenommen, dass die zeitlich-harmonischen erzwungenen Schwingungen im ganzen zeitlichen Intervall $0 \leq t < \infty$ vorhanden sind und hat eine Lösung erhalten benützend neben den für die Strömung einer reibungslosen Flüssigkeit üblichen Randbedingungen noch die zu strenge Randbedingung, die die radiale Geschwindigkeitskomponente auf der Scheibe ausschliesst. Man kann sagen, dass die Lösung von Oser [2] zum Fall einer Scheibe, die wie eine Schallplatte die kreisförmigen Risse besitzen würde, entspricht. Die Risse gestatten keine radiale Teilchenverschiebung, obwohl es sich um die reibungslose Flüssigkeit handelt. Diese Lösung zeigt, dass die ganze Flüssigkeit in axialer Richtung in der gleichen Phase mit der Scheibe oszilliert. Dementgegen hat Reynolds [4], [5] benützend die Anfangsbedingungen für den Fall einer ruckartigen Bewegung aus der Ruhe dasselbe Problem vermittels der Laplace-Transformation behandelt und hat gezeigt, dass der Zustand zeitlich-harmonischer erzwungener Schwingungen erst für $t \rightarrow \infty$ entsteht, bzw. dass eine Übergangserscheinung vorhanden ist, obwohl es sich um die reibungslose Flüssigkeit handelt. Seine Lösung enthält neben der mit der Scheibe in der gleichen Phase stehenden Komponente auch eine gegenphasige Komponente. Das Bestehen dieser Komponente kann durch die Tatsache erklärt werden, dass im hyperbolischen Fall, in dem sich die durch die Scheibenschwingungen verursachten Störungen durch die ganze Flüssigkeit ausbreiten, eine dauernde

Energiezufuhr von der Scheibe nötig ist. Auf dem im hyperbolischen Fall bei Aufwärtsbewegung der Scheibe mit maximaler Geschwindigkeit gegebenen Strömungsbild [2] sind die Charakteristikenflächen, die am Rande der Scheibe entstehen und das Strömungsfeld in vier Bereiche verteilen, klar zu bemerken. Der kegelförmige Bereich über der Scheibe besitzt nur eine Geschwindigkeitskomponente in vertikaler Richtung. Die Flüssigkeit schwingt hier genau, d.h. nach Amplitude und Phase mit der Scheibe. Im Bereich zwischen den Charakteristikenflächen wird ein Wirbel gebildet, der sich im Unendlichen geschlossen wird und von den Stromlinien, die von der Scheibe ausgehen, umgeströmt wird. Man kann sagen, dass diese Stromlinien den Wirbel im Unendlichen umkreisen, durch die Charakteristikenfläche gehen und in den Bereich, der über dem kegelförmigen Bereich liegt, eindringen. Der Bereich unter den Charakteristikenflächen ist in diesem Augenblick völlig störungsfrei. Die Charakteristikenflächen stellen gleichzeitig die Orte von Regularitätsdefekten der Lösungen dar.

Der Fall einer in axialer Richtung mit zwei elastischen Scheiben begrenzten Flüssigkeit ist von Baines [6] durchgearbeitet, wobei gezeigt wurde, dass es möglich ist, in einem solchen System zur Resonanz zu kommen, was später experimentell von McEwan [7] bestätigt wurde.

Diese Beispiele, als auch noch einige in den schon erwähnten Arbeiten von Reynolds gelöste Randwertaufgaben weisen darauf hin, dass die allgemeine theoretische Untersuchung von Görtler nicht ganz dieses Gebiet der Strömungen in rotierenden Systemen erschöpft. Das Ziel in dieser Arbeit besteht in einer vollständigeren Untersuchung von Scheibenschwingungen in räumlich begrenzter rotierender Flüssigkeit. Im ersten Teil wird es angenommen, dass die Flüssigkeit nur in radialer Richtung begrenzt ist, während im zweiten Teil die Scheibenschwingungen in einer auch in axialer Richtung begrenzten Flüssigkeit betrachtet werden.

1. Teil

Sei die Scheibe vom Radius r_0 in einem unendlichen Kreiszyylinder vom Radius r_1 mit der Frequenz β_1 oszilliert und es sei ω die Winkelgeschwindigkeit des ganzen Systems. Führt man die Masstäbe r_1 , 2ω , w_0 und $2\omega\rho w_0 r_1$ für die Länge, die Zeit, die Geschwindigkeit und den Druck, wobei w_0 die maximale Geschwindigkeit der Scheibe und ρ die Dichte ist und bezeichnet man mit grossen Buchstaben die dimensionslosen Grössen, werden die dieser Arbeit zugrundeliegenden Gleichungen für eine instationäre geostrophische inkompressible Strömung lauten:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial U}{\partial T} - V = - \frac{\partial P}{\partial R} \\
 & \frac{\partial V}{\partial T} + U = 0 \\
 & \frac{\partial W}{\partial T} = - \frac{\partial P}{\partial Z} \\
 & \frac{\partial(RU)}{\partial R} + \frac{\partial(RW)}{\partial Z} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

mit den Anfangs und Randbedingungen für U und W :

$$\left. \begin{array}{l} T \leq 0: \quad U = 0, \quad W = 0 \\ R = 0: \quad |U| < \infty \\ R = 1: \quad U = 0 \\ Z = 0: \quad W = \sin \beta T, \quad 0 \leq R \leq M_0 \\ \quad \quad W = 0, \quad M_0 < R \leq 1 \\ Z \rightarrow \infty: \quad |W| < \infty. \end{array} \right\} T > 0$$

Hier sind T die Zeit, R und Z die Zylinderkoordinaten, U , V und W die radiale, azimutale und axiale Geschwindigkeitskomponente, P der Druck, $M_0 = r_0/r_1$ und $\beta = \beta_1/2\omega$ ($\beta < 1$ im hyperbolischen Fall).

Bezeichnet man mit einem Strich von oben die Laplace-Transformierte von der entsprechenden Funktion, z.B. $\bar{U} = \int_0^\infty e^{-sT} U dT$, $\text{Re } s > 0$, erhält man aus dem System (1):

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{U}}{\partial R} - \frac{\bar{U}}{R^2} + \left(1 + \frac{1}{s^2}\right) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial Z^2} = 0,$$

mit den Randbedingungen: $R=0$, $|\bar{U}| < \infty$ und $R=1$, $\bar{U}=0$. Vermittels der Fourier-Methode kann man die folgende Lösung dieser Gleichung bekommen:

$$\bar{U} = \sum_{n=1}^{\infty} J_1(K_n R) \left(A_n e^{\frac{sK_n}{\sqrt{1+s^2}} Z} + B_n e^{-\frac{sK_n}{\sqrt{1+s^2}} Z} \right).$$

Die Eigenwerte K_n stellen die positiven Wurzeln von der transzendenten Gleichung $J_1(K)=0$, $K>0$ dar. A_n und B_n sind die beliebigen Konstanten, die noch aus den Randbedingungen für W zu bestimmen sind. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt:

$$\bar{W} = f(R) + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(K_n R) \left(B_n e^{-\frac{sK_n}{\sqrt{1+s^2}} Z} - A_n e^{\frac{sK_n}{\sqrt{1+s^2}} Z} \right) \frac{\sqrt{1+s^2}}{s}.$$

Es ist anschaulich, dass $A_n=0$ muss sein. Entwickelt man die mit der Randbedingung:

$$Z=0: \quad \bar{W} = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}, \quad 0 \leq R \leq M_0$$

$$\bar{W} = 0, \quad M_0 < R \leq 1$$

gegebene Funktion in die entsprechende Fourier-Bessel-Reihe, so erhält man:

$$D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(K_n R)$$

wo $D_0 = \frac{\beta M_0^2}{s^2 + \beta^2}$ und $D_n = \frac{2 M_0 J_1(K_n M_0) \beta}{K_n J_0^2(K_n) (s^2 + \beta^2)}$ sind. Es muss also: $f(R) = D_0$ und $\frac{B_n \sqrt{1+s^2}}{s} = D_n$ sein und endlich haben wir:

$$\bar{W} = \frac{\beta M_0^2}{s^2 + \beta^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 M_0 J_1(K_n M_0) J_0(K_n R)}{K_n J_0^2(K_n)} \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} e^{-\frac{s K_n Z}{\sqrt{1+s^2}}}$$

Die Abhängigkeit von s in diesem Ausdruck ist gleich dieser in der Arbeit von Reynolds [3], so dass wir bei der Berechnung der Originalfunktion direkt seine Ergebnisse benutzen können. Für $T \rightarrow \infty$ im hyperbolischen Fall erhält man:

$$(2) \quad W = M_0^2 \sin \beta T + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 M_0 J_1(K_n M_0) J_0(K_n R)}{K_n J_0^2(K_n)} \sin \left(\beta T - \frac{\beta K_n Z}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt dann:

$$(3) \quad U = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 M_0 J_1(K_n M_0) J_0(K_n R)}{K_n J_0^2(K_n)} \cos \left(\beta T - \frac{\beta K_n Z}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

Auf Grund von diesen zwei Ausdrücken ist bei Aufwärtsbewegung der Scheibe mit maximaler Geschwindigkeit für $M_0 = 1/2$ das Strömungsbild gezeichnet (Abb. 1). Die Reihen (2) und (3) konvergieren sehr langsam, so dass bei der Summierung ihre Euler-Transformation [8] benutzt wurde. Die Stromlinien

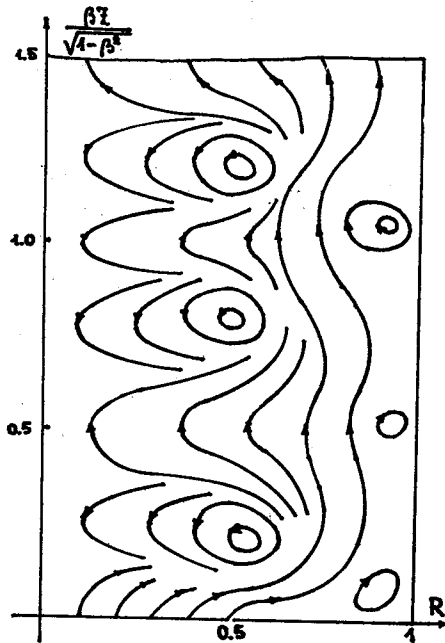


Abb. 1

sind aus den Richtungselementen aufgebaut. Die Stromlinienabstände sind willkürlich gewählt und bedeuten nicht, dass überall dieselben Durchflussmengen vorliegen.

Die Abb. 1 ist typisch für eine hyperbolische Strömung, denn es ist anschaulich, dass die Störungen sich durch die ganze Flüssigkeit ausbreiten.

Das gemeinsame Element mit der von Oser [2] für den Fall einer unbegrenzten Flüssigkeit erhaltenen Abbildung sind die Wirbel, die jetzt nur geschlossen sind und von den Stromlinien, die von der Scheibe ausgehen, umgeströmt werden. In der Nähe von der Wand des Zylinders sind kleine Totgebiete zu bemerken. Die Charakteristikenflächen, die hier noch an der Wand des Zylinders reflektiert werden würden und wie im Falle einer unbegrenzten Flüssigkeit mögliche Orte von Regularitätsdefekten der Lösungen darstellen würden, sind nicht „sichtbar“. Diese Tatsache kann durch die Behandlung dieses Problems mittels der Fourier-Bessel-Reihen, die, wie bekannt, nicht für die Darstellung von Funktionen mit Singularitäten geeignet sind, erklärt werden. Damit sind eigentlich alle eventuelle „Unebenheiten“ im Strömungsfeld „ausgeglättet“ und ist ein sehr „erwachsenes“ Strömungsbild erhalten.

2. Teil

Um die Scheibenschwingungen in einer auch in axialer Richtung begrenzten Flüssigkeit auszulernen, ist ein solches Modell gewählt, bei dem der Zylinder auf dem Abstand h von der Scheibe senkrecht zur Rotationsachse mit einer Platte, die eine Öffnung in der Mitte enthält, aufgeteilt ist. In der Öffnung befindet sich eine andere Scheibe von demselben Radius r_0 , die mit der ersten Scheibe festgebunden ist, so dass zusammen mit ihr nach der gleichen Amplitude und Phase oszilliert. Es ist anschaulich, dass diese Scheibe wegen Kontinuität zugegeben werden musste. Die Randbedingung für $Z=H=h/r_1$ hat dieselbe Form wie für $Z=0$. Die Bildfunktion lautet:

$$\bar{W} = \frac{\beta M_0^2}{s^2 + \beta^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 M_0 J_1(K_n M_0) J_0(K_n R)}{K_n J_0^2(K_n)} \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{s K_n H}{\sqrt{1+s^2}} \left(1 - \frac{Z}{H}\right) + \operatorname{sh} \frac{s K_n Z}{\sqrt{1+s^2}}}{\operatorname{sh} \frac{s K_n H}{\sqrt{1+s^2}}}.$$

Man kann zeigen, dass diese Funktion in der Ebene s nur einfache Pole hat und zwar in den Punkten:

$$\frac{s K_n H}{\sqrt{1+s^2}} = \pm m \pi i, \quad m = 1, 2, 3, \dots \text{ bzw. } s_{mn} = \pm \frac{m \pi i}{\sqrt{m^2 \pi^2 + K_n^2 H^2}}$$

und in den Punkten $s_0 = \pm i \beta$. Die ersten Pole liegen zwischen den Punkten $-i$ und i , die gleichzeitig die Grenzpunkte, bzw. die nichtisolierten Singularitäten darstellen. Die Pole $\pm i \beta$ liegen im hyperbolischen Fall auch zwischen $-i$ und i , so dass es möglich ist, dass die Pole übereinanderfallen. Das geschieht wenn:

$$\frac{m \pi}{\sqrt{m^2 \pi^2 + K_n^2 H^2}} = \beta \text{ ist, bzw. (4) } \frac{\beta H}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m \pi}{K_n}, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

wobei dann die Pole zweiter Ordnung entstehen. Für den Fall einer solchen Bildfunktion, die in den endlichen Punkten der Ebene s nichtisolierte Pole besitzt, wurde bei der Berechnung der Originalfunktion dieselbe Prozedur wie in der Arbeit von Baines [6] angewandt. Die Residuen in den Polen wurden berechnet und dann wurde noch überprüft, ob ihre Summe alle notwendige

Bedingungen erfüllt. Wenn die Pole nicht übereinanderfallen, erhält man im hyperbolischen Fall:

$$W = M_0^2 \sin \beta T + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 M_0 J_1(K_n M_0) J_0(K_n R)}{K_n J_0^2(K_n)} \left\{ \frac{\sin \frac{\beta K_n H}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \frac{Z}{H}\right) + \sin \frac{\beta K_n Z}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\sin \frac{\beta K_n H}{\sqrt{1-\beta^2}}} \sin \beta T + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2 \beta K_n^2 H^2 \left[\sin m \pi \left(1 - \frac{Z}{H}\right) + \sin m \pi \frac{Z}{H} \right]}{[K_n^2 H^2 \beta^2 - m^2 \pi^2 (1 - \beta^2)] \sqrt{m^2 \pi^2 + K_n^2 H^2}} \sin \frac{m \pi T}{\sqrt{m^2 \pi^2 + K_n^2 H^2}} \right\}.$$

Wenn die Pole übereinanderfallen lautet der entsprechende Ausdruck:

$$W = M_0^2 \sin \beta T + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 M_0 J_1(K_n M_0) J_0(K_n R)}{K_n J_0^2(K_n)} \left\{ \left[\sin \pi M \left(1 - \frac{Z}{H}\right) + \sin \pi M \frac{Z}{H} \right] \cdot \right. \\ \cdot \frac{(-1)^M}{\pi M} \left[\beta (1 - \beta^2) T \cos \beta T - \left(\frac{1}{2} + \beta^2 \right) \sin \beta T \right] + \\ + (-1)^M \left[\left(1 - \frac{Z}{H}\right) \cos \pi M \left(1 - \frac{Z}{H}\right) + \frac{Z}{H} \cos \pi M \frac{Z}{H} \right] \sin \beta T + \\ \left. + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq M}}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2 \beta K_n^2 H^2 \left[\sin m \pi \left(1 - \frac{Z}{H}\right) + \sin m \pi \frac{Z}{H} \right] \sin \frac{m \pi T}{\sqrt{m^2 \pi^2 + K_n^2 H^2}}}{[K_n^2 H^2 \beta^2 - m^2 \pi^2 (1 - \beta^2)] \sqrt{m^2 \pi^2 + K_n^2 H^2}} \right\}.$$

Mit M ist dieses Wert von m bezeichnet, bei dem zum Übereinanderfallen der Pole kommt.

Diese beiden Ausdrücke gelten für alle $T > 0$ vom Anfang der Bewegung an. Es ist anschaulich, dass der Ansatz zeitlich-harmonischer erzwungenen Schwingungen in diesem Fall überhaupt nicht zu benutzen ist, denn die Residuen in den Polen s_{mn} geben die harmonischen Schwingungen der Form

$\sin \frac{m \pi T}{\sqrt{m^2 \pi^2 + K_n^2 H^2}}$, die β nicht enthalten und demgemäss die Eigenschwingungen

des Systems darstellen. Ausserdem, wenn die Pole übereinanderfallen geben die Residuen in den so entstandenen Polen zweiter Ordnung ein Glied der Form $T \cos \beta T$! Die Amplituden wachsen also linear mit der Zeit und die Resonanz auftritt. Für eine genauere Untersuchung der Strömungserscheinungen in diesem Fall sind die hier angewandten linearisierten Gleichungen nicht genügend. Der Ausdruck (4), der eigentlich ein Kriterium für die Entstehung der Resonanz darstellt, lautet in dimensionaler Form:

$$\frac{\beta_1}{\sqrt{4 \omega^2 - \beta_1^2}} \frac{h}{r_1} = \frac{m \pi}{K_n}, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Man kann zeigen, dass die Zahlen $m\bar{u}/K_n$ sehr dicht sind. Das bedeutet, dass ein solches System praktisch immer, für jede ω , $\beta_1 < 2\omega$, h und r_1 , sich in einem zur Resonanz naheliegenden Zustand befindet.

L I T E R A T U R

- [1] G ö r t l e r, H., *Einige Bemerkungen über Strömungen in rotierenden Flüssigkeiten*, Z. angew. Math. Mech. 24, 210—14, 1944.
- [2] O s e r, H., *Erzwungene Schwingungen in rotierenden Flüssigkeiten*, Arch. Ratl. Mech. Anal. I, 81—96, 1957.
- [3] O s e r, H., *Experimentelle Untersuchung über harmonische Schwingungen in rotierenden Flüssigkeiten*, Z. angew. Math. Mech. 38, 386—91, 1958.
- [4] R e y n o l d s, A., *Forced oscillations in a rotating liquid (I)*, Z. angew. Math. Phys. 13, 460—8, 1962.
- [5] R e y n o l d s, A., *Forced oscillations in a rotating liquid (II)*, Z. angew. Math. Phys. 13, 561—72, 1962.
- [6] B a i n e s, P. G., *Forced oscillations of an enclosed rotating fluid*, J. Fluid Mech. 30, 533—46, 1967.
- [7] M c E w a n, A. D., *Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder*, J. Fluid Mech. 40, 603—40, 1970.
- [8] K a š a n i n, R., *Viša matematika II/1*, Naučna knjiga, 335—42, 1949.