

## ОБОБЩЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ Л. Г. ЛОЙЦЯНСКОГО

*В. Н. Сальников*

(Сообщено 19 января 1972)

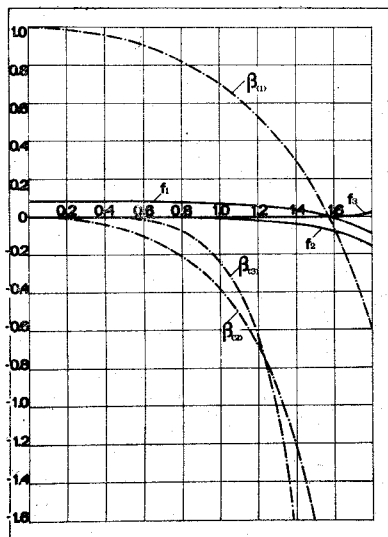
Посвящается профессору Ленинградского Политехнического Института Л. Г. Лойцянскому, по поводу 70-летия со дня рождения и 50-летия научной и педагогической деятельности.

Одним из путей усовершенствования современных аналитических методов для расчета ламинарного пограничного слоя является приведение соответствующих основных уравнений к универсальному виду, не содержащему уже ни в своем составе ни в граничных условиях скорость внешнего потока, отличающую отдельные конкретные задачи. Ряд авторов (Л. Г. Лойцянский [1], В. Я. Шкадов [2], В. Н. Сальников — С. Н. Ока [3]) указали возможные формы универсальных уравнений теории пограничного слоя, основываясь на введении различных совокупностей формпараметров вместо продольной координаты.

Однако результаты расчетов пограничного слоя для некоторых характерных случаев (изложенных в докладах [4]), выполненных с целью сравнения различных параметрических методов, показали что при одинаковом порядке параметрических приближений, результаты полученные применением метода Л. Г. Лойцянского [1], самые близкие к точным значениям. Для быстроты сходимости достигнутой этим методом характерно его двухпараметрическое приближение, применение которого приводит к результатам расчета пограничного слоя (Нпр. для случая обтекания круглого цилиндра, [5], стр. 644) уже почти полностью совпадающим с точными значениями, исключая небольшую область в непосредственной близости к точке отрыва.

Существенное влияние на хорошую сходимость в этом случае оказывает, как уже указывал и сам Л. Г. Лойцянский [1], удачный выбор совокупности формпараметров. Сравнение поведения первых трех из этих параметров, а именно  $f_1, f_2, f_3$ , вдоль контура круглого цилиндра, с распределением соответствующих параметров  $\beta_{(1)}, \beta_{(2)}, \beta_{(3)}$  метода Сальников — Ока (проведенное в [4], стр. 134) показывает (Фиг. 1), что эти последние, т.е.  $\beta_{(k)}$ , с приближением к точке отрыва возрастают бесконечно и то всё быстрее с увеличением показателя  $(k)$ , тогда как значения формпараметров  $f_k$  с увеличением  $k$  уменьшаются, так что нпр. формпараметр  $f_3$  уже ничтожно мал повсюду, кроме окрестности точки отрыва. Этот факт подтверждает снова что предпочтение должно быть отдано выбору

совокупности формпараметров Л. Г. Лойцянского [1]. Такая оценка становится еще более обоснованной после построения Л. Г. Лойцяским [6] той же совокупности формпараметров  $f_k$ , но теперь уже исходя от идеи обобщенного подобия профилей скорости в сечениях пограничного слоя.



Фиг. 1

Однако с точки зрения практического применения, параметрический метод Л. Г. Лойцянского обладает свойством несколько осложняющим расчет пограничного слоя и следовательно увеличивающим соответствующую затрату времени. Оно состоит в том что для разыскания величин пограничного слоя, характерных для данной конкретной задачи, необходимо каждый раз дополнительно проинтегрировать уравнение импульсов являющееся обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Расчет пограничного слоя, проведенный Найфельдом [7] (его результаты изложены в докладах [4], стр. 108) для случая обтекания цилиндра эллиптического сечения, при различных соотношениях полуосей эллипсиса  $k = b/a$ , показал, что разыскание величин характерных для этой конкретной задачи происходил, при применении метода [1], не без некоторых осложнений, тогда как соответствующий расчет, следуя метод [3], в котором нет, между прочим, необходимости в дополнительном решении какого либо дифференциального уравнения, протекал гораздо быстрее, хотя и с некоторым ухудшением сходимости, о чем уже говорилось выше. Возможно, что именно это обстоятельство бы могло, не смотря на все остальные достоинства параметрического метода [1], отпугнуть практик-инженера, часто требующего быстрого разыскания характерных величин пограничного слоя, иногда в ущерб достигаемой при этом точности.

Нам поэтому казалось что дальнейшее усовершенствование параметрических методов, необходимо было бы направить в сторону упрощения самого применения таблиц универсального решения, сохраняя при этом, по мере возможности, совокупность Л. Г. Лойцянского  $f_k$ , обеспечивающую параметрическому методу хорошую, пока непревзойденную,

сходимость, и пользуясь вышеизложенным опытом приобретенным в работе [3].

В наших исследованиях преследовалась сперва эта, намеченная выше, цель. Однако впоследствии оказалось, что при этом достигнутое обобщение универсального уравнения Л. Г. Лойцянского может само по себе являться интересным результатом заслуживающим внимание, поскольку даёт возможность получения различных, в литературе существующих, преобразованных уравнений пограничного слоя, являющихся теперь уже только частными случаями этого обобщения.

Поэтому первая часть работы посвящена выводу именно этого обобщенного универсального уравнения.

### § 1. Обобщение универсального уравнения Л. Г. Лойцянского

Уравнения ламинарного плоского пограничного слоя в несжимаемой жидкости сводятся как известно к одному уравнению для функции тока  $\psi(x, y)$

$$(1.1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

с граничными условиями

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 & \quad \text{при } y = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U(x) & \quad \text{при } y \rightarrow \infty \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_0(y) & \quad \text{при } x = x_0 \end{aligned}$$

причем здесь приняты обычные, в теории пограничного слоя, обозначения. А именно:

- $x$  — продольная координата,
- $y$  — поперечная координата,
- $u(x, y)$  — продольная скорость в пограничном слое,
- $u_0(y)$  — распределение скоростей в некотором заданном сечении  $x = x_0$  пограничного слоя,
- $U(x)$  — продольная скорость на внешней границе пограничного слоя,
- $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости.

В качестве переменных выберем

$$(1.3) \quad \xi = \xi(x); \quad \eta = h(x) \frac{U^{b/2}}{\nu \sqrt{2\xi}} y,$$

причем постоянная  $b$  — является действительным числом, а  $h(x)$  любой непрерывной функцией. Предположим также, что переменные  $\xi, \eta$  представляют непрерывные функции координат  $x$  и  $y$ .

Соответствующую функцию тока  $\psi$  выберем в следующем виде

$$(1.4) \quad \psi = \frac{1}{h(x)} \nu U^{1-b/2} \sqrt{2\xi} \Phi(\xi, \eta).$$

Выполняя в (1.1) и (1.2) преобразования (1.3) и (1.4) получим сперва уравнение

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \frac{\sqrt{2\nu\xi}}{hU^{b/2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{\sqrt{2\nu\xi}}{hU^{b/2}} U \right) \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{2\nu\xi U'}{h^2 U^b} \left[ 1 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ = \frac{2\nu\xi U^{1-b}}{h^2} \frac{d\xi}{dx} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_0 \quad \text{при} \quad \xi = \xi_0(x_0). \end{aligned}$$

Пользуясь определением толщины потери импульса

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy,$$

и преобразуя его при помощи (1.3) и (1.4) получим соотношение

$$(1.7) \quad \delta^{**} = \frac{\nu \sqrt{2\xi}}{hU^{b/2}} \int_0^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \left( 1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\eta = \frac{\nu \sqrt{2\xi} B}{hU^{b/2}},$$

причем величина  $B$ , введенная вместо интеграла, является непрерывной функцией переменной  $\xi$ , а следовательно и координаты  $x$ , т.е.

$$B = B[\xi(x)] = B(x).$$

Рассматривая теперь формпараметр однопараметрических методов

$$(1.8) \quad f = \frac{U' \delta^{**2}}{\nu},$$

и подставляя в него (1.7), получим соотношение

$$(1.9) \quad f(x) = \frac{2\nu\xi U' B^2}{h^2 U^b}.$$

Используя затем уравнение импульсов в известной форме

$$(1.10) \quad \frac{df}{dx} = \frac{U'}{U} F + \frac{U''}{U'} f,$$

с общепринятыми, в теории пограничного слоя, обозначениями

$$F = 2[\zeta - (2 + H)f]; \quad \zeta = \left[ \frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta^{**})} \right]_{y=0}$$

$$H = \delta^*/\delta^{**}; \quad \delta^* = \int_0^\infty \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy,$$

а также и выражение для формпараметра (1.9), приведем уравнение (1.5) к виду

$$(1.11) \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \frac{F + 2f}{2B^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{f}{B^2} \left[ 1 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ = \frac{U}{B^2 U'} \frac{d\xi}{dx} f \left( \frac{1}{B} \frac{dB}{d\xi} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right),$$

причем граничные условия (1.6) остаются пока неизменными.

Нужно отметить что постоянная  $b$  и функция  $h(x)$ , не появляющиеся уже больше в уравнении (1.11), остаются и дальше произвольными. Переменная  $\xi(x)$  также пока произвольная и от её формы зависит, при последующем приведении уравнения (1.11) к универсальному виду, выбор совокупности формпараметров.

Не трудно подметить что для  $\xi = x$ , уравнение (1.11) допускает ввести в рассмотрение бесконечную совокупность формпараметров Л. Г. Лойцянского [1]

$$(1.12) \quad f_k = U^{k-1} \frac{d^k U}{dx^k} (z^{**})^k; \quad z^{**} = \frac{\delta^{**2}}{\nu} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

первый из которых  $f_1$  совпадает с формпараметром однопараметрических методов (1.8). Формпараметры  $f_k$ , как известно, образуют систему независимых функций, удовлетворяющих рекуррентному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(1.13) \quad \frac{U}{U'} f_1 f_k' = [(k-1)f_1 + kF] f_k + f_{k+1} = \theta_k.$$

Выберем формпараметры  $f_k$  (1.12) за новые независимые переменные и произведем в уравнении (1.11), при  $\xi = x$ , имея в виду соотношение (1.13), замену дифференцирования по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial f_k} \frac{df_k}{dx} = \frac{U'}{U f_1} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \frac{\partial}{\partial f_k}.$$

Таким образом получим уравнение

$$(1.14) \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \frac{F + 2f_1}{2B^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[ 1 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ = \frac{1}{B^2} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \left( \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial f_k} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial f_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right),$$

являющееся обобщением универсального уравнения Л. Г. Лойцянского, поскольку для частного случая

$$B(x) = B_0 = \text{const}; \quad \frac{\partial B}{\partial f_k} = \frac{\partial B_0}{\partial f_k} = 0,$$

уравнение (1.14) совпадает с уравнением полученным в [1]

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \frac{F + 2f_1}{2B_0^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ = \frac{1}{B_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial f_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned}$$

При этом граничные условия (1.6) принимают вид

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty, \\ \Phi = \Phi_0 \quad \text{при} \quad f_1 = f_2 = \dots = 0. \end{aligned}$$

Для определения последнего граничного условия (1.16) принята в качестве заданного сечения пограничного слоя, также как и в [1], точка  $f_1 = f_2 = \dots = 0$ , являющаяся особой точкой уравнения (1.14). Из условия совпадения в этой точке уравнения (1.14) с известным уравнением Блазиуса для продольной обтекаемой пластинки

$$\frac{d^3 \Phi_0}{d\eta^3} + \Phi_0 \frac{d^2 \Phi_0}{d\eta^2} = 0,$$

с граничными условиями

$$\Phi_0 = \frac{d\Phi_0}{d\eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0; \quad \frac{d\Phi_0}{d\eta} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty,$$

следует соответствующее значение функции  $B(x)$ , а именно  $B_0 = 0.470$ , необходимое для нумерического интегрирования дифференциального уравнения (1.14).

Интересно заметить что преобразованное уравнение (1.11), а также и обобщенное универсальное уравнение (1.14), дают возможность разобратся в особенностях отдельных преобразованных и универсальных уравнений различных авторов, являющихся теперь уже только частными случаями этих обобщенных уравнений\*).

Таким образом из двух произвольных функций  $\xi(x)$  и  $h(x)$ , только вторая сстается пока еще неопределенной. Поскольку она не появляется явно в уравнении (1.14), может сперва казаться, что для его интегриро-

\*) Обсуждению этого вопроса будет посвящена впоследствии особая статья.

вания нет необходимости в определении функции  $h(x)$ . Однако более детальный анализ этого уравнения показал\*) что оно содержит многозначное решение и что для получения однозначного решения необходимо уже задать функцию  $h(x)$  в более определенном виде.

## § 2. Обобщение уравнения „автомодельных“ решений Фокнера-Скэн

Одна из самых интересных и целесообразных возможностей для определения функции  $h(x)$ , основывается, принимая во внимание и идею Л. Г. Лойцянского [6] о обобщенном аффинном подобии профилей скорости в сечениях пограничного слоя, на введении, в качестве поперечной координаты, переменной Гёртлера [8]

$$(2.1) \quad \eta = \frac{Uy}{\sqrt{2\nu \int_0^x U dx}}$$

совпадающей, как известно, при  $U(x) = cx^m$  с переменной „автомодельных“ решений

$$\eta = \sqrt{\frac{(m+1)cx^{m-1}}{2\nu}},$$

и являющейся, поэтому, обобщенной переменной „автомодельных“ решений. А именно, из сопоставления (2.1) и (1.3) следует определение функции  $h(x)$  в следующем виде

$$(2.2) \quad h(x) = \frac{U^{1-\frac{b}{2}} \sqrt{\nu x}}{\sqrt{\int_0^x U dx}}$$

Подставляя (2.2) в (1.4) и (1.9), получим при  $\xi = x$

$$(2.3) \quad \psi(x, y) = \sqrt{2\nu \int_0^x U dx} \Phi(x, \eta)$$

и

$$(2.4) \quad f(x) = B^2 \frac{2U'}{U^2} \int_0^x U dx = B^2 \beta(x),$$

причем  $\beta(x)$  является так-называемой „главной функцией“ Гёртлера [8].

После дифференцирования (2.4) по переменной  $x$  и сравнения с уравнением импульсов (1.10), найдем характерную функцию  $F$  в следующей форме

$$(2.5) \quad F = 2B^2 - 2f + \frac{2B'U}{BU'} f.$$

\*) Этот анализ произведен французским исследователем М. Люсюсом в еще неопубликованной работе.

Подставляя (2.5) в (1.14), получим универсальное уравнение

$$(2.6) \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[ 1 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ = \frac{1}{B^2} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial f_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right),$$

являющееся обобщением уравнения „автомодельных“ решений Фокнера-Скэн. А именно, если напишем уравнение (2.6) в однопараметрическом приближении ( $f_1 \neq 0, f_2 = f_3 = \dots = 0, \theta_1 = F f_1$ )

$$(2.7) \quad \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^3} + \Phi^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[ 1 - \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ = \frac{F(f_1)}{B^2} f_1 \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \eta \partial f_1} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial f_1} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^2} \right),$$

и проведем „локализацию“ по параметру  $f_1$ , то получим, принимая во внимание соотношение (2.4), известное уравнение Фокнера-Скэн в форме Хартри

$$(2.8) \quad \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^3} + \Phi^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^2} + \beta(x) \left[ 1 - \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 0.$$

Таким образом показанный способ универсализации дает возможность для нового подхода к рассмотрению уравнения „автомодельных“ решений (2.8), являющегося теперь локализованным универсальным уравнением в однопараметрическом приближении.

При этом граничные условия (1.16) принимают в однопараметрическом приближении следующий вид

$$(2.9) \quad \Phi^{(1)} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \\ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty, \\ \Phi^{(1)} = \Phi_0 \quad \text{при } f_1 = f_2 = \dots = 0.$$

Используя соотношение (1.13), приведем функцию  $F$  (2.5), необходимую для нумерического интегрирования дифференциального уравнения (2.7), к следующему виду

$$(2.10) \quad F(f_1) = \frac{2(B^2 - f_1)}{1 - \frac{2}{B} \frac{dB}{f_1 df_1}},$$

причем

$$(2.11) \quad A = \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \eta} \right) d\eta; \\ B = \int_0^{\infty} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \eta} \left( 1 - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \eta} \right) d\eta.$$



Расчет дифференциального уравнения (2.7) с граничными условиями (2.9), принимая во внимание соотношения (2.10) и (2.11), был проведен в Вычислительном Институте Университета города Нанси (Франция)\* на электронно-счетной машине С.И.И. 10070.

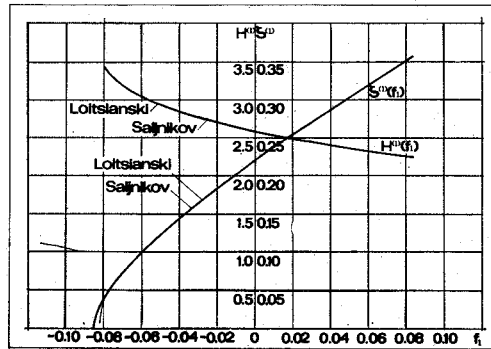
В следующей таблице помещены результаты этого расчета, причем для сравнения приведены значения опубликованные Л. Г. Лойцяным в работе [1] и обозначенные здесь буквой л.

Таблица 1

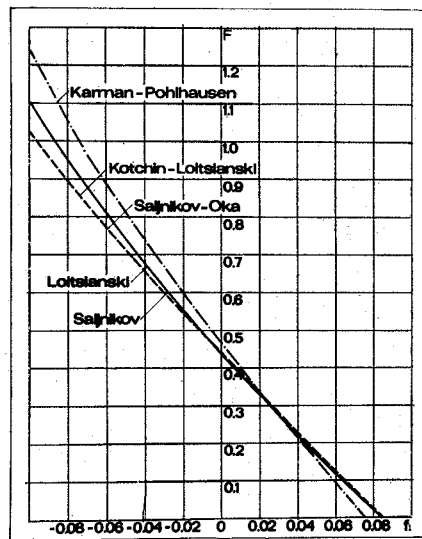
$f_1$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
$\zeta_{л}^{(1)}$	0.2204	0.2375	0.2542	0.2706	0.2868	0.3028	0.3188	0.3348	0.3510
$\zeta^{(1)}$	0.2204	0.2376	0.2543	0.2707	0.2869	0.3029	0.3189	0.3349	0.3511
$H_{л}^{(1)}$	2.5919	2.5384	2.4903	2.4449	2.4014	2.3599	2.3196	2.2802	2.2403
$H^{(1)}$	2.5919	2.5396	2.4910	2.4452	2.4017	2.3601	2.3196	2.2801	2.2401
$F_{л}^{(1)}$	0.4408	0.3847	0.3293	0.2750	0.2219	0.1701	0.1197	0.0708	0.0239
$F^{(1)}$	0.4406	0.3841	0.3289	0.2745	0.2214	0.1671	0.1196	0.0707	0.0233
$A$	1.2166	1.1660	1.1167	1.0672	1.0170	0.9622	0.9090	0.8456	0.7607
$B$	0.4694	0.4591	0.4483	0.4365	0.4235	0.4081	0.3919	0.3709	0.3396
$\left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^2}\right)_0$	0.4696	0.5174	0.5673	0.6202	0.6776	0.7444	0.8139	0.9031	1.0340
$\frac{f_1}{B^2} = \beta(x)$	0.0000	0.0474	0.0995	0.1575	0.2230	0.3032	0.3907	0.5089	0.6937
$f_1$	-0.01	-0.02	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.08	
$\zeta_{л}^{(1)}$	0.2034	0.1851	0.1662	0.1462	0.1249	0.1015	0.0746	0.0397	
$\zeta^{(1)}$	0.2028	0.1846	0.1656	0.1456	0.1242	0.1007	0.0737	0.0385	
$H_{л}^{(1)}$	2.6441	2.7063	2.7754	2.8538	2.9458	3.0575	3.2051	3.4410	
$H^{(1)}$	2.6484	2.7105	2.7798	2.8586	2.9509	3.0638	3.2134	3.4543	
$F_{л}^{(1)}$	0.4997	0.5585	0.6189	0.6807	0.7444	0.8099	0.8779	0.9500	
$F^{(1)}$	0.4985	0.5577	0.6186	0.6807	0.7447	0.8108	0.8799	0.9575	
$A$	1.2686	1.3233	1.3816	1.4450	1.5158	1.5981	1.7013	1.8554	
$B$	0.4790	0.4882	0.4970	0.5055	0.5137	0.5216	0.5294	0.5371	
$\left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^2}\right)_0$	0.4234	0.3782	0.3332	0.2881	0.2418	0.1931	0.1393	0.0717	
$\frac{f_1}{B^2} = \beta(x)$	-0.0436	-0.0839	-0.1214	-0.1565	-0.1899	-0.2205	-0.2497	-0.2773	

\* Считаю своим приятным долгом поблагодарить М. Люсюса, проводившего этот расчет, за оказанную помощь. Более детальные сведения о этом расчете будут даны впоследствии в особой статье.

Из этого сопоставления видно что распределения универсальных характерных функций  $\zeta^{(1)}(f_1)$ ,  $H^{(1)}(f_1)$ ,  $F^{(1)}(f_1)$ , полученные обоими способами (соответствующие графики приведены на Фиг. 2 и Фиг. 3) почти совпадают. На Фиг 3 показаны кроме этого для сравнения кривые  $F(f_1)$  рассчитанные по Карман-Польгаузену и по локально-однопараметрическому методу Сальников-Ока [3], причем полученные значения в последнем случае, как и нужно было ожидать, почти совпадают с результатами расчетов по методу Кочина-Лойцянского [9]. Таким образом можно положить что сходимость достигнутая в работе [1] остаётся при предлагаемом способе универсализации сохранена.



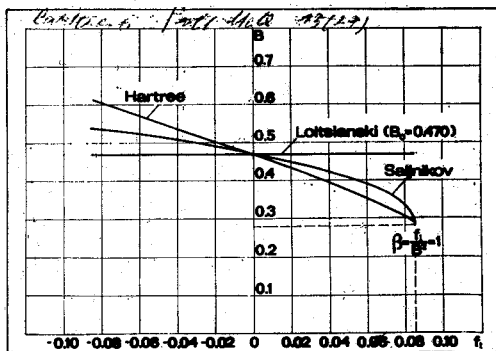
Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 4 показано отклонение кривой  $B(f_1)$ , полученной в результате расчета уравнения Хартри (2.8), стало-быть универсального уравнения в локально-однопараметрическом приближении, от результатов интегрирования универсального уравнения в однопараметрическом приближении (2.7). Из сравнения этих кривых, сходящихся, как и следовало ожидать, на

месте соответствующему лобовой критической точке ( $\beta = f_1/B^2 = 1$ ), следует вывод о влиянии „локализации“ на распределение величины  $B$ .



Фиг. 4

В заключение нужно отметить что способ расчёта характерных величин пограничного слоя, как нпр.: толщины вытеснения  $\delta^*$ , толщины потери импульса  $\delta^{**}$  и напряжения трения на стенке  $\tau_w$ , для каждого особого случая внешнего течения, определенного распределением скоростей  $U(x)$ , оказывается теперь существенно упрощенным. А именно, для этой цели используются соотношения

$$(2.12) \quad \delta^* = \frac{\sqrt{2\nu \int_0^x U dx}}{U} A; \quad \delta^{**} = \frac{\sqrt{2\nu \int_0^x U dx}}{U} B;$$

$$\tau_w = \frac{\mu U^2}{\sqrt{2\nu \int_0^x U dx}} \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^2} \right)_0,$$

полученные из формул определения этих величин, учитывая форму координаты  $\eta$  (2.1) и функции тока  $\psi$  (2.3).

Поскольку из (2.4) следует соотношение

$$(2.13) \quad \beta(x) = \frac{2U'}{U^2} \int_0^x U dx = \frac{f_1(x)}{B^2},$$

расчет величин (2.12) происходит следующим образом.

Сперва необходимо определить по формуле (2.13), для заданного распределения  $U(x)$ , функцию  $\beta(x)$  совпадающую с отношением  $f_1(x)/B^2$ . Теперь можно, для некоторого заданного  $x = x_0$ , найти  $\beta(x_0) = f_1/B^2$  и пользуясь Таблицей 1, определить соответствующие значения  $f_1, A, B, \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^2} \right)_0$ .

После этого не трудно произвести при помощи формул (2.12) расчет характерных величин пограничного слоя.

Таким образом отпадает необходимость интегрирования дополнительного дифференциального уравнения первого порядка (уравнение импульсов) существующая при расчете пограничного слоя способом показанным в работе [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лойцянский Л. Г. *Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя*, ПММ, 1965, т. 29, № 1.
- [2] Шкадов, В. Я., *Пограничный слой с градиентом давления в потоке сжимаемой жидкости*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 2.
- [3] Сальников, В. Н., Ока, С. Н. *Об одной возможной форме универсальных уравнений ламинарного пограничного слоя*, Изв. АН. СССР, Механика жидкости и газа, 1969, № 1.
- [4] Saljnikov, V., *Méthodes modernes de résolution des équations de la couche limite laminaire*, Faculté des Sciences, Laboratoire de Dynamique des fluides, Poitiers, 1969.
- [5] Лойцянский, Л. Г., *Механика жидкости и газа*, Издательство „Наука“ Москва 1970.
- [6] Лойцянский, Л. Г., *Параметры подобия в теории пограничного слоя*. Сборник, посвященный шестидесятилетию юбилею акад. Л. И. Седова, „Наука“, 1969.
- [7] Најфелд, И. *Прорачун ламинарної раванскої іраничної слоја за случај сїрујања несїмпливої флуида око елиїптичної цилиндра*. Дипломски рад одбрањен 1969 год. на Машинском факултету у Београду.
- [8] Görtler H. *A New Series for the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows*, Journ. of Math. and Mech., Vol. 6, № 1, January 1957.
- [9] Кочин, Н. Е., Лойцянский, Л. Г., Доклады АН СССР 36, № 9, 1942.