PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 12 (26), 1971, pp. 51—61

COMPLÉMENTS AUX TRAITÉS DE KAMKE ET DE MURPHY. I. UNE GÉNÉRALISATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE CLAIRAUT ET DE D'ALEMBERT TRANSFORMÉE AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES TYPES CONNUS

A. Kapcia

(Reçu le Septembre 29, 1971)

1. Nous donnons dans ce travail beaucoup d'exemples de l'équation

$$y=xy'+\varphi(x)f(y')+g(y'), \tag{1.1}$$

pour lesquelles cette équation se réduit aux équations différentielles des types bien connus. Supposons que les fonctions $f(p)$, $g(p)$ et $\varphi(x)$ de l'équation (1.1) sont les fonctions données de la classe C^1 et que la fonction $y=y(x)$ est une fonction inconnue. L'équation différentielle (1.1) est une généralisation des équations différentielles irrésolues à l'égarde de la dérivée de la fonction inconnue des formes suivantes: une généralisation de l'équation de Clairaut en forme

$$y=xy'+c\,\varphi(x)+g(y'), \tag{1.1.1}$$

où c — constante, $c\neq 0$; de l'équation de d'Alembert

$$y=xh(y')+g(y') \tag{1.1.2}$$

et de l'équation différentielle de Clairaut

$$y=xy'+g(y'). \tag{1.1.3}$$

Pour obtenir les équations (1.1.1), (1.1.2) et (1.1.3) nous remarquons, qu'il suffit de mettre dans l'équation (1.1): 1/ $f(y')\equiv c$, quand $c\neq 0$; 2/ $\varphi(x)\equiv x$ et $f(y')\equiv h(y')-y'$; 3/ $\varphi(x)\equiv c$ ou $f(y')\equiv 0$, où c — une constante réelle. Pour une meilleure lisibilité de ce travail nous introduisons les définitions suivantes:

D é f i n i t i o n I. 1 Soit l'équation différentielle en form

$$F(x,y,y')=0, \tag{1.2}$$

définie dans le domaine V des variables x, y, p, de la classe C^1, où $p=y'$. Lorsque l'égalité

$$F(x_0\cdot y_0,p_0)=0 \tag{1.3}$$

est remplie pour l'élément (x_0,y_0,p_0) du domaine V, nous appelons cet élément, élément intégral de l'équation (1.2).

D é f i n i t i o n I. 2. Quand pour l'élément intégral (x_0, y_0, p_0) de l'équation (1.2) est remplie une inégalité

$$F'_{y'}(x_0, y_0, p_0) \neq 0, \tag{1.4}$$

nous appelons cet élément, élément intégral régulier.

D é f i n i t i o n I. 3. On appelle la solution de l'équation (1.2) régulière, si chaque élément de cette solution est régulier.

D é f i n i t i o n I. 4. (Plein ensemble des solutions) L'ensemble Z des solutions d'une forme quelconque de l'équation (1.2), sera dit plein ensemble des solutions de l'équation (1.2) si chaque solution de l'équation (1.2) est identique avec certaine solution appartenante à l'ensemble Z.

Nous avons pour l'équation (1.1) le théorème suivant:

T h é o r è m e I. *Si les fonctions $f(p)$, $g(p)$ et $\varphi(x)$ de l'équation* (1.1) *satisfont aux conditions suivantes:*

1° *$f(p)$ et $g(p)$ sont de la classe C^1 pour $p \in (p_1, p_2)$,*

2° *$\varphi(x)$ est de la classe C^1 pour $x \in (x_1, x_2)$,*

3° *$\varphi'(x) \neq 0$ pour chaque $x \in (x_1, x_2)$,*

4° *$f(p) \neq 0$ pour chaque $p \in (p_1, p_2)$,*

5° *$x + \varphi(x) f'(p) + g'(p) \neq 0$ pour chaque paire $(x, p) \in (x_1, x_2; p_1, p_2)$ alors le plein ensemble des solutions de l'équation*

$$y = xy' + \varphi(x) f(y') + g(y') \tag{1.1}$$

est donné par les formules

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi_{-1}(u(p)) \\ y &= \varphi_{-1}(u(p))\, p + u(p) f(p) + g(p), \end{aligned}$$

où $u(p)$ est une solution arbitraire de l'équation

$$u' = -\frac{\varphi_{-1}(u)}{f(p)} - \frac{f'(p)}{f(p)} u - \frac{g'(p)}{f(p)}, \tag{1.5}$$

et la fonction $\varphi_{-1}(u)$ signifie une fonction inverse de la fonction $\varphi(x)$.

Toutes les solutions de l'équation (1.1) *sont régulières.*

La démonstration de ce théorème a été donnée dans le travail [8] p. 11—18

P r o p o s i t i o n I. 1. *Si les fonctions $f(p)$, $g(p)$ et $\varphi(x)$ de l'équation* (1.1) *satisfont aux conditions suivantes:*

1° *$f(p) \equiv c$, $g(p)$ de la classe C^1 pour $p \in (p_1, p_2)$,*

2° *et 3° du théorème I,* 4° *$c \neq 0$ (c — une constante réelle),*

5° *$x + g'(p) \neq 0$ pour chaque paire $(x, p) \in (x_1, x_2; p_1, p_2)$,*

alors l'équation (1.1) *se réduit à l'équation*

$$y = xy' + c\varphi(x) + g(y'). \tag{1.1.1}$$

Le pleine ensemble des solutions de l'équation (1.1.1) *est donné par les formules*

$$(\alpha_1) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi_{-1}(u(p)), \\ y &= \varphi_{-1}(u(p))\,p + cu(p) + g(p), \end{aligned}$$

où $u(p)$ *est une solution arbitraire de l'équation*

$$(1.5.1) \qquad u' = -\frac{\varphi_{-1}(u)}{c} - \frac{g'(p)}{c}.$$

Toutes les solutions de l'équation (1.1.1) *sont régulières.*

Proposition I. 2. *Si les fonctions* $f(p)$, $g(p)$ *et* $\varphi(x)$ *de l'équation* (1.1) *satisfont aux conditions suivantes:*

1° $f(p) \equiv h(p) - p$, $h(p)$ *et* $g(p)$ *de la classe* C^1 *pour* $p \in (p_1, p_2)$,

2° $\varphi(x) \equiv x$ *pour chaque* $x \in (x_1, x_2)$,

3° $h(p) - p \neq 0$ *pour chaque* $p \in (p_1, p_2)$,

4° $xh'(p) + g'(p) \neq 0$ *pour chaque paire* $(x, p) \in (x_1, x_2; p_1, p_2)$,

alors l'équation (1.1) *se réduit à l'équation de d'Alembert*

$$(1.1.2) \qquad y = xh(y') + g(y').$$

Le plein ensemble des solutions de l'équation (1.1.2) *est donné par les formules*

$$(\alpha_2) \qquad x = x(p), \quad y = x(p)\,h(p) + g(p),$$

quand $x(p)$ *est une solution arbitraire de l'équation*

$$(1.5.2) \qquad x' = \frac{h'(p)}{p - h(p)}\,x + \frac{g'(p)}{p - h(p)}.$$

Toutes les solutions de l'équation (1.1.2) *sont régulières.*

Proposition I. 2 est un bien connu théorème de l'équation différentielle de d'Alembert, voir E. Kamke [5] p. 57 ou W. Nikliborc [12] p. 161.

2. De ce théorème I et des propositions I. 1 et I. 2 résulte qu'un rôle véritable dans la désignation des solutions (α) de l'équation (1.1), qui ne se réduit pas à l'équation de Clairaut (1.1.3) a l'équation

$$(1.5) \qquad u' = -\frac{\varphi_{-1}(u)}{f(p)} - \frac{f'(p)}{f(p)}\,u - \frac{g'(p)}{f(p)}.$$

Conformément est alors mettre le problème suivant:

Problème II.1. On demande: pour quelles fonctions $\varphi_{-1}(u)$ l'équation (1.5) admet des formes des équations différentielles bien connues et quelles sont alors les formes de la fonction $\varphi(x)$, inverse de la fonction $\varphi_{-1}(u)$, dans l'équation (1.1).

Ce problème endente avec un problème de Professeur D. S. Mitrinović cité au-dessous.

Problème II.2. — D. S. Mitrinović [9] p. 117. Trouver les noveaux cas effectivement intégrables de l'équation

$$(2.1) \qquad y = a(x)\,y' + b(x)\,f(y').$$

D. S. Mitrinović avait donné dans son article [9] deux systèmes de fonctions $a(x)$, $b(x)$ de la forme

$$a(x)=mx+n, \quad b(x)=cx+d; \tag{2.2}$$

$$a(x)=x, \quad b(x)=cx^{\alpha}, \tag{2.3}$$

pour lesquelles l'équation (2.1) se réduit — au premier cas à l'équation différentielle linéaire — au deuxième cas à l'équation différentielle de Bernoulli (voir aussi [10] p. 24—25). Également les autres cas effectivement intégrables de l'équation (2.1) ont été donnés au travail [10]. Parce que les équations (1.1) et (2.1) ont une commune sous-classe d'équations en forme

$$y=xy'+\varphi(x)f(y'), \tag{2.4}$$

alors toutes équations (1.1), quand $g(y')\equiv 0$, effectivement intégrables, sont les solutions du problème II.2. Quelques résultats pour l'équation plus générale de l'équation (2.4) en forme

$$y=\frac{a(x)}{a'(x)}y'+\varphi(a(x))f\left(\frac{y'}{a'(x)}\right), \tag{2.5}$$

où $a'(x)\neq 0$ étaient donnés dans la note [2]. Deux d'entre eux, quand $a(x)\equiv x$, se réduisent à ceux de D. S. Mitrinović de son travail [9]. Le but principal de cette publication est une liste des résultats obtenus pour l'équation (1.1) et constituants les résolutions du problème II.1. Ces résultats étaient donnés dans les travaux [3], [6], [7], [8], [9] et [2] — quand $a(x)\equiv x$. Nous donnons ces résultats dans le Tableau I. Aux colonnes de ce tableau sont données successivement les formes des fonctions φ, f, g, la colonne quatrième donne la forme de l'équation (1.5) et détermine son type, la colonne cinquième donne le lieu de la publication et des remarques. Les trois fonctions successives de la même ligne du Tableau I donnent le système de fonctions pour l'équation (1.1) à qui correspond, à la même ligne, l'équation du type (1.5). Aux fonctions données dans la première, la deuxième et dans la troisième colonne du Tableau I, nous supposons qu'elles sont de la classe C^1 (si cela ne résulte pas de la forme de la fonction) et en quelques cas qu'elles ne sont pas identiquement égales à zéro dans aucun intervalle de leurs domaines de définition. Pour la simplification de la notation nous introduisons la définition suivante:

Déf. II.1. L'inscription $f(x)\not\equiv 0$, déterminera que la fonction $f(x)$ n'est pas identiquement égale à zéro dans nul intervalle de son domaine de définition.

L'admission des fonctions avec les lieux de zéro est aussi possible (voir par exemple [7]). Du Tableau I résulte, que quelques assez générales formes de l'équation (1.1) se donnent toujours effectivement intégrer. On peut ici citer, hors des équations de Clairaut, de d'Alembert et de l'équation donnée par D. S. Mitrinović au travail [9], aussi les équations suivantes:

$$y=xy'+x^{\alpha}f(y')+c, \tag{2.6}$$

où α, c — constantes, $\alpha(\alpha-1)\neq 0$, (voir position 5 du Tableau I),

$$y=xy'+c\,\alpha\ln(ax+b)^{\beta}+g(y'), \tag{2.7}$$

où a, b, α, β — constantes (voir position 19 du Tableau I).

Le Tableau I est un complément au traité de E. Kamke [4] dans lequel se trouvent seulement les résultats donnés aux positions 1.—4. Cette publication est aussi un complément au traité de G. M. Murphy [11].

LES FORMES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y = xy' + \varphi(x) f(y') + g(y')$ POUR LESQUELLES L'ÉQUATION (1.5) EST DU TYPE CONNU

Tableau I.

N.o.	$\varphi(x)$	$f(y')$	$g(y')$	Les formes de l'équation (1.5) et remarques	Lieu de la publication des résultats et remarques
1.	a) c—const. b) une fonction arbitraire	de la classe C^1 $f(y') \equiv 0$	de la classe C^1 $g(y') \not\equiv \text{const.}$ de la classe C^1 $g(y') \not\equiv \text{const.}$	l'équation (1.5) n'existe pas (v. théorème II. 4 du travail [8]) l'équation (1.5) n'existe pas (v. au-dessus)	Pour les fonctions données en points a) et b) l'équation (1.1) est l'équation de Clairaut — A. C. Clairaut en 1734. Il me manque de précises informations (v. p.e. [5] p. 51)
2.	$ax+b$ a, b—const., $a \neq 0$	de la classe C^1 $f(y') \neq 0$	de la classe C^1	$u' = -\dfrac{1+af'(p)}{af(p)}u - \dfrac{ag'(p)-b}{af(p)}$ — l'équation linéaire	— l'équation (1.1) est l'équation de d'Alembert. J. R. d'Alembert en 1748. Il me manque de précises informations (v. p.e. [5] p. 56). L'équation de d'Alembert on s'appelle aussi l'équation de Lagrange
3.	x	$h(y')-y'$, $h(y')$—de la classe C^1 $h(y')-y' \neq 0$	de la classe C^1	$u' = \dfrac{h'(p)}{p-h(p)}u + \dfrac{g'(p)}{p-h(p)}$ — l'équation linéaire	— l'équation (1.1) est l'équation de d'Alembert (v. ci--dessus)
4.	cx^{α} c, α—const., $c \neq 0$, $\alpha(\alpha-1) \neq 0$; pour $\alpha = 0$ l'équation (1.1) est une équation de Clairaut — (v. 1a); pour $\alpha = 1$ c'est l'équation particulière de d'Alembert — (v. 2)	de la classe C^1 $f(y') \neq 0$	$g(y') \equiv 0$	$u' = -\dfrac{u^{1/\alpha}}{cf(p)} - \dfrac{f'(p)}{f(p)}u$ — l'équation de Bernoulli	D. S. Mitrinović en 1933 — le travail [9] p. 113 (v. aussi [10] p. 24 ou [4] type I. 571)

Tableau I. positions 5—9

N.o.	$\varphi(x)$	$f(y')$	$g(y')$	Les formes de l'équation (1.5) et remarques	Lieu de la publication des résultats et remarques
5.	x^α α—const., $\alpha(\alpha-1)\neq 0$; pour $\alpha=0$ l'équation (1.1) est une équation de Clairaut — (v. 1a); pour $\alpha=1$ c'est une équation de d'Alembert — (v. 2)	de la classe C^1 $f(y')\not\equiv 0$	$g(y')\equiv$const.	$u'=-\frac{u^{1/\alpha}}{f(p)}-\frac{f'(p)}{f(p)}u$ — l'équation de Bernoulli	le travail [7] p. 98 — le système de fonctions 5 est un cas particulier du système 6
6.	x^α α—const., $\alpha(\alpha-1)\neq 0$; pour $\alpha=0$ — (voir 1a); pour $\alpha=1$ — (voir 2)	de la classe C^1 $f(y')\not\equiv 0$	de la classe C^1	$u'=-\frac{u^{1/\alpha}}{f(p)}-\frac{f'(p)}{f(p)}u-\frac{g'(p)}{f(p)}$ — une généralisation de l'équation de Bernoulli de la forme $u'=a(p)u^k+b(p)u+c(p)$ (v. [4] type 1.55)	le travail [3] p. 4
7.	$a+b\sqrt{cx+d}$ a, b, c, d — const., $b\neq 0$, $c\neq 0$; pour $b=0$ ou $c=0$ — (voir 1a)	de la classe C^1 $f(y')\not\equiv 0$	de la classe C^1	$u'=-\frac{(u-a)^2}{b^2cf(p)}-\frac{f'(p)}{f(p)}u-\frac{cg'(p)-d}{cf(p)}$ — l'équation de Riccati après la substitution $u(p)-a=v(p)$	le travail [3] p. 4
8.	$a+b\sqrt{cx}$ a, b, c — const., $b\neq 0$, $c\neq 0$	de la classe C^1 $f(y')\not\equiv 0$	$-af(y')+k$ k — const.	$u'=-\frac{(u-a)^2}{b^2cf(p)}-\frac{f'(p)}{f(p)}(u-a)$ — l'équation de Bernoulli après la substitution $u(p)-a=v(p)$	le travail [7] p. 98 — le système de fonctions 8 est un cas particulier du système 7
9.	$a\sqrt{x}$ a — const., $a\neq 0$;	y'	$\frac{b}{y'}$, b — const., $b<0$	$u'=-\frac{u^2}{a^2p}-\frac{u}{p}+\frac{b}{p^3}$ — l'équation de Riccati effectivement intégrable, voir [6] p. 93—94	le travail [6] p. 93 — le système de fonctions 9 est un cas particulier du système 7

Tableau I. positions 10—14

N.o.	$\varphi(x)$	$f(y')$	$g(y')$	Les formes de l'équation (1.5) et remarques	Lieu de la publication des résultats et remarques
10.	$a+b\sqrt[\alpha]{(cx+d)^{\beta}}$ $a, b, c, d, \alpha, \beta$ — const., $b\neq 0$, $c\neq 0$, $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\alpha\neq\beta$	de la classe C^1 $f(y')\neq 0$	de la classe C^1	$u'=-\frac{(u-a)^{\alpha/\beta}}{b^{\alpha/\beta}cf(p)}-\frac{f'(p)}{f(p)}u-\frac{cg'(p)-d}{cf(p)}$ — une généralisation de l'équation de Bernoulli après la substitution $u(p)-a=v(p)$	le travail [6] p. 85
11.	$\sqrt[3]{ax+b}$ a, b — const., $a\neq 0$; pour $a=0$ (voir 1a)	de la classe C^1 $f(y')\neq 0$	de la classe C^1	$u'=-\frac{u^3}{af(p)}-\frac{f'(p)}{f(p)}u-\frac{ag'(p)-b}{af(p)}$ — l'équation d'Abel de première espèce	le travail [3] p. 5 — le système de fonctions 11 est un cas particulier du système 10
12.	$\sqrt[3]{ax+b+\sqrt{(ax+b)^2+c}}+$ $\sqrt[3]{ax+b-\sqrt{(ax+b)^2+c}}+k$ a, b, c, k — const., $a\neq 0$	de la classe C^1 $f(y')\neq 0$	de la classe C^1	$u'=-\frac{(u-k)^3+3\sqrt[3]{c}\,(u-k)}{2af(p)}-\frac{f'(p)}{f(p)}u-\frac{ag'(p)-b}{af(p)}$ — l'équation d'Abel de première espèce après la substitution $u(p)-a=v(p)$	le travail [3] p. 4
13.	$ax+b\pm\sqrt{a^2x^2+cx+d}$ a, b, c, d — const., $a\neq 0$; pour $a=0$ — (voir 7)	de la classe C^1 $f(y')\neq 0$	de la classe C^1	$u'=-\frac{u^2-2bu+b^2-d}{(c-2ab+2au)f(p)}-\frac{f'(p)}{f(p)}u-\frac{g'(p)}{f(p)}$ — après les transformations l'équation d'Abel de seconde espèce	le travail [3] p. 4
14.	$\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{a}\,x$ a, b, c — const., $a>0$	de la classe C^1 $f(y')\neq 0$	de la classe C^1	$u'=-\frac{u^2-c}{(b\pm 2\sqrt{a}\,u)f(p)}-\frac{f'(p)}{f(p)}u-\frac{g'(p)}{f(p)}$ — après les transformations l'équation d'Abel de seconde espèce	le travail [8] p. 31 — le système de fonctions 14 est un cas particulier du système 13

Tableau I. positions 15—18

N.o.	$\varphi(x)$	$f(y')$	$g(g')$	Les formes de l'équation (1.5) et remarques	Lieu de la publication des résultats et remarques
15.	$\alpha \arcsin(ax+b)$ a, b, α — const., $a\neq 0$, $\alpha\neq 0$; pour $a=0$ ou $\alpha=0$ — (voir 1a)	const.$\neq 0$	de la classe C^1	$u' = -\frac{1}{ac}\sin\frac{u}{\alpha} - \frac{ag'(p)-b}{ac}$ — l'équation se réduit par la substitution $\operatorname{tg}\frac{u(p)}{2\alpha} = v(p)$ à l'équation de Riccati	le travail [6] p. 86 Si l'on ajoute à la fonction $\varphi(x)$ la constante k, en positions 15—24, alors les équations correspondantes à l'équation (1.5) prennent des formes données dans la colonne 4 après la sub. $u(p)-k=v(p)$
16.	$\alpha \arccos(ax+b)$ a, b, α — const., $a\neq 0$, $\alpha\neq 0$; pour $a=0$ ou $\alpha=0$ — (voir 1a)	const.$\neq 0$	de la classe C^1	$u' = -\frac{1}{ac}\cos\frac{u}{\alpha} - \frac{ag'(p)-b}{ac}$ — l'équation se réduit par la substitution $\operatorname{tg}\frac{u(p)}{2\alpha} = v(p)$ à l'équation de Riccati	le travail [6] p. 86
17.	$\alpha \operatorname{arctg}(ax+b)$ a, b, α — const., $a\neq 0$, $a\neq 0$; pour $a=0$ ou $\alpha=0$ — (voir 1a)	const.$\neq 0$	de la classe C^1	$u' = -\frac{1}{ac}\operatorname{tg}\frac{u}{\alpha} - \frac{ag'(p)-b}{ac}$ — l'équation se réduit par la substitution $\operatorname{tg}\frac{u(p)}{\alpha} = v(p)$ à l'équation d'Abel de première espèce	le travail [6] p. 86
18.	$\alpha \operatorname{arccotg}(ax+b)$ a, b, α — const., $a\neq 0$, $\alpha\neq 0$; pour $a=0$ ou $\alpha=0$ — (voir 1a)	const.$\neq 0$	de la classe C^1	$u' = -\frac{1}{ac}\operatorname{ctg}\frac{u}{\alpha} - \frac{ag'(p)-b}{ac}$ — l'équation se réduit par la substitution $\operatorname{tg}\frac{u(p)}{\alpha} = v(p)$ à l'équation d'Abel de première espèce	le travail [6] p. 86

Tableau I. positions 19—21

N.o.	$\varphi(x)$	$f(y')$	$g(y')$	Les formes de l'équation (1.5) et remarques	Lieu de la publication des résultats et remarques
19.	$\alpha \ln (ax+b)^{\beta}$ a, b, α, β — const., $a \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$; pour $a=0$ ou $\alpha=0$ ou $\beta=0$ — (voir 1a)	const. $\neq 0$	de la classe C^1	$u' = -\frac{e^{u/\alpha\beta}}{ac} - \frac{ag'(p)-b}{ac}$ — cette équation se réduit par la substitution $e^{u(p)/\alpha\beta} = v(p)$ à l'équation de Bernoulli	le travail [6] p. 86 L'équation à la colonne 4 est un cas particulier de l'équation $u' = f(p) + g(p)e^{-au}$ qui a été résolu par W. Frangner dans le travail [1]
20.	$\alpha \operatorname{arsinh} (ax+b)$ a, b, α — const., $a \neq 0$, $\alpha \neq 0$; pour $a=0$ ou $\alpha=0$ — (voir 1a)	const. $\neq 0$	de la classe C^1	$u' = -\frac{1}{ac} \sinh \frac{u}{\alpha} - \frac{ag'(p)-b}{ac}$ — cette équation se réduit par la substitution $e^{u(p)/\alpha} = v(p)$ à l'équation de Riccati	le travail [6] p. 86
21.	$\alpha \operatorname{arsinh} (ax+b)$ a, b, α — const., $a \neq 0$, $\alpha \neq 0$	const. $= 1$	$\frac{y'^2}{8\alpha a^2} + \frac{b}{a} y' + c$ c — const.	$u' = -\frac{1}{a} \sinh \frac{u}{\alpha} - \frac{p}{4\alpha a^2}$ — cette équation se réduit par la substitution $e^{u(p)/\alpha} = v(p)$ à l'équation de Riccati effectivement intégrable	le travail [7] p. 100 La solution partuculière de l'équation de Riccati de la colonne 4 c'est la fonction $v = \frac{2\alpha a}{p}$ — le système de fonctions 21 est un cas particulier du système 20

Tableau I. positions 22—24

N.o.	$\varphi(x)$	$f(y')$	$g(y')$	Les formes de l'équation (1.5) et remarques	Lieu de la publication des résultats et remarques
22.	$\alpha \operatorname{arcosh}(ax+b)$ a, b, α — const., $a\neq 0$, $\alpha\neq 0$; pour $a=0$ ou $\alpha=0$ — (voir 1a)	const.$\neq 0$	de la classe C^1	$u' = -\frac{1}{ac}\cosh\frac{u}{\alpha} - \frac{ag'(p)-b}{ac}$ — cette équation se réduit par la substitution $e^{u(p)/\alpha} = v(p)$ à l'équation de Riccati	le travail [6] p. 86
23.	$\alpha \operatorname{artgh}(ax+b)$ a, b, α — const., $a\neq 0$, $\alpha\neq 0$; pour $a=0$ ou $\alpha=0$ — (voir 1a)	const.$\neq 0$	de la classe C^1	$u' = -\frac{1}{ac}\operatorname{tgh}\frac{u}{\alpha} - \frac{ag'(p)-b}{ac}$ — l'équation se réduit par la substitution $\operatorname{tgh}\frac{u(p)}{\alpha} = v(p)$ à l'équation d'Abel de première espèce	le travail [6] p. 86
24.	$\alpha \operatorname{arctgh}(ax+b)$ a, b, α — const., $a\neq 0$, $\alpha\neq 0$; pour $a=0$ ou $\alpha=0$ — (voir 1a)	const.$\neq 0$	de la classe C^1	$u' = -\frac{1}{ac}\operatorname{ctgh}\frac{u}{\alpha} - \frac{ag'(p)-b}{ac}$ — l'équation se réduit par la stubstitution $\operatorname{ctgh}\frac{u(p)}{\alpha} = v(p)$ à l'équation d'Abel de première espèce	le travail [6] p. 86

Dans toutes les positions du Tableau I const. $\equiv$ constante réelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Frangner, W., *Über einen neuen Typ Differentialgleichung und eine neue Methode zur Integration der linearen, quadratischen und kubischen Differentialgleichung*, J. reine und angew. Math. 194, № 1—4, (1955), p. 180—182.

[2] Ginalski, C., Kapcia, A., *Sur quelques équations intégrables par différentiation*, Colloq. Math. 7, (1959), p. 113.

[3] Ginalski, C., Kapcia, A, *O pewnej klasie równań rozwiązanych względem funkcji*, Zesz. nauk. Polit. Częst. 7, Nauki podst. 1, (1960), p. 3—6

[4] Kamke, E., *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I, Gewönliche Differentialgleichungen*, Leipzig 1959.

[5] Kamke, E., *Differentialgleichungen I*, Leipzig 1962.

[6] Kapcia, A., *O pewnym uogólnieniu wyników D. S. Mitrinovicia*, Zesz. nauk. Polit. Częst. 21, Nauki podst. 4, (1962), p. 79—104.

[7] Kapcia, A., *Badanie regularności i osobliwości całek pewnego uogólnienia równań Clairauta i d'Alemberta*, Zesz. nauk. Polit. Częst. 31, Nauki podst. 7, (1964), p. 73—104.

[8] Kapcia, A., *O pewnym równaniu różniczkowym uwikłanym*, Praca doktorska, Kraków 1966, — écrit à la machine.

[9] Mitrinović, D. S., *Nouveaux cas d'intégrabilité d'une équation différentielle du premier ordre*, Acad. Royal Serb Bull. Acad. Sc. math. nat. (A) 1, (1933), p. 107—117.

[10] Mitrinović, D. S., *Istraživanja o jednoj važnoj diferencijalnoj jednačini prvoga reda*, Beograd 1935.

[11] Murphy, G. M., *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, Princeton, New Jersey 1960.

[12] Nikliborc, W., *Równania różniczkowe*, Częśc I, Warszawa-Wrocław 1951.

Institut Mathématique
L'École Polytechnique
Częstochowa, Pologne