PUBLICATIONS DE L'ISTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 12 (26), 1971. pp. 161—177

OPÉRATEURS PARABOLIQUES DANS LE CALCUL OPÉRATIONNEL DES DISTRIBUTIONS A SUPPORT DANS R_+^n $n \geq 1$.

Serge Vasilach

(Received March 16, 1971)

Summary

In the present paper we give definitions and properties of parabolic operators obtained by means of algebraic operational Calculus of Distributions (as described in [2] and [3]). We use this operational Calculus to determine the fundamental solutions (in the space $(D'_{R_+^2})$ of distributions with support in $R_+^2 = [0, \infty[^2)$, of some parabolic partial differential equations. We also describe the properties of these fundamental solutions, which will be utilised in a subsequent article to solve boundary-value problems for parabolic differential equations and parabolic integro-differential equations by algebraic methods.

§ 1. Introduction

1. *Position du problème.*

Le présent travail est consacré à l'étude des opérateurs du type parabolique dans le Calcul Opérationnel algébrique des Distributions à support dans R_+^2, tel que défini dans nos travaux antérieurs [2] et [3]. Les résultats obtenus dans ce travail (solutions élémentaires de divers opérateurs paraboliques) seront appliqués ultérieurement à la résolution de diverses équations aux dérivées partielles et integro-différentielles du type parabolique.

2. *Les Algèbres* $(D'_{R_+^2})$ et $(\mathfrak{R}_{D'_{R_+^2}})$.

Rappelons les notations suivantes (cf. [2], Chap. III, § 1):

$(D'_{R_+^2})$ = algèbre topologique de convolution des Distributions à support dans $R_+^2 = [0, \infty[^2$.

$(\mathfrak{R}_{R_2^2})$ = corps des fractions de convolution (cf. [2], Chap. I § 1, № 2 et Chap. II, B), de l'algèbre de convolution, sans diviseurs de zéro, $(D'_{R_+^2})$.

$(\mathfrak{R}_{D'_{R_+^2}})$ = la partie de $(\mathfrak{R}_{R_+^2})$ isomorphe à $(D'_{R_+^2})$.

$(\mathfrak{R}_{D'_{R_+^2}})$ est une algèbre topologique sur le corps C des nombres complexes (cf. [2], Chap. II, 2 ième partie B, Nos 2 et 7) séparée et complète.

X (resp. Y) = espace isomorphe à $(R_+)_x$ resp. $(R_+)_y$); (D'_{X+}) (resp. (D'_{Y+})) = l'algèbre topologique de convolution des Distributions à support dans

X_+ (resp. Y_+); $(\mathfrak{K}_{X_+})$ (resp. $(\mathfrak{K}_{Y_+})$) = le corps des fractions de convolution de (D'_{X_+}) (resp. (D'_{Y_+}); $(\mathfrak{K}_{D'_{X_+}})$ (resp. $(\mathfrak{K}_{D'_{Y_+}})$) = la partie de $(\mathfrak{K}_{X_+})$ (resp. $(\mathfrak{K}_{Y_+})$) isomorphe à (D'_{X_+}). (resp. (D'_{Y_+})).

$(\mathfrak{K}_{D'_{X_+}})$ (resp. $(\mathfrak{K}_{D'_{Y_+}})$) est une algèbre topologique sur le corps des complexes C, séparée et complète.

$D_{X_+}\otimes D'_{Y_+}$ = produit tensoriel des algèbres (D'_{X_+}) et (D'_{Y_+}). Nous étudierons des classes d'équations de convolution dans $(D'_{R^2_+})$ (équations aux dérivées partielles et équations intégro-différentielles) qui transportées dans l'algèbre $(\mathfrak{K}_{D'_{R^2_+}})$ nous conduisent à la construction d'opérateurs paraboliques du type exponentiel, qui constituent la base dans la résolution de certains types d'équations intégro-différentielles par des méthodes purement algébriques.

§ 2. Opérateurs paraboliques exponentiels.

1. *Les Opérateurs* $\exp\left(-\frac{\mu}{\lambda}xB(q)\right)$.

Soient $\{A(y)\}$, $\{B(y)\}$ deux distributions de (D'_{Y_+}), ($\{A(y)\}$ inversible dans (D'_{Y_+})); $A(q)$, $B(q)$ les opérateurs de $(\mathfrak{K}_{D'_{Y_+}})$ qui correspondent à $\{A(y)\}$ et $\{B(y)\}$ respectivement.

Considérons dans $(D'_{R^2_+})$ l'équation de convolution

$$(1)\qquad [\lambda\delta'(x)\otimes\{A(y)\}+\mu\delta(x)\otimes\{A(y)\}\overset{y}{*}\{B(y)\}]\overset{xy}{*}\{E\}=\delta(x)\otimes\delta(y)$$

où l'on désigne par $\overset{y}{*}$ (resp. $\overset{xy}{*}$ le produit de convolution dans (D'_{Y_+})) (resp. $(D'_{R^2_+})$).

L'équation (1) transportée dans $(\mathfrak{K}_{D'_{R^2_+}})$ se transforme en l'équation algébrique:

$$(2)\qquad [\lambda p\otimes A(q)+\mu\cdot 1_x\otimes A(q)\,B(q)]\cdot E(p,q)=1_x\otimes 1_y.$$

(Pour toutes ces notations cf. [3], chap. III, § 1).

§ 2, № 1

De (2) on tire:

$$(3)\qquad E(p,q)=\frac{1_x\otimes 1_y}{\lambda p\otimes A(q)+\mu\cdot 1_x\otimes A(q)\,B(q)}.$$

Mais $[\{A(y)\}$ inversible dans $(D'_{Y_+})] \Rightarrow [A(q)$ inversible dans $(\mathfrak{K}_{D'_{Y_+}})] \Rightarrow [\lambda p\otimes A(q)$ inversible dans $(\mathfrak{K}_{D'_{R^2_+}})$, pour $\lambda\neq 0] \Rightarrow \{[\lambda p\otimes A(q)+\mu\cdot 1_x\otimes A(q)\,B(q)]\}$ inversible dans l'algèbre $[[(\mathfrak{K}_{D'_{R^2_+}})^N]]$, des séries formelles dont les termes sont des éléments de $(\mathfrak{K}_{D'_{R^2_+}})$ *).

*) Pour plus de détails sur les algèbres de séries formelles, prière de consulter nos travaux antérieurs [4] et [5].

On trouve alors pour solutions formelles de l'équation (2):

(4) $$[[E(p,q)]] = \{\sum_{n\in N} (-1)^n \lambda^{-(n+1)} \mu^n p^{-(n+1)} \otimes B(q)^n\} A(q)^{-1}.$$

Mais

(5) $$\mathfrak{K}_{D'_{X_+}} \ni p^{-(n+1)} = \left\{\frac{x^n}{n!}\right\} = \{\overset{*}{Y}(x)\}^{(n+1)} = \begin{cases} \dfrac{x^n}{n!} \text{ pour } x \geq 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

où $\{\overset{*}{Y}(x)\}^{(n+1)}$ est la $(n+1)$-ième puissance de convolution de la fonction de Heaviside $Y(x)$, considérée comme distribution de (D'_{X_+}).

Donc de (4) on tire:

(6) $$[[E(x,q)]] = \sum_{n\in N} (-1)^n \lambda^{-(n+1)} \mu^n \left\{\frac{x^n}{n!}\right\} B(q)^n \frac{1}{A(q)}$$

d'où, comme série formelle dans l'algèbre $[[(D'_{R^2_+})^N]]$ des séries formelles à éléments dans $(D'_{R^2_+})$:

(7) $$[[E(x,y)]] = \{\overset{*}{A}(y)\}^{-1} \overset{y}{*} \left[\frac{1}{\lambda} \sum_{n\in N}\right] (-1)^n \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \{\overset{*}{Y}\{x\}\}^{(n+1)} \otimes \{\overset{*}{B}(y)\}^n.$$

En posant

(8) $$[[E_0(x,y)]] = \frac{1}{\lambda} \sum_{n\in N} (-1)^n \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \{\overset{*}{Y}(x)\}^{(n+1)} \otimes \{\overset{*}{B}(y)\}^n$$

on a:

(9) $$[[E(x,y)]] = \{\overset{*}{A}(y)\}^{-1} \overset{Y}{*} [[E_0(x,y)]].$$

Mais

$$\left[\{\overset{*}{Y}(x)\}^{(n+1)} = Y(x)\frac{x^n}{n!}\right] \Rightarrow \{[[E_0(x,y)]] =$$

$$= \frac{1}{\lambda} Y(x) \sum_{n\in N} (-1)^n \left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^n \frac{1}{n!} \otimes \{\overset{*}{B}(y)\}^n = Y(x) \frac{1}{\lambda} \{E_0(x\ y)\}$$

où

(10) $$\{E_0(x,y)\} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n\in N} (-1)^n \left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^n \frac{1}{n!} \otimes \{\overset{*}{B}(y)\}^n =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{-\mu x}{\lambda} \otimes \{\overset{*}{B}(y)\}\right)$$

est une *fonction exponentielle généralisée* en $x \in \boldsymbol{R}$, à valeurs dans $[[(D'_y)^N]]$.

Si $\{B(y)\}$ est telle que la série $\frac{1}{\lambda} \sum_{n\in N} (-1)^n \left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^n \otimes \{\overset{*}{B}(y)\}^n$ converge dans (D'_Y), alors $\{E_0(x,y)\}$ est une fonction indéfiniment dérivables à valeurs dans D'_Y i.e. un élément de $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} (D'_{Y+}) = \mathcal{E}_x(D'_{Y+})$, où l'on désigne par $\mathcal{E}_x$ l'espace de Fréchet des fonctions indéfiniment dérivables à support quelconque sur $X = R$, muni de la topologie de la convergence compacte, et par $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} (D'_{Y+})$

le complété de $\mathfrak{S}_x \otimes_\pi (D'_{Y+}) =$ produit tensoriel topologique des espaces localement convexes $\mathfrak{S}_x$ et (D'_{Y+}), muni de la topologie projective de Grothendieck.*). Dans ces conditions, il en sera de même de $[[E(x, y)]]$, donné par (9), et l'on pourra écrire la solution de l'équation (2) sous la forme:

$$\{E(x, y)\} = \left\{ Y(x) \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{-\mu x}{\lambda} \otimes \{\overset{*}{B}(y)\} \right) \right\} \overset{y}{*} \{A(y)\}^{-1}. \tag{11}$$

Il est facile de voir que $\{E_0(x, y)\}$ vérifie l'équation différentielle

$$\lambda \frac{\partial \{E_0(x, y)\}}{\partial x} + \mu \{\overset{*}{B}(y)\} \overset{y}{*} \{E_0(x, y)\} = 0, \tag{12}$$

où les dérivées sont prises au sens habituel par rapport à x et au sens des distributions par rapport à y.

Par contre, $[[E_0(x, y)]]$ est une solution élémentaire de l'équation (1) où l'on fait $\{A(y)\} = \delta(y)$.

En effet, on a, au sens des distributions dans $(D'_{R^2_+})$:

$$\frac{\partial [[E_0(x, y)]]}{\partial x} = \delta(x) \otimes \frac{1}{\lambda} \lim_{x \to 0} \{E_0(x, y)\} + Y(x) \frac{\partial \{E_0(x, y)\}}{\partial x} =$$
$$= \delta(x) \otimes \delta(y) + Y(x) \left(\frac{-\mu}{\lambda} \right) \{\overset{*}{B}(y)\} \overset{y}{*} \{E_0 x, y)\}$$

d'où la relation:

$$\lambda \frac{\partial [[E_0]]}{\partial x} + \mu \{\overset{*}{B}(y)\} \overset{y}{*} [[E_0(x, y)]] = \delta(x) \otimes \delta(y), \tag{13}$$

qui est équivalente à l'équation de convolution (1), où l'on fait

$$\{A(y)\} = \delta(y).$$

On peut donc écrire:

$$[[E_0(x, y)]] = \frac{\delta(x) \otimes \delta(y)}{\lambda\delta'(x) \otimes \delta(y) + \mu\delta(x) \otimes \{B(y)\}} =$$
$$= Y(x) \exp\left(\frac{-\mu x}{\lambda} \{\overset{*}{B}(y)\} \right)$$

et

$$\{E(x, y)\} = \frac{\delta(x) \otimes \delta(y)}{\lambda\delta'(x) \otimes A(y) + \mu\delta(x) \otimes \{A(y)\} \overset{y}{*} \{B(y)\}} =$$
$$= \{\overset{*}{A}(y)\}^{-1} \overset{y}{*} \left(\frac{1}{\lambda} Y(x) \exp\left(\frac{-\mu x}{\lambda} \{B(y)\} \right) \right). \tag{13'}$$

$\{E(x, y)\}$ est la solution élémentaire de l'équation (1).

2. *L'Opérateur parabolique* $\frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{-\mu x}{\lambda} \otimes \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \right\} \right)$.

Pour

$$\{A(y)\} = \delta(y); \quad \{B(y)\} = \delta'(y) \overset{y}{*} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \right\},$$

---

*) Sur les produits tensoriels topologiques d'espaces localement convexes cf. [6], Chap. 1 où [7] Exposés № 1 et № 19.

l'équation de convolution (1) prend la forme

$$(14)\qquad \left\{\lambda\delta'(x)\otimes\delta(y)+\mu\delta(x)\otimes\delta'(y)\overset{y}{*}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\right\}\overset{xy}{*}\{F(x,y)\}=\delta(x)\otimes\delta(y)$$

dont la solution dans $[[(D'_{R^2_+})^N]]$, d'après la formule (11), est donnée par

$$(15)\qquad [[F^{(\lambda,\mu)}_{(x,y)}]]=Y(x)\frac{1}{\lambda}\exp\left(\frac{-\mu x}{\lambda}\otimes\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\right)=Y(x)\,[[F^{(\lambda,\mu)}_0(x,y)]],$$

où

$$(16)\qquad [[F^{(\lambda,\mu)}_0(x,y)]]=\frac{1}{\lambda}\exp\left(\frac{-\mu x}{\lambda}\otimes\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{n\in N}(-1)^n\left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^n\otimes\overbrace{\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\right\}^n}^{*},$$

représente l'expression de $[[F(x,y)]]$, considérée comme fonction en x à valeurs dans $[[(D'_{R^2_+})^N]]$. Mais (cf. [2], Chap. I, § 6, formule (13), p. 217), la relation opérationnelle

$$(D'_{Y_+})\ni\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{q}}\in\mathfrak{R}_{D'_{Y_+}},$$

nous donne

$$(D'_{Y_+})\ni\delta^{(n)}(y)\overset{y}{*}\left\{\frac{\overset{*}{1}}{\sqrt{\pi y}}\right\}^n=q^n\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n\in(\mathfrak{R}_{D'_{Y_+}}),$$

d'où

$$(17)\qquad (D'_{Y_+})\ni\delta^{(2k)}(y)\overset{y}{*}\left\{\frac{\overset{*}{1}}{\sqrt{\pi y}}\right\}^{2k}=q^k\in(\mathfrak{R}_{D'_{Y_+}})\ \Rightarrow\ \delta^{(2k)}(y)\overset{y}{*}\left\{\frac{\overset{*}{1}}{\sqrt{\pi y}}\right\}^{2k}=\delta^{(k)}(y)$$

et

$$(18)\qquad \delta^{(2k+1)}(y)\overset{y}{*}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}^{2k+1}=q^{k+1}\frac{1}{\sqrt{q}}\in(\mathfrak{R}_{D'_{Y_+}})\ \Rightarrow$$

$$\delta^{(2k+1)}(y)\overset{y}{*}\left\{\frac{\overset{*}{1}}{\sqrt{\pi y}}\right\}^{2k+1}=\delta^{(k+1)}(y)\overset{y}{*}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}=\frac{\delta^{k+1}}{\delta y^{k+1}}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}.$$

Compte tenu des relations (17) et (18), on obtient:

$$(19)\qquad [[F^{(\lambda,\mu)}_0(x,y)]]=\frac{1}{\lambda}\left[\delta(y)-\left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)\otimes\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}+\left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^2\frac{1}{2!}\delta'(y)-\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^{2k}\frac{1}{(2k)!}\otimes\delta^{(k)}(y)-\left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^{2k+1}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}+\cdots\right].$$

Pour $y>0$, cette expression se réduit à la fonction

$$(20)\qquad F^{(\lambda,\mu)}_0(x,y)=\frac{-1}{\lambda}\left[\frac{\mu x}{\lambda}\otimes\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^3\otimes\frac{\delta^2}{\delta y^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^{2k+1}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right)+\cdots\right],$$

où les dérivées sont prises au sens des fonctions.

Mais

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right)=(-1)^{k+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}{2^{k+1}y^{k+1}\sqrt{\pi y}}. \tag{21}$$

Donc, compte tenu de (21), la relation (20) prend la forme

$$F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)=\frac{\mu}{2\lambda^2}\frac{x}{y\sqrt{\pi y}}\left[1-\frac{\mu^2x^2}{4\lambda^2 y}+\left(\frac{\mu^2x^2}{4\lambda^2y}\right)^2\frac{1}{2!}-\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+(-1)^n\left(\frac{\mu^2x^2}{4\lambda^2y}\right)^n\frac{1}{n!}+\cdots\right], \tag{22}$$

c'est-à-dire

$$F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)=\frac{\mu}{2\lambda^2}\frac{x}{y\sqrt{\pi y}}\exp\left(\frac{-\mu^2x^2}{4\lambda^2y}\right) \tag{23}$$

$F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)$ donnée par (23) représente l'expression de $[[F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]$ pour $y>0$. Revenons maintenant à $[[F^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]$ donnée par (15); on a:

$$[[F^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]=Y(x)\frac{1}{\lambda}\left[\delta(y)-\left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)\otimes\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}+\left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^2\frac{1}{2!}\delta'(y)-\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^{2k}\frac{1}{(2k)!}\otimes\delta^{(k)}(y)-\left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^{2k+1}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}+\cdots\right]. \tag{24}$$

Soit $[[F^{(\lambda,\mu)}(p,q)]]$ l'image de $[[F(x,y)]]$ dans $[[(\mathfrak{K}_{D'_{R^2_+}})^N]]$; on a:

$$[[F^{(\lambda,\mu)}(p,q)]]=\frac{1}{\lambda}\sum_{n\in N}(-1)^n\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n p^{-(n+1)}\otimes(\sqrt{q})^n. \tag{25}$$

De même, en transportant l'équation (14) dans $[[(\mathfrak{K}_{D'_{R^2_+}})^N]]$, on obtient:

$$[[F^{(\lambda,\mu)}(p,q)]]=[[\lambda p+\mu\sqrt{q}]]^{-1}=\frac{1}{\lambda}(-1)^n\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n p^{-(n-1)}\otimes(\sqrt{q})^n. \tag{26}$$

On trouve que $[[F^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]$ donnée par (15) (resp. (24) vérifie l'équation (14): en effet, on a:

$$\frac{\partial[[F^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]}{\partial x}=\frac{1}{\lambda}\delta(x)\otimes\delta(y)-\frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\overset{y}{*}[[F^{(\lambda,\mu)}(x,y)]], \tag{27}$$

d'où l'équation

$$\lambda\frac{\partial[[F^{(\lambda,\mu)}(x,y)][}{\partial x}+\mu\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\overset{y}{*}[[F^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]=\delta(x)\otimes\delta(y) \tag{28}$$

qui est équivalente à (14).

De même, $[[F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]$ vérifie l'équation

$$\lambda\frac{\partial[[F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]}{\partial x}+\mu\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}}\right\}\overset{y}{*}[[F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]=0, \tag{29}$$

d'où l'on déduit, par récurrence, les relations différentielles:

$$\lambda^{2k} \frac{\partial^{2k} [[F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]}{\partial x^{2k}} - \mu^{2k} \frac{\partial^k [[F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]}{\partial y^k} = 0 \tag{30}$$

et

$$\lambda^{2k+1} \frac{\partial^{2k+1} [[F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]}{\partial x^{2k+1}} + \mu^{2k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} \overset{y}{*} [[F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)]] = 0 \tag{31}$$

où les dérivées sont prises au sens des fonctions par rapport à x et au sens des distributions par rapport à y.

3. *Propriétés de la fonction* $F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)$.

Revenons maintenant à la fonction $F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)$ donnée par (23). Il est facile de voir que cette fonction satisfait aux relations différentielles:

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 F_0^{(\lambda,\mu)}}{\partial x^2} - \mu^2 \frac{\partial F_0^{(\lambda,\mu)}}{\partial y} = 0 \tag{32}$$

et

$$\lambda^3 \frac{\partial^3 F_0^{(\lambda,\mu)}}{\partial x^3} + \mu^3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi y}} \exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 y}\right)\right) = 0 \tag{33}$$

les dérivées étant prises au sens des fonctions. Cette solution présente, en outre, une singularité au point $x = y = 0$.

Si l'on considère $F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)$ comme distribution en y, et si on désigne cette distribution par $\{F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)\}$ on a:

$$\{F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)\} = Y(y) \frac{\mu x}{2\lambda^2 y\sqrt{\pi y}} \exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 y}\right). \tag{34}$$

$\{F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)\}$ est la fonction en $x \in \boldsymbol{R}$, à valeurs dans (D'_{Y+}); plus précisément on a $\{F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)\} \in \mathcal{E}_x \hat{\otimes} (D'_{Y+})$.

De même que précédemment, on trouve que $\{F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)\}$ satisfait, $\forall k \in \mathbb{N}$, aux relations différentielles:

$$\frac{\partial^2 \{F_0^{(\lambda,\mu)}\}}{\partial x^2} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \delta'(y) \overset{y}{*} \{F_0^{(\lambda,\mu)}\} \tag{35}$$

$$\frac{\partial^3 \{F_0^{(\lambda,\mu)}\}}{\partial x^3} = -\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3 \delta''(y) \overset{y}{*} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}} \exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 y}\right)\right\}, \tag{36}$$

où les dérivées sont prises au sens des fonctions par rapport à x et au sens des distributions de (D'_{Y+}) par rapport à y.

Cherchons maintenant les limites au sens de la topologie de (D'_{Y+}) de ces dérivés, lorsque x tend vers 0.

On a:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\partial^2 \{F_0^{(\lambda,\mu)}\}}{\partial x^2} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \cdot \delta'(y) \overset{y}{*} \operatorname*{ilm}_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \{F_0^{(\lambda,\mu)}\}. \tag{37}$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\partial^3 \{F_0^{(\lambda,\mu)}\}}{\delta x^3} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \delta''(y) \overset{y}{*} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}} \exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 y}\right)\right\}. \tag{38}$$

D'autre part (cf. formule (57) du № 4 ci-dessous) on a:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}} \exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 y}\right)\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} \overset{y}{*} \left\{F_0^{(\lambda,\mu)}\right\} \tag{39}$$

en tant que fonction en x à valeurs dans (D'_{Y+}).

On voit donc, en dernière analyse, que le problème revient à calculer dans

$$(D'_{Y+}),\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \{F_0^{(\lambda,\mu)}\}.$$

La fonction $F_0^{(\lambda,\mu)}$ ayant une singularité au point $x = y = 0$, on doit calculer cette limite en ce point, le seul où elle est différente de 0 pour $x \to 0$. Pour ce faire, nous allons procéder par régularisation (cf. [3], Chap. II, A, § 3, №3).

Soit $\alpha_j(y)$ une suite de fonctions de $(D_+)_y = (D_{Y+})$, qui converge vers δ_y dans (D'_{Y+}) (par exemple, si les α_j sont >0, de support tendant uniformément vers l'origine de R) et telles que $\int_R \alpha_j(x)\,dx = 1$. Dans ces conditions, considérons dans (D'_{Y+}) le produit de convolution:

$$\{F_0^{(\lambda,\mu)}(x, y)\} * \{\alpha_j(y)\} = \left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\alpha_j(y-z)}{z^{3/2}} \left(\frac{\mu x}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 z}\right) dz\right\}.$$

On en déduit:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \{F_0^{(\lambda,\mu)}(x, y) \overset{y}{*} \alpha_j(y)\} = \left\{\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\alpha_j(y-z)}{z^{3/2}} \left(\frac{\mu x}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 z}\right) dz\right\}.$$

Mais (cf. [8], Chap. XXIX, № 544, p. 308):

$$\left\{\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \int_0^y \frac{\alpha_j(y-z)}{2\lambda^2 z\sqrt{z}} \mu x \exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 z}\right) dz\right\} = \{\alpha_j(0)\}\frac{1}{\lambda}. \tag{40}$$

D'autre part, on a, compte tenu de (40):

$$\lim_{j \to \infty} \Big(\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \{F_0^{(\lambda,\mu)}(x, y) \overset{y}{*} \alpha_j(y)\} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \{F_0^{(\lambda,\mu)}(x, y)\} \overset{y}{*} \delta(y) =$$

$$= \lim_{j \to \infty} \frac{1}{\lambda}\{\alpha_j(0)\} = \delta(y)\frac{1}{\lambda}$$

d'où,

$$\lim_{x \to 0} \{F_0^{(\lambda,\mu)}(x, y\} = \frac{1}{\lambda}\delta(y). \tag{41}$$

En vertu de (41), les relations (37) et (38) nous donnent:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial^{2k}\{F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)\}}{\partial x^{2k}} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2k} \delta^{(k)}(y)\frac{1}{\lambda}$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial^{2k+1}\{F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)\}}{\partial x^{2k+1}} = -\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\frac{1}{\lambda}. \tag{42}$$

Si l'on développe en série formelle de Taylor la fonction vectorielle $\{F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)\}$ définie par la formule (34), on trouve, compte tenu des relations (42):

$$\{F_0^{(\lambda,\mu)}\} = \frac{1}{\lambda}\left[\delta(y) - \frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} + \left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{2!}\delta'(y) - \cdots \right. \tag{43}$$

$$\left. \cdots + \left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^{2k}\frac{1}{(2k)!}\delta^{(2k)}(y) - \left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^{2k+1}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} + \cdots\right].$$

On voit que ce développement est identique à la somme formelle $[[F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]$ donnée par la formule (19); on a donc:

$$\{F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)\} = Y(y)\frac{x\mu}{2\lambda^2 y\sqrt{\pi y}}\exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 y}\right) = [[F_0^{(\lambda,\mu)}]].$$

D'autre part, si l'on désigne par $\{F^{(\lambda,\mu)}(x,y)\}$ la distribution de $(D'_{R^2_+})$ qui correspond à la fonction $F_0(x,y)$, on trouve, en vertu de la formule (24)

$$\{F^{(\lambda,\mu)}(x,y)\} =$$

$$= Y(x)\otimes Y(y)\frac{\mu x}{2\lambda^2 y\sqrt{\pi\lambda}}\exp\left(\frac{-\mu^2x^2}{4\lambda^2 y}\right) = [[F^{(\lambda,\mu)}(x,y)]], \tag{44}$$

d'où dans $(D'_{R^2_+})$ la relation opérationnelle fondamentale:

$$\frac{1}{\lambda p + \mu\sqrt{q}} = Y(x)\frac{1}{\lambda}\exp\left(\frac{-\mu x}{\lambda}\sqrt{q}\right) = \tag{45}$$

$$= Y(x)\times Y(y)\frac{1}{\lambda}\frac{\mu x}{2\lambda y\sqrt{\pi y}}\exp\left(\frac{-\mu^2x^2}{4\lambda^2 y}\right) = \{F_0^{(\lambda,\mu)}(x,y)\},$$

relation que l'on écrit dans les traités classiques de *Calcul opérationnel* sous la forme incorrecte:

$$\exp\left(\frac{-\mu x}{\lambda}\sqrt{q}\right) = \frac{\mu x}{2\lambda y\sqrt{\pi y}}\exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 y}\right).$$

Nous avons vu que $[[F^{(\lambda,\mu)}(x,y)]]$ vérifie l'équation (28), c'est-à-dire, l'équation de convolution (14).

La relation (44) nous permet d'affirmer que $\{F^{(\lambda,\mu)}(x,y)\}$ vérifie aussi ces équations équivalentes.

Nous montrerons un peu plus bas que $\{F^{(\lambda,\mu)}(x,y)\}$ est une solution élémentaire de l'équation de convolution (14).

Remarque. Nous avons vu que l'image de (14) dans $(\mathfrak{R}_{D'^{\,2}_{R_+}})$ est donnée par

$$[\lambda\,(p\times 1_y)+\mu\,(1_x\times\sqrt{q})]\;F^{(\lambda,\,\mu)}(p,q)=1_x\times 1_y \tag{46}$$

pour $\mu\neq 0$, $\mu\,(1_x\otimes\sqrt{q})$ admet ponr inverse dans $(\mathfrak{R}_{D'^{\,2}_{R_+}})$, l'opérateur

$$\frac{1}{\mu}\left(1_x\otimes\frac{1_y}{\sqrt{q}}\right);$$

d'après la théorie générale des sommes formelles (cf. [4] Chap. IV, № 6, Prop. 4) $\left[\mu\left(\frac{1}{x}\otimes\sqrt{q}\right)+\lambda\,(p\otimes 1_y)\right]$ admet un inverse dans $[[(\mathfrak{R}_{D'^{\,2}_{R_+}})^N]]$ donné par

$$[[F_2^{(\lambda,\,\mu)}(p,\,q)]]=\frac{1}{\mu}\sum_{n\in N}(-1)^n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p^n\otimes(\sqrt{q})^{-(n+1)}, \tag{47}$$

dont „l'original" dans $[[(D'^{\,2}_{R_+})^N]]$ est la série formelle

$$\begin{aligned}[[F_2^{(\lambda,\,\mu)}(x,\,y)]]=\frac{1}{\mu}\,[\delta\,(x)\otimes\frac{1}{\sqrt{\pi y}}-\frac{\lambda}{\mu}\,\delta'(x)\otimes Y(y)+\\
+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\delta''(x)\otimes\{Y(x)\}\overset{y}{*}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi\,y}}\right\}-\cdots\\
\cdots+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2k}\delta^{(2k)}(x)\otimes\{\overset{*}{Y}(y)\}\overset{y}{*}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi\,y}}\right\}-\\
-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2k+1}\delta^{(2k+1)}(x)\otimes\{\overset{*}{Y}(y)\}^{k+1}+\cdots]\end{aligned} \tag{48}$$

solution de l'équation (14) (resp. de (28)), *qui ne se réduit jamais à une distribution de* $(D'^{\,2}_{R_+})$.

Nous avons déjà rencontré des phénomènes analogues dans le cas des équations differentielles. (cf. [5], Chap. I, § 4).

4. *L'opérateur* $Y(x)\,\dfrac{1}{\lambda\sqrt{q}}\exp\left(\dfrac{-\mu\,x}{\lambda}\sqrt{q}\right)=\dfrac{1}{\lambda\,(p\otimes 1_y)+\mu(1_x\otimes\sqrt{q}}$.

Considérons dans $(D'^{\,2}_{R_+})$ l'équation de convolution

$$[\lambda\,\delta'(x)\otimes\delta'(y)\overset{y}{*}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi\,y}}\right\}+\mu\,\delta\,(x)\otimes\delta'(y)]\overset{x\,y}{*}\{G\}=\delta\,(x)\otimes\delta\,(y), \tag{49}$$

qui, transportée dans $(\mathfrak{R}_{D'^{\,2}_{R_+}})$ est équivalente à l'équation algébrique:

$$[\lambda\,(p\otimes\sqrt{q})+\mu\,(1_x\otimes q)]\,G\,(p,q)=1_x\otimes 1_y. \tag{50}$$

Mais $[\lambda p \otimes \sqrt{q}$ inversible dans $(\mathfrak{R}_{D'_{R_+^2}})] \Rightarrow \{[[\lambda p \otimes \sqrt{q} + \mu \cdot 1_x \otimes q]]$ inversible dans $[[(\mathfrak{R}_{D'_{R_+^2}})^N]]\} \Rightarrow [[G(p, q)]] = \frac{1_y}{\sqrt{q}} \frac{1_x \otimes 1_y}{[[\lambda p \otimes 1_y + \mu(1_x \otimes \sqrt{q})]]}$,

d'où, compte tenu de la relation (45):

$$(51°) \qquad \{G(x, q)\} = \frac{1}{\sqrt{q}} Y(x) \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{-\mu x}{\lambda} \sqrt{q}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} Y(x) \left[\frac{1_y}{\sqrt{q}} - \frac{\mu x}{\lambda} 1_y + \cdots + (-1)^n \frac{(x)^n}{n! \lambda^n} (\sqrt{q})^{n-1} + \cdots + \right] \in [[(\mathfrak{R}_{D'_Y})^N]];$$

d'où dans $[[(D'_{R_+^2})^N]]$.

$$(52) \quad [[G(x, y)]] = Y(x) \frac{1}{\lambda} \left[\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} - \frac{\mu x}{\lambda} \otimes \delta(y) + \left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{2!} \otimes \frac{\partial}{\partial y} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} - \cdots\right.$$

$$\left. \cdots + \left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^{2k} \frac{1}{(2k)!)} \frac{\partial k}{\partial y^k} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} - \left(\frac{\mu x}{\lambda}\right)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} \delta^{(k)}(y) + \cdots\right],$$

que l'on peut encore écrire:

$$(53) \qquad [[G(x, y)]] = \frac{1}{\lambda} [Y(x) \otimes \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} - \frac{\mu}{\lambda} \{\overset{*}{Y}(x)\}^2 \otimes \delta(y) +$$

$$+ \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \{\overset{*}{Y}(x)\}^3 \otimes \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} + \cdots + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2k} \{\overset{*}{Y}(x)\}^{2k+1} \otimes \frac{\partial^k}{\partial y^k} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} -$$

$$- \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2k+1} \{Y(x)\}^{2k+2} \otimes \delta^{(k)}(y) + \cdots \Big],$$

en tant que l'élément de $[[(D'_{R_+^2})^N]]$. En tant que fonction en $x \in R$ la formule (52) (resp. (53)), compte tenu de (21), se réduit à la fonction:

$$(54) \qquad G_0(x, y) = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4 \lambda^2 y}\right),$$

pour $y > 0$.

Si l'on désigne par $\{G(x, y)\}$ la distribution de $(D'_{R_+^2})$, qui correspond à la fonction $G_0(x, y)$, c'est-à-dire, si l'on pose

$$(55) \qquad \{G)x, y)\} = (Y(x) \otimes Y(y)) \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4 \lambda^2 y}\right)$$

on a

$$(56) \qquad \{G(x, y)\} = [[G(x, y)]].$$

Cela résulte de l'égalité (44).

En effet, de (51) on tire:

$$(57) \qquad \{G(x, y)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} \overset{y}{*} \{F(x, y)\}$$

D'autre part la formule (24), compte tenu de (53), nous donne

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} \overset{y}{*} [[F(x, y)]] = [[G(x, y]]. \tag{58}$$

d'où en vertu de (24) et (57):

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} \overset{y}{*} \{F(x, y)\} = [[G(x, y)]] = \{G(x, y)\}.$$

c. q. f. d.

On peut donc écrire *la relation opérationnelle fondamentale:*

$$\frac{1_x \otimes 1_y}{\sqrt{q}\,[\lambda(p \otimes 1_y + \mu(1_x \otimes \sqrt{q}}} = \frac{1}{\sqrt{q}}\,\frac{1}{\lambda}\,Y(x)\exp\left(-\frac{\mu}{\lambda} \otimes \sqrt{p}\right) = \tag{59}$$

$$= \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} \overset{y}{*} \{F_0(x, y)\} = Y(x) \otimes Y(y)\left(\frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 y}\right)\right) = \{G(x, y)\}.$$

Montrons maintenant que la distribution $\{F(x, y)\}$ donnée par (44) est la solution élémentaire de l'équation de convolution (14).

On a

$$\frac{\partial\{F\}}{\partial x} = \delta(x) \otimes \lim_{x \to 0}\{F\} + \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\right\}.$$

Mais en vertu de (39), $\lim\limits_{x \to 0}\{F\} = \frac{1}{\lambda}\,\delta_{(y)}$ dans (D'_{Y+}): d'autre part,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu x}{2\lambda^2 y\sqrt{\pi y}}\exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 y}\right)\right) = \left(\frac{-\mu}{\lambda^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 y}\right)\right\} = \left(\frac{-\mu}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial y}\{G\}.$$

Donc, en tenant compte de (57), on obtient:

$$\frac{\partial\{F\}}{\partial x} = \frac{1}{\lambda}\,\delta(x) \otimes \delta(y) - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial y}\{G\} = \frac{1}{\lambda}\,\delta(x) \otimes \delta(y) - \frac{\mu}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} \overset{y}{*} \{F\},$$

d'où

$$\lambda\frac{\partial\{F\}}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} \overset{y}{*} \{F\} = \delta(x) \otimes \delta(y), \tag{60}$$

équation équivalente à (14). c.q.f.d.

Montrons, de même, que $\{G(x, y)\}$ vérifie l'équation (49), c'est-à-dire, l'équation équivalente:

$$\lambda\frac{\partial^2\{G\}}{\partial x\,\partial y} \overset{y}{*} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} + \mu\,\frac{\partial\{G\}}{\partial y} = \delta(x) \otimes \delta(y). \tag{61}$$

En effet de (57) on tire:

$$\frac{\partial\{G\}}{\partial x} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} \overset{y}{*} \frac{\partial\{F\}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2\{G\}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} \overset{y}{*} \frac{\partial\{F\}}{\partial x}$$

et
$$\frac{\partial\{G\}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\overset{y}{*}\{F(x, y)\},$$
d'où
$$\lambda\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\overset{y}{*}\frac{\partial^2\{G\}}{\partial x\,\partial y}+\mu\frac{\partial\{G\}}{\partial y}=\lambda\delta'(y)\overset{y}{*}Y(y)\overset{y}{*}\frac{\partial\{F\}}{\partial x}+\mu\frac{\partial\{G\}}{\partial y}=$$
$$=\lambda\frac{\partial\{F\}}{\partial x}+\mu\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\overset{y}{*}\{F\}=\delta(x)\otimes\delta(y).$$
c.q.f.d.

5. *Propriétés de la fonction* $G_0(x, y)$.

On a
$$G_0(x, y)=\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\exp\left(\frac{-\mu^2x^2}{4\lambda^2 y}\right)$$
d'où
$$\frac{\partial G_0}{\partial x}=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)F_0(x, y),$$
avec $F_0(x, y)$ donnée par (23).

On en déduit

(61)
$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2}=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\frac{\partial F_0}{\partial x},$$
d'où en vertu de (33)

(62)
$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2}=\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\frac{\partial G_0}{\partial y},$$
D'autre part, les relations (33) et (61) nous donnent:

(63)
$$\frac{\partial^3 F_0}{\partial x^3}=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3\frac{\partial^2 G_0}{\partial y^2};\quad\frac{\partial^3 G_0}{\partial x^3}=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3\cdot\frac{\partial F_0}{\partial y}.$$
Nous dirons que les relations (63) sont des „*relations de réciprocité*" entre G_0 et F_0.

Considérons maintenant la fonction en $x\in R$, distribution de (D'_{Y+}), donnée par

(64)
$$\{G_0(x, y)\}=Y(y)\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\exp\left(\frac{-\mu^2x^2}{4\lambda^2 y}\right)=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\overset{y}{*}\{F_0\}.$$
On déduit les relations différentielles:

(65)
$$\frac{\partial^2\{G_0\}}{\partial x^2}=\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\delta'(y)\overset{y}{*}\{G_0\}.$$
et

(66)
$$\frac{\partial^3\{G_0\}}{\partial x^3}=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3\delta'(y)\overset{y}{*}\{F_0\}.$$
La relation (65) est „*en réciprocité*" avec la relation (36), qui peut se mettre sous la forme:
$$\frac{\partial^3\{F_0\}}{\partial x^3}=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3\delta''(y)\overset{y}{*}\{G_0\}.$$
Revenons à l'équation (50) image de l'équation de convolution (49).

L'inverse de $\mu(1_x \otimes q$ $(\mathfrak{R}_{D'_{R^2_+}})$ est l'opérateur $\frac{1}{\mu}\frac{1}{1_x \otimes q}$ auquel correspond la distribution $\frac{1}{\mu}\delta(x) \otimes Y(y)$, inverse de $\mu\,\delta(x) \otimes \delta'(y)$ dans $(D'_{R^2_+})$. Donc,

à $\mu\,(1_x \otimes q) + \lambda\,(p \otimes \sqrt{q})$ $\left(\text{resp. } \mu\,\delta(x) \otimes \delta'(y) + \lambda\,\delta'(x) \otimes \delta'(y) \overset{y}{*} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\right)$

inversible dans $[[(\mathfrak{R}_{D'_{R^2_+}})^N]]$ (resp. dans $[[(D'_{R'_+})^N]]$, correspond une seconde soluton $[[G_1(p, q)]]$ (resp. $[[\{G_1(y, y)\}]]$ dans $[[(\mathfrak{R}_{D'_{R^2_+}})^N]]$ (resp. $[[(D'_{R^2_+})^N]]$), donnée par

$$[[G_{1\,(p,\,q)}]] = \sum_{n \in N} (-1)^n \lambda^n \mu^{-(n+1)} p^n \otimes \frac{1}{q}\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n$$

$$\left(\text{resp. } [[\{G_1(x, y)\}]] = \sum_{n \in N} (-1)^n \lambda^n \mu^{-(n+1)} \delta^{(n)}(x) \otimes Y(y) \overset{y}{*} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}^{\overset{*}{n}},\right.$$

qui ne se réduit jamais à un élément de $(\mathfrak{R}_{D'_{R^2_+}})$, (resp. $(D'_{R^2_+})$). On voit que $[[G_1(x, y)]]$ est une fonction indéfiniment dérivable de $y>0$, à valeurs dans $[[(D'_x)^N]]$. Plus précisément, la relation opérationnelle (59) peut s'écrire:

$$\{G(x, y)\} = Y(x) \otimes Y(y)\left(\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\exp\left(\frac{-\pi^2 x^2}{4\lambda^2 y}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{q}\,(\lambda p + \mu\sqrt{q})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q}}\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{\mu}{\lambda}\sqrt{q}\right) = \frac{1}{q}\frac{1}{\mu}\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu}p\frac{1}{\sqrt{q}}}.$$

Si l'on prend

$$\{G(x, y)\} = \frac{1}{\sqrt{q}\,(\lambda p + \mu\sqrt{q})} = \frac{1}{\sqrt{q}}\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{\mu}{\lambda}\sqrt{q}\right),$$

alors $\{G(x, y)\}$ est fonction en x pour $x \geq 0$, à valeurs dans (D'_{Y+}), dont le développement en série formelle est donnée par la formule (52). Par contre, si l'on prend

$$\{G(x, y)\} = \frac{1_y}{\sqrt{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{q}(\lambda p + \mu\sqrt{q}} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\mu}\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu}p\frac{1}{\sqrt{q}}},$$

dans ce cas, $\{G(x, y)\}$ est fonction indéfiniment dérivable en $y>0$, à valeurs dans $[[(D'_{X+})^N]]$, dont le développement en série formelle est donnée par:

$$(66)' \qquad \{G(x, y)\} = \frac{1}{\mu}\sum_{n \in N} (-1)^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \delta^{(n)}(x) \otimes Y(y) \overset{y}{*} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}^{\overset{*}{n}},$$

d'où l'on voit, que pour $y \to 0$, on a:

$$(66)'' \qquad \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \{G(x, y)\} = \frac{1}{\mu}\delta(x).$$

6. *L'opérateur* $\dfrac{1_x \otimes 1_y}{\lambda p \otimes q + \mu(1_x \otimes q\sqrt{q})} = Y(x) \dfrac{1}{\lambda} \dfrac{1}{q} \exp\left(-\dfrac{\mu}{\lambda} x \sqrt{q}\right) =$

$$= Y(x) \otimes Y(y) \frac{1}{\lambda}\left[1 - \exp\left(\frac{\mu x}{\lambda\sqrt{q}}\right)\right] = \left\{\frac{1}{\lambda}\left[1 - \exp\left(\frac{\mu x}{\lambda\sqrt{y}}\right)\right]\right\}.$$

Considérons dans $(D'^{2}_{R_+})$ l'équation de convolution

$$\left[\{\lambda \delta'(x) \otimes \delta'(y) + \mu \delta(x) \otimes \delta''(y) \overset{y}{*} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\right] \overset{xy}{*} \{H(x,y)\} = \delta(x) \otimes \delta(y), \tag{67}$$

dont l'image dans $(\mathfrak{R}_{DR'^{2}_+})$ est l'équation algébrique:

$$[\lambda(p \otimes q) + \mu(1_x \otimes q\sqrt{q})]\, H(p,q) = 1_x \otimes 1_y, \tag{68}$$

d'où

$$H(p,q) = \frac{1_y}{q} \frac{1}{\lambda p + \mu\sqrt{q}} = \frac{Y(x)}{q} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{\mu x}{\lambda}\sqrt{q}\right) = \tag{69}$$
$$= \frac{Y(x)}{\sqrt{q}}\left(\frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{q}} \exp\left(-\frac{\mu x}{\lambda}\sqrt{q}\right)\right).$$

Compte tenu des relations opérationnelles (45) et (59), on trouve pour ,,original" de $H(p,q)$ dans (D'_Y):

$$\{H_0(x,y)\} = \{Y(y)\} \overset{y}{*} \{F_0(x,y)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} \overset{y}{*} \{G_0(x,y)\}. \tag{70}$$

Mais

$$\{Y(y)\} \overset{y}{*} \{F_0(x,y)\} = \left\{\int_0^y \frac{\mu x}{2\lambda^2 z\sqrt{\pi z}} \exp\left(\frac{-\mu^2 x^2}{4\lambda^2 z}\right) dz\right\}, \tag{71}$$

en tant que fonction en $x \in R$ et distribution $\in (D'_{Y_+})$. D'autre part, on sait que l'on a:

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2}\, du = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2}\, du = 1 - \operatorname{erf}(t).$$

Donc

$$\{H_0(x,y)\} = Y(y) \frac{1}{\lambda} \operatorname{erf}\left(\frac{\mu x}{2\lambda\sqrt{y}}\right), \quad \text{et} \tag{72}$$
$$H_0(x,y) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{erf}\left(\frac{\mu x}{2\lambda\sqrt{\pi y}}\right), \quad \text{pour } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

$$\{H(x,y)\} = Y(x)\{H_0(x,y)\} = Y(x) \otimes Y(y) \frac{1}{\lambda} \operatorname{er} f_c\left(\frac{\mu x}{2\lambda\sqrt{y}}\right), \tag{73}$$

on trouve finalement la relation opérationnelle:

$$\frac{1}{\lambda(p \otimes q) + \mu(1_x \otimes q\sqrt{q})} = Y(x) \otimes Y(y) \frac{1}{\lambda} \operatorname{er} f_c\left(\frac{\mu x}{2\lambda\sqrt{y}}\right) = \{H(x,y)\} = \tag{74}$$
$$= \{Y(y)\} \overset{y}{*} \{F(x,y)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\} \overset{y}{*} \{G(x,y)\},$$

où $\{F(x, y)\}$ et $\{G(x, y)\}$ sont données respectivement par (44) et (55).

Remarque. On peut aussi obtenir les relations opérationnelles (74) à l'aide de la théorie des séries formelles, en cherchant dans $[[(\mathfrak{K}_{D'_{R^2_+}})^N]]$ l'inverse de l'opérateur $[\lambda(p\otimes q)+\mu(1_x\otimes q\sqrt{q})]$.

7. *Propriétés de la distribution $\{H_0(x, y)\}$ et de la fonction $H_0(x, y)$.*

De la relation (70), on déduit:

$$\frac{\partial^2\{H_0\}}{\partial x^2}=\{Y(y)\}\overset{y}{*}\frac{\partial^2\{F_0\}}{\partial x^2}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\overset{y}{*}\frac{\partial^2\{G_0\}}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial\{H_0\}}{\partial y}=\{Y(y)\}\overset{y}{*}\frac{\partial\{F_0\}}{\partial y}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right\}\overset{y}{*}\frac{\partial\{G_0\}}{\partial y}.$$

d'où compte tenu de (35), (resp. 61) les relations différentielles:

$$\lambda^2\frac{\partial^2\{H_0\}}{\partial x^2}-\mu^2\frac{\partial\{H_0\}}{\partial y}=0 \tag{75}$$

et

$$\frac{\partial^3\{H_0\}}{\partial x^3}=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3\delta'(y)\overset{y}{*}\{G_0\},\quad \forall n\in N, \tag{76}$$

où les dérivées sont prises au sens habituel par rapport à x, et au sens des distributions par rapport à y.

De même, on trouve que la fonction $H_0(x, y)$ vérifie les relations différentielles:

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2}=\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\frac{\partial H_0}{\partial y} \tag{77}$$

$$\frac{\partial^3 H_0}{\partial x^3}=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3\frac{\partial G_0}{\partial y},\quad \forall n\in \mathbf{N}. \tag{78}$$

En effet, on a:

$$H_0(x, y)=\int_0^y F_0(x, z)\,dz, \tag{79}$$

d'où

$$\frac{\partial H_0}{\partial y}=F(x, y)$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial x}=\int_0^y\frac{\partial F_0(x, z)}{\partial x}dz=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\int_0^y\frac{\partial G_0(x, z)}{dz}dz=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)G_0(x, y) \tag{80}$$

et

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2}=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\frac{\partial G_0}{\partial x}=\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2F_0(x, y)=\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\frac{\partial H_0}{\partial y},$$

d'où les relations (77) et (78).

Montrons maintenant que la distribution $\{H(x, y)\}$ est solution élémentaire dans $(D'_{R^2_+})$, de l'équation de convolution (67). En effet, on a:

$$\{H(x, y)\} = \{Y(y)\} \overset{y}{*} \{F(x, y)\},$$

d'où l'on déduit:

$$\frac{\partial^2 \{H\}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \{F\}}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \right\} \overset{y}{*} \{H\} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \right\} \overset{y}{*} \frac{\partial \{H\}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \right\} \overset{y}{*} \{F\},$$

d'où, enfin:

$$\lambda \frac{\partial^2 \{H\}}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \right\} \overset{y}{*} \{H\} = \lambda \frac{\partial \{F\}}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \right\} \overset{y}{*} \{F\} = \delta(x) \otimes \delta(y),$$

qui est équivalente à l'équation (67).

Remarque. Nous avons vu que les fonctions $F_0(x, y)$, $G_0(x, y)$, $H_0(x, y)$ données respectivement par les formules (23), (54) et (72) sont solutions de l'équation parabolique

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} - \mu^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

C'est la raison pour laquelle les opérateurs correspondants sont dits du type parabolique.

Dans un prochain article nous appliquerons tous ces résultats à la recherche des solutions dans (D'_{R^2}), de certaines équations aux dérivées partielles et intégro-différentielles du type parabolique.

BIBLIOGRAPHIES

[1] D. Voelker, G. Doetsch, *Die Zweidimensionale Laplace-Transformation:* Verlag Birkhäuser, Basel, 1950

[2] S. Vasilach, *Sur un Calcul Opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables.* Revue Math. Pures et Appl. T. II, 1957.

[3] S. Vasilach, *Calcul Opérationnel des Distributions à support dans* R^2_+, $n \geq 1$. Rev. Math. Pures et Appl. Chap. 1, 1959, T. IV, 1959, p. 185—219, Chap. II, 1960, T, V. 1960, p. 495—531, Chap. III, T. VI, 1961, p. 69—100, Chap. IV—V, T. VIII, 1963, p. 19—66.

[4] S. Vasilach, *Algebraic Structures of algebraic formal Operations,* Rev. Math. Pures et Appl. Chap. I—III, T. VIII, 1963. p. 353—390, Chap. IV, T. VIII, 1963, p, 517—564, Chap. V Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. T. X, 1965.

[6] A. Grothendieck, *Produits tensoriels Topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Am. Math. Soc. № 16, 1955.

[7]. L. Schwartz, Seminaire 1953—1954.

[8] E. Goursat, *Cours d'analyse* T. III, 1941.

S. Vasilach,
Département de Mathématiques,
Québec 10, Canada.