PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 12 (26), 1971, pp. 143—148

АБСОЛЮТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ

В. А. Вуйичич

(Сообщено 11 июня 1971 года)

1. Дифференциальные уравнения геодезической

$$\frac{d^2 x^i}{d s^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{d x^j}{d s}\frac{d x^k}{d s}=0, \tag{1}$$

в римановом n-размерном пространстве V_n в общем случю представляют, как известио, систему от n нелинейных диффененциальных уравненый второго порятка, и в некоторых случаях неинтегрируемую. Но, если систему уравнений напишем в форме абсолютной производной касательного вектора $v^i=\dfrac{d x^i}{d s}$ по дуге, т.е.

$$\frac{D v^i}{d s}=\frac{d v^i}{d s}+\Gamma^i_{jk} v^j\frac{d x^k}{d s}=0 \tag{2}$$

и приложим к ней оператор абсолютного интеграла вектора* [1] мы очень просто получим из (2) вектор

$$v^i=v^i\,(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n;\ \dot{x}_0^1, \dot{x}_0^2, \ldots, \dot{x}_0^n;\ x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

в конечном виде.

В случае абсолютного дифференциала одновалентного ковариантного v_i, или контравариантного тензора v^i, т.е. вектора, мы показали [2] что справедливые соотношения

$$\widehat{\int} D v_i=v_i-\mathcal{A}_i, \tag{3}$$

и, также

$$\widehat{\int} D v^i=v^i-\mathcal{A}^i \tag{4}$$

---

* В статье „Абсолютный интеграл тензора" Publications de l'Institut Mathématique, T. 10 (24), 1971 мы предложили ввести в тензорный анализ интегралный оператор, возвращающий тензор из его абсолютного дифференциала. Этот оператор мы назвали абсолютый интеграл тензора, т.е. абсолютный интеграл вектора если реч идет об векторе, и обозначили его символом $\widehat{\int}$.

где $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}^i$ параллельно переносимые (автопараллельные) векторы, которые надо определить нами указанным способом. Используя соотношения (3) и (4) мы в этой статье пришли к первым интегралам диффенциальных уравнений геодезической (1) в метрическом пространстве.

2. Дифференциальные уравнения геодезической (1), имея в виду (2), можно написать в виде абсолютного дифференциала в ковариантой

$$D v_i = 0, \qquad (i = 1,\ 2, \ldots, n) \tag{5}$$

или в контравариантной форме

$$D v^i = 0. \tag{6}$$

Благодаря соотношениям (3) и (5), т.е.

$$\widehat{\int} D v_i = 0$$

мы получим

$$v_i = \mathcal{A}_i. \tag{7}$$

Как показано в работах [1] и [2] параллельно-переносимый вектор $\mathcal{A}_i$ это вектор v_i в некоторой зафиксированой точке O, который параллельно и постоянно переносится в любую точку X геодезической.

Обозначим координаты точки O через $x_0^k = x^k(s_0) = x^K$ индексы которых большие буквы K, L, M, $N, \ldots$.

Индексы координат $x^i = x^i(s)$ точки X будем обозначать, как иначе это принято, маленкими буквами i, j, $k, \ldots$ С этими обозначениями мы покажем что искомый параллельно переносимый вектор $\mathcal{A}_i$ будет

$$\mathcal{A}_j = g_{jK}\, v^K = g_{jK} \left(\frac{d x^K}{d s}\right)_{s=s_0}. \tag{8}$$

где g_{jK} фундаментальный тензор вычислаемый в двух точках O и X. Поэтому мы его будем називатъ *двухточечный* (двухпунктуальный) *фундатентальный тензор*. В работе [3] будут показаны некторны особенности *двухточечного ковариантного* g_{iK}, *контравариантного* g^{iK} *и смешаного* $g^i{}_K$ *фундатентального тензора* и их связь с двойными тензорными полями [4]. Здесь мы выведем только те определения двухточечных тензоров которые нам нужны для решения поставленной задачи об абсолютном интегрированию дифференциальных уравнений геодезической.

Исходя из определения параллельно-переносимого вектора мы покажем справедливость соотношеный (8). Не теряя общности рассмотрим, кроме системы координат x^i, еще и одну аффиную систему координат y^α ($\alpha =$ $1, 2, \ldots, N \geqslant n$), где $y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

В аффиной системе координат y^α вектор v_λ в фиксной точке $O(y_0^1, y_0^2, \ldots, y_0^n)$ с постоянньими составлящими, т.е.

$$v_\Lambda = \bar{g}_{\Lambda\Theta} \left(\frac{d y^\Theta}{d s}\right)_{s=s_0}.$$

где $\bar{g}_{\Lambda\Theta}$ фундаментальный тензор в точке O.

Постоянный вектор v_Λ можно перенести в точку X. При этом его составляющие $\dot{y}_0^\gamma = \dot{y}^\Gamma = \text{const.}$ в относительно аффиной системе координат не изменяются. Но относительно обобщенных координат x^i в точке X вектор $\mathcal{A}_i$ будет

$$\mathcal{A}_i = v_\Lambda \frac{\partial y^\Lambda}{\partial x^i} = \left(\bar{g}_{\Lambda\Theta} \frac{d y^\Theta}{d s}\right)_{s=s_0} \frac{\partial y^\Lambda}{\partial x^i}.$$

и затем

$$\mathcal{A}_i = \left(\bar{g}_{\Lambda\Theta} \frac{\partial y^\Theta}{\partial x^K} \frac{d x^K}{d s}\right)_{s=s_0} \frac{\partial y^\Lambda}{\partial x^i} = \left(\bar{g}_{\Lambda\Theta} \frac{\partial y^\Lambda}{\partial x^K}\right)_{x^k = x_0^k} \frac{\partial y^\Theta}{\partial x^i} \left(\frac{d x^K}{d s}\right)_{s=s_0} =$$

$$= g_{iK} \left(\frac{d x^K}{d s}\right)_{s=s_0} = g_{iK}\, \dot{x}_0^K,$$

где, очевидно $\dot{x}_0^K = \left(\frac{d x^K}{ds}\right)_{s-s_0}$ составляющие вектора v^K в точке O отосительно системы координат x^i, а

$$g_{iK} = \bar{g}_{\Lambda\Theta} \frac{\partial y^\Theta}{\partial x^i} \left(\frac{\partial y^\Lambda}{\partial x^K}\right)_{x^k = x_0^k} = g_{iK}(x_0^1 x_0^2, \dots, x_0^n; x^1, x^2, \dots, x^n) \tag{9}$$

фундаментальный двухоточечный ковариантный тензор.

Справедливость соотношений (8) доказана и мы из выражений (7) получили первые абсолютные интегралы дифференциальных уравнений геодезической в ковариантной форме

$$v_i = g_{ij} \frac{dx^j}{ds} = g_{iJ} \dot{x}_0^J. \qquad (i, j, J = 1, 2, \dots n) \tag{10}$$

Если соотншения (10) компонируем контравариантним фундаментальным тензором g^{ik} то мы получим первые интегралы дифференциальных уравнений геодезической в общей контравариантной форме

$$\boxed{\frac{dx^k}{ds} = g_J^k \dot{x}_0^J} \tag{11}$$

где

$$g_J^k = g_{iJ} g^{ik} \tag{12}$$

двухточечный фундаментальный смешанный тензор.

3. Из выражений (10) и (11) вытекает следствие, что первые интегралы дифференциальных уравнений (1) в любых метрических пространствах очень легко написать если известны составляющие двухточечного тензора g_{iJ} или g_J^k.

Составляющие двухточечного тензора $g_{iJ} = g_{iJ}(\overset{1}{x_0}, \overset{2}{x_0}, \dots, \overset{n}{x_0}; x^1, x^2, \dots, x^n)$ определяем тем-же способом как и составляющие фундаментального тензора $g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ но с учетом того, что частные производные функций по координатам, индексы которых большие буквы, вычислять в начальной точке $x^K = x^k(s_0)$, Например, если y^α декартовая прямоугольная система координат и x^i сферические координаты $x^1=\rho$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$ то имея в виду связи: $y^1=\rho\cos\theta\cos\varphi, y^2=\rho\cos\theta\sin\varphi, y^3=\rho\sin\theta$ из определения (9) за двухточечный фундаментальный ковариантный тензор получим:

$$(13)\quad g_{iK}=\begin{Vmatrix} \begin{matrix}\sin\theta\sin\theta_0+\\ +\cos\theta\cos\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)\end{matrix} & \begin{matrix}\rho_0[\cos\theta_0\sin\theta-\\ -\sin\theta_0\cos\theta\cos(\varphi-\varphi_0)]\end{matrix} & \rho_0\cos\theta_0\cos\theta\sin(\varphi-\varphi_0) \\ \begin{matrix}\rho[\cos\theta\sin\theta_0-\\ -\sin\theta\cos\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]\end{matrix} & \begin{matrix}\rho\rho_0[\cos\theta\cos\theta_0+\\ +\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]\end{matrix} & -\rho\rho_0\sin\theta\cos\theta_0\sin(\varphi-\varphi_0) \\ -\rho\cos\theta\cos\theta_0\sin(\varphi-\varphi_0) & \rho_0\rho\cos\theta\sin\theta_0\sin(\varphi-\varphi_0) & \rho\rho_0\cos\theta\cos\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0) \end{Vmatrix}$$

где нолики обозначают координаты начальной точки $O(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$, т.е. $\rho_0=$ $=\rho(s_0)$, $\theta_0=\theta(s_0)$, $\varphi_0=\varphi(s_0)$.

Заметим, что при совпадении точек O и X ($O\equiv X$) двухточечный фундаментальный тензор g_{iK} становится метрическим тензором

$$(14)\qquad g_{ik}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2\cos^2\theta \end{Vmatrix}.$$

Если нас интересуют, например, геодезические на сфере, радиус которой $\rho=\rho_0=R=\text{const.}$, то на основании (10), (13) и (14) получаются первые абсолютные интегралы дифференциальных уравнений геодезической на сфере:

$$(15)\quad \begin{cases} [\cos\theta_0\sin\theta-\sin\theta_0\cos\theta\cos(\varphi-\varphi_0)]\dot\theta_0+\dot\varphi_0\cos\theta_0\cos\theta\sin(\varphi-\varphi_0)=0, \\ \dfrac{d\theta}{ds}=\dot\theta_0[\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]+\dot\varphi_0\sin\theta\cos\theta_0\sin(\varphi-\varphi_0), \\ \cos\theta\,\dfrac{d\varphi}{ds}=\dot\theta_0\sin\theta_0\sin(\varphi-\varphi_0)+\dot\varphi_0\cos\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0). \end{cases}$$

Для определения первых интегралов в контравариантной форме (11) надо знать двуточечный фундаментальный смешанный тензор g_J^k. Из соотношения (12) следует что сначала надо определить ковариантный двухточечный тензор g_{iJ} а потом соответствующий контравариантный метрический тензор g^{ik}. композиция в смысле (12) дает g_J^k. Покажем это на примере цилиндра; $y^1=\rho\cos\varphi$, $y^2=\rho\sin\varphi$, $y^3=z$.

На основанию определения (9) получим

$$g_{iJ}=\begin{Vmatrix} \cos(\varphi-\varphi_0) & \rho_0\sin(\varphi-\varphi_0) & 0 \\ -\rho\sin(\varphi-\varphi_0) & \rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

За $O\equiv X$, т.е. за $\varphi=\varphi_0$ следует

$$g_{ij}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\Leftrightarrow g^{ik}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Теперь, в смысле (12) будет:

$$g_J^k = \left\{ \begin{matrix} \cos(\varphi-\varphi_0) & \rho_0 \sin(\varphi-\varphi_0) & 0 \\ -\frac{1}{\rho}\sin(\varphi-\varphi_0) & \frac{\rho_0}{\rho}\cos(\varphi-\varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}.$$

Теперь легко написать уравнения (11):

$$(16)\qquad \begin{cases} \sin(\varphi-\varphi_0)=0 \Rightarrow \cos(\varphi-\varphi_0)=1, \\ \dfrac{d\varphi}{ds}=\dot{\varphi}_0\cos(\varphi-\varphi_0)=\dot{\varphi}_0, \\ \dfrac{dz}{ds}=\dot{z}_0. \end{cases}$$

Это первые абсолютные интегралы геодезической на круговом цилиндре.

Тем же способом можно конечно получить первые интегралы и для другых римановых и евклидовых пространствах, так-как соотношения (10) и (11) претставляют первые интеграли дифференциальных уравнений геодезической в общем виде для любого метрического пространства. С этой точки зрения выражения (10) и (11) можно считать *диференциальыми уравнениями геодезической первого порядка.*

4. Хотя предметом этой статьи не являются вторые интегралы дифференциальниных уравнений геодезической мы закончим интегрирование дифференциальных уравнений геодезической на сфере и системы уравнений (16) геодезической на цилиндре.

Из системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) геодезической мы получили соотношения (11) и очевидно что теперь и дальше мы рассматриваем нормальную систему автономных линейных дифференциальных уравнений первого порядка, вида

$$\frac{dx^i}{ds}=f^i(x^1,\ x^2, \ldots, x^n).$$

Для приведеного примера сферы и цилиндра, геодезические которых известны, мы очень просто получим и вторые интеграли, т. е. конечные уравнения геодезических.

За круговой цилиндр из уравнений (16) следует $z=\dfrac{\dot{z}_0}{\dot{\varphi}_0}(\varphi-\varphi_0)+z_0$. Заметим еще что кроме этого уравнения винтовой линии на цилиндре, мы из дифференциальных уравнений (16) получим и частные решения. За $\dot{z}_0=\left(\dfrac{dz}{dz}\right)=0 \Rightarrow z=\text{const.}$ — геодезические окружности; за $\dot{\varphi}_0=0 \Rightarrow \varphi=\text{const.}$ — геодезические образующие.

На сфере можно всегда выбрать начало координатной системы так чтобы хотя один из начальных углов θ_0 или φ_0 равналься нулю; пуст $\theta_0=0$. Тогда уравнения (15) получают более простой вид:

$$\dot{\theta}_0 \sin\theta + \dot{\varphi}_0 \sin\theta \sin(\varphi-\varphi_0)=0,$$

$$\frac{d\theta}{ds}=\dot{\theta}_0 \cos\theta + \dot{\varphi}_0 \sin\theta \sin(\varphi-\varphi_0),$$

$$\cos\theta \frac{d\varphi}{ds}=\dot{\varphi}_0 \cos(\varphi-\varphi_0).$$

Первое конечное уравнение — уравнение большой окружности на сфере которое напишем в виду

$$\operatorname{tg}\theta+\lambda\sin(\varphi-\varphi_0)=0$$

где $\lambda=\frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\theta}_0}$ и задача решена. Заметим ещё частные случаи: а) если $\dot{\varphi}_0=0$ следует что геодезические $\varphi=\text{const}=\varphi_0$ меридианы: б) за $\dot{\theta}_0=0$ и $\dot{\varphi}_0\neq 0$ мы получим опять уравнение большой окружности в виде $\operatorname{tg}\theta=a\cos(\varphi-\varphi_0)$ где a постояная интегрирования.

При рассмотрении проблемы абсолютного интеграла тензора и при обсуждению этой работе проффесор Татомир П. Анжелич сделал очень полезние замечания. Когда шла реч об абсолютности интеграла от абсолютного дифференциала вектора полезнуое замечание сделал и др Марко Леко, за что я им очень благодарен.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Вуйичич. В. *Абсолютный интеграл тензора*, Publ. Inst. Math, 10 (24), 1970 Beograd.

[2] Vujičić, V., *Prilog teoriji integralenja diferencijalnih jednačina kretanja mehaničkog sistema*, Mat. vesnik, 7 (22), sv. 3, 1970.

[3] Bokan, N., *Some properties of fundamental bipoint tensor*,

[4] Ericksen, J. L., *Tensorfields*, Handbuch der Physik, Bd. III/$_1$, Appendix, Berlin (Heidelberg) New York, 1960.

[5] Норден, А. П., *Теория поверхностей*, 1956, Москва.