PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome, 12 (26), 1971. pp. 137—142

SUR LES MOUVEMENTS TRIDIMENSIONNELS D'UN GAZ PARFAIT

K. Voronjec

(Communiqué le 2 Juin 1971)

Soit ρ la densité et $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ la vitesse d'un gaz non visqueux. L'équation de continuité de mouvement permanent $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ permet d'introduire deux fonctions de courant $\psi_1(x, y, z)$ et $\psi_2(x, y, z)$ par l'équation

$$\rho \vec{v} = [\operatorname{grad} \psi_1 \operatorname{grad} \psi_2]. \tag{1}$$

Il est facile à voir que les lignes de courant sont données par $\psi_1 = \text{const.}$ et $\psi_2 = \text{const.}$

Si le mouvement est adiabatique l'équation d'énergie se réduit à

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^{\varkappa}}\right) = 0$$

et détermine la pression p par l'équation

$$p = \rho^{\varkappa} \varepsilon(\psi_1, \psi_2), \tag{2}$$

$\varepsilon(\psi_1, \psi_2)$ étant une fonction arbitraire de ψ_1 et ψ_2 et $\varkappa$ le rapport de deux chaleurs spécifiques c_p et c_v de gaz.

Soit $2\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$ le tourbillon. L'équation d'Euler peut être écrite sous la forme

$$\operatorname{grad} \frac{v^2}{2} - [\vec{v}\, 2\vec{\omega}] = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

si l'influence des forces extérieures est négligée. Faisons la transformation ordinaire (v. p. ex.[1]), mais sans se borner à un mouvement symétrique par rapport à un axe et sans linéariser les équations de mouvement. Ayant en vue que

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[\operatorname{grad}(\rho^{\varkappa-1}\varepsilon) - \frac{1}{\varkappa}\rho^{\varkappa-1} \operatorname{grad} \varepsilon\right]$$

et en désignant par λ_1 et λ_2 les expressions

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\varkappa - 1}\rho^{\varkappa-1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi_1} - \left(\frac{2\vec{\omega}}{\rho} \operatorname{grad} \psi_2\right), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\varkappa - 1}\rho^{\varkappa-1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi_2} + \left(\frac{2\vec{\omega}}{\rho} \operatorname{grad} \psi_1\right), \end{aligned} \tag{3}$$

on obtient

$$\operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,\rho^{\varkappa-1}\,\varepsilon\right)=\lambda_1 \operatorname{grad}\psi_1+\lambda_2 \operatorname{grad}\psi_2.$$

La compatibilité nécessaire des trois équations scalaires qui correspondent à cette équation vectorielle exige que la condition

$$[\operatorname{grad}\lambda_1 \operatorname{grad}\psi_1]+[\operatorname{grad}\lambda_2 \operatorname{grad}\psi_2]=0 \tag{4}$$

soit satisfaite. En multipliant cette équation par grad ψ_1 et ensuite par grad ψ_2 on arrive à deux conditions

$$(\vec{v}\operatorname{grad}\lambda_1)=0,\quad (\vec{v}\operatorname{grad}\lambda_2)=0$$

qui montrent que les surfaces $\lambda_1=\text{const.}$ et $\lambda_2=\text{const.}$ contiennent les lignes de courant, c'est-à-dire que

$$\lambda_1=\lambda_1(\psi_1,\ \psi_2),\quad \lambda_2=\lambda_2(\psi_1,\ \psi_2).$$

Après le calcul de grad λ_1 et de grad λ_2 l'équation (4) se réduit à

$$\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial\psi_2}-\frac{\partial\lambda_2}{\partial\psi_1}\right)[\operatorname{grad}\psi_2 \operatorname{grad}\psi_1]=0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\psi_2}-\frac{\partial\lambda_2}{\partial\psi_1}=0.$$

On peut, donc, poser

$$\lambda_1=\frac{\partial\lambda}{\partial\psi_1},\quad \lambda_2=\frac{\partial\lambda}{\partial\psi_2},$$

où λ est une nouvelle fonction de ψ_1 et de ψ_2, et les conditions (3) deviennent

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\vec{\omega}}{\rho}\operatorname{grad}\psi_1\right)&=\frac{\partial\lambda}{\partial\psi_2}-\frac{1}{\varkappa-1}\,\rho^{\varkappa-1}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi_2},\\ -\left(\frac{2\vec{\omega}}{\rho}\operatorname{grad}\psi_2\right)&=\frac{\partial\lambda}{\partial\psi_1}-\frac{1}{\varkappa-1}\,\rho^{\varkappa-1}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi_1}.\end{aligned} \tag{3'}$$

Les projections de tourbillon sur les directions de grad ψ_1 et de grad ψ_2 s'expriment, donc, par la densité ρ et par les dérivées des fonctions ε et λ. Il n'existe pas de restrictions sur la valeur de la projection de tourbillon sur la vitesse $\vec{v}$, qui est orthogonale au plan déterminé par grad ψ_1 et grad ψ_2.

L'équation d'Euler peut être maintenant intégrée. On arrive sans difficultés à l'équation généralisée de Bernoulli

$$\frac{v^2}{2}+\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,\rho^{\varkappa-1}\,\varepsilon=\lambda \tag{5}$$

qui donne une liaison entre la vitesse, la densité et les fonctions ε et λ.

Faisons ici quelques remarques sur les propriétés intéressantes des relations trouvées. On voit que, d'après les équations (3′), les projections de tourbillon sur les directions de grad ψ_1 et de grad ψ_2 sont égales à 0 si ε et λ sont des constantes. Mais ces projections sont nulles aussi dans le cas où ε et λ satisfont aux conditions

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \psi_1} - \frac{1}{\varkappa - 1} \rho^{\varkappa-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \psi_2} - \frac{1}{\varkappa - 1} \rho^{\varkappa-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi_2} = 0.$$

Il s'ensuit de ces deux relations que la densité est dans ce cas une foncition de ψ_1 et ψ_2 seulement, c'est-à-dire elle reste constante sur les lignes de courant. D'autre part, la compatibilité des ces relations exige que ε et λ ne soient plus deux fonctions indépendantes. Dans ce cas seulement le tourbillon peut être paralèlle á la vitesse.

Si ε et λ sont deux fonctions indépendantes, on peut traiter ψ_1 et ψ_2 comme fonctions de ε et de λ. L'équation (1) devient alors.

$$D \rho \vec{v} = [\operatorname{grad} \varepsilon \operatorname{grad} \lambda]$$

avec

$$D = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi_1} \frac{\partial \lambda}{\partial \psi_2} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi_2} \frac{\partial \lambda}{\partial \psi_1},$$

La vitesse et donc orthogonale au grad ε et au grad λ et les lignes de courant sont données par $\varepsilon = \text{const.}$ et $\lambda = \text{const.}$

Les conditions (3′) deviennent alors

$$\left(2 \vec{\omega} \operatorname{grad} \varepsilon\right) = \rho D, \qquad \left(2 \vec{\omega} \operatorname{grad} \lambda\right) = \frac{1}{\varkappa - 1} \rho^{\varkappa-1} D,$$

et montrent que le tourbillon $2 \vec{\omega}$ est toujours orthogonal au vecteur

$$\vec{W} = \operatorname{grad} \lambda - \frac{1}{\varkappa - 1} \rho^{\varkappa-1} \operatorname{grad} \varepsilon,$$

qui se trouve dans le plan orthogonal à la vitesse.

Appliquons les résultats obtenus à l'étude de mouvement pseudo-plan. Dans ce cas les lignes de courant se trouvent dans les plans orthogonaux à l'axe des z, mais les quantités caractérisant le mouvement se diffèrent dans les plans $z = \text{const.}$, c'est-à-dire dépendent de z.

Les équations des lignes de courant sont $\psi_1 (x, y, z) = \text{const.}$ et $\psi_2 (z) = \text{const.}$ et l'équation (1) peut être écrite sous la forme

$$\rho \vec{v} = [\operatorname{grad} \psi_1 \vec{k}]' \tag{6}$$

car on peut supposer que la dérivée de ψ_2 est contenue dans l'expression de la fonction ψ_2. Dans ce cas existent toujours les trajectoires orthogonales de la famille des lignes de courant qui se trouvent aussi dans les plans $z = \text{const.}$ Soit $\psi_3 (x, y, z) = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ les équations de ces trajectoires. On peut alors écrire

$$\rho v_x = \rho \gamma \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \qquad \rho v_y = \rho \gamma \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \tag{7}$$

en introduisant le paramètre γ (facteur intégrant dans l'équation des trajectoires orthogonales) qui est déterminé à un facteur dépendant de ψ_3 et z près.

A la place des variables v_y et v_x introduisons les variables v et ϑ où ϑ est l'angle que fait, dans chaque plan $z=\text{const.}$, la vitesse avec l'axe parallèle à l'axe des x. Acceptons ψ_1, z, ψ_3 comme les variables indépendantes à la place de x, y, z. En effectuant le changement des variables (élimination des fonctions ψ_1 et ψ_3) dans les équations (7) on obtient

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_1}=-\frac{1}{\gamma \rho}\frac{\partial}{\partial \psi_3}\ln(\rho \vec{v}),$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_3}=\gamma \rho \frac{\partial}{\partial \psi_1}\ln\left(\frac{\vec{v}}{\gamma}\right).$$

Avant de passer à la transformation des conditions (3′) on constate que la projection de l'équation d'Euler sur l'axe des z donne

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho^{\varkappa}\varepsilon\right)=0, \tag{8}$$

car $v_z=0$ et qu'il suffit de considérer seulement la seconde équation du système (3′). En exprimant la projection $2\vec{\omega}$ par des nouvelles variables

$$2\,\omega_z=\frac{v^2}{\gamma}\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_3}-\rho\, v\frac{\partial v}{\partial \psi_1}$$

on obtient cette équation sous la forme

$$v\frac{\partial v}{\partial \psi_1}-\frac{v^2}{\gamma \rho}\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_3}=\frac{\partial \lambda}{\partial \psi_1}-\frac{1}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi_1}.$$

La vitesse étant donnée par (5) on peut effectuer la différentiation de v dans la dernière équation et dans les équations précédentes après quoi on arrive au système

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_1}=\frac{\dfrac{\varkappa(\varkappa+1)}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\varepsilon-2\lambda}{\varkappa\gamma\rho^{\varkappa+1}\varepsilon v^2}\frac{\partial}{\partial \psi_3}\left(\rho^{\varkappa}\varepsilon\right),\\
v^2\frac{\partial}{\partial \psi_1}\ln\gamma=\frac{\partial \lambda}{\partial \psi_1}-\frac{1}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi_1},\\
\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_3}=-\frac{\gamma}{v^2}\frac{\partial}{\partial \psi_1}\left(\rho^{\varkappa}\varepsilon\right),
\end{gathered} \tag{9}$$

qui avec (5) et avec la condition (8) sert à déterminer les mouvements possibles.

Notons ici que la projection de tourbillon sur la direction de la vitesse est égale à

$$\left(2\,\vec{\omega}\,\vec{v}\right)=-v^2\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$$

et montre que cette projection est égale à 0 seulement dans le cas où l'angle ϑ ne dépend pas de z.

Les équations (9) permettent de tirer quelques conclusions élémentaires. Si la pression $\rho^{\varkappa}\varepsilon$ ne dépend pas de ψ_3 l'angle ϑ apparait comme une fonction de ψ_3 et z seulement. Les trajectoires orthogonales sont des droites. Au contraire, la condition que la pression ne dépend pas de ψ_1 exige que l'angle ϑ soit constant sur les lignes de courant. Ces lignes, donc, sont des droites.

L'analyse des équations (9) est analogue à celle effectuée, dans le cas de mouvement plan, dans les articles [2], [3] c'est pourquoi nous nous contentons ici de considérer seulement un cas spécial où les fonctions ε et λ sont liées par la relation

$$\varepsilon = k\lambda^{\varkappa}$$

avec $k = \text{const.}$ La seconde équation (9) se simplifie considérablement et donne après l'intégration $\gamma^2 = \lambda$, où le facteur dépendant de ψ_3 et z est posé égal à 1 car γ est aussi déterminé à un tel facteur près. En posant pour abréger $u = \rho\lambda$, on obtient les équations déterminant le problème posé sous la forme

$$
\begin{aligned}
&v^2 = 2\lambda\left(1 - \frac{k\varkappa}{\varkappa-1}u^{\varkappa-1}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{\psi}_1} = -\frac{1 - \dfrac{k\varkappa(\varkappa+1)}{2(\varkappa-1)}u^{\varkappa-1}}{u^2\left(1 - \dfrac{k\varkappa}{\varkappa-1}u^{\varkappa-1}\right)}\frac{\partial u}{\partial \psi_3}, \\
&\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_3} = -\frac{\dfrac{k\varkappa}{2}u^{\varkappa-1}}{1 - \dfrac{k\varkappa}{\varkappa-1}u^{\varkappa-1}}\frac{\partial u}{\partial \bar{\psi}_1},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

où est introduite une nouvelle fonction $\bar{\psi}_1(\psi_1, z)$ à la place de ψ_1 satisfaisante à la condition

$$\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \psi_1} = \sqrt{\lambda}.$$

On voit que les équations (10) déterminent l'angle ϑ à une fonction additive de z près: $\vartheta_0(z)$. On peut, donc, dans chaque plan $z = \text{const.}$ ajouter à la fonction ϑ, la solution des équations (10), une constante provenant de $\vartheta_0(z)$, choisie arbitrairement. Les équations (10) ne seront pas analysées ici en détails, mais une propriété de ces équations sera démontrée.

En introduisant la fonction v_1 à la place de v par la relation $v^2 = \lambda v_1^2$, on obtient les équations (7) sous la forme

$$uv_1 \cos\vartheta = \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial y} = u\frac{\partial \psi_3}{\partial x},$$

$$uv_1 \sin\vartheta = -\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial x} = u\frac{\partial \psi_3}{\partial y}$$

et l'on voit que (de point de vue tout à fait formel) ces équations correspondent à une sorte de mouvement de gaz que l'on pourrait nommer pseudo irratotionnel dont la densité est u et la vitesse v_1, fonction connue de u. Ce mouvement est izentropique car l'équation de Bernoulli donne $p = ku^{\varkappa}$. La fonction ψ_3, naturellement, n'est pas le potentiel quoique ses dérivées par rapport à x et à y donnent les projections v_{1x} et v_{1y} de la vitesse. La fonction ψ_3 dépend de z aussi, mais la vitesse v_{1z} est égale à 0.

Si l'on suppose, par exemple, que l'angle ϑ dans (10) est une fonction de u seulement, on voit qu'il faut, pour échapper de trivialité, poser

$$\vartheta'^2 = \frac{\frac{k\varkappa}{2} u^{\varkappa-3}\left[1 - \frac{k\varkappa(\varkappa+1)}{2(\varkappa-1)} u^{\varkappa-1}\right]}{\left(1 - \frac{k\varkappa}{\varkappa-1} u^{\varkappa-1}\right)^2}$$

et obtenir ainsi après l'intégration que

$$\pm \vartheta = \text{arc tg}\,(m \text{ tg}\,\alpha) - m\,\alpha$$

avec

$$\cos^2\alpha = \frac{k\varkappa(\varkappa+1)}{2(\varkappa-1)} u^{\varkappa-1}, \quad m^2 = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1},$$

Le mouvement presque identique a été analysé déjà dans l'article [4] et les lignes de courant obtenues correspondent bien à celles que l'on trouve dans le livre de Sedoff [5].

Ce que nous intéresse ici c'est le fait que dans ce cas les fonctions $\overline{\psi}_1$ et ψ_3 ne dépendent pas de z car u, v_1 et ϑ sont fonction de x et de y seulement. On peut, donc dire qu'au chaque mouvement plan irrotationnel et izentropique correspond un mouvement rotationnel, traité ici, que l'on obtient en divisant la densité par λ et en multipliant la vitesse par $\sqrt{\lambda}$. Une fonction arbitraire de z peut être ajoutée au l'angle ϑ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Кочин, Кибель, Розе, *Теоретическая Гидромеханика*, II, 1963), Москва, стр. 245.

[2] K. Voronjec *Sur les mouvements analogues d'un gaz parfait et d'un fluide incompressible*, Publ. Inst. Math. T. 9 (23). 1969, Beograd

[3] K. Voronjec *O nekim rešenjima problema iz adijabatskog strujanja neviskoznog gasa*, Glas SANiU, od. Teh. n. (sous presse)

[4] K. Voronjec *Sur quelques mouvements adiabatiques d'un gaz parfait*, Publ. Inst. Math. T. 10 (24), 1970, Beograd

[5] Седов, Л., *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики* Москва-Ленинград, 1950, стр. 363.