PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 12 (26), 1971, pp. 5—10

TUYAUX ÉTAGÉS DE L'APPROXIMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Milorad Bertolino

(Communiqué le 29 Octobre 1971)

I.

Dans plusieurs de nos travaux dont l'essentiel est donné dans notre monographie [2], nous avons utilisé des „tuyaux" de la forme

$$x>x_0;\quad y_1<y<y_2;\quad y_1=\text{const.},\quad y_2=\text{const.},$$

pour établir l'existence des solutions bornées, ou des solutions avec $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\text{const.}$ de l'équation différentielle $y'=f(x,y)$. On a utilisé la méthode de rétracte due à M.T. Ważewski (voir [1], [3], [4]). Suivant cette méthode, ou, plus précisément, suivant une interprétation des plus simples du théorème de Ważewski, dans le cas où l'on a $f(x,y_2)>0$, $f(x,y_1)<0$ pour $x\geqslant x_0$, il existe au moins une solution de l'équation différentielle, toute entière située dans le „tuyau"

$$x>x_0,\quad y_1<y<y_2.$$

Supposons qu'on ait donné une fonction $y=\varphi(x)$ tellement qu'on a: $f(x,\ \varphi(x))=0$; $f(x,y)>0$ pour $y>\varphi(x)$; $f(x,y)<0$ pour $y<\varphi(x)$, dans une région dans laquelle nous considérons des solutions de l'équation différentielle, c'est-à-dire que la fonction $f(x,y)$ change de signe pour $y=\varphi(x)$. Nous avons, dans nos travaux cités, utilisé assez souvent des droites $y=y_1$, $y=y_2$ avec $y_1<\varphi(x)<y_2$ pour former des „tuyaux" garantissant au moins une solution bornée. Considérons,, par exemple, l'équation

$$y'=\big(y-\varphi_1(x)\big)\big(y-\varphi_2(x)\big)\big(y-\varphi_3(x)\big)$$

avec

$$(*)\qquad \inf\varphi_k(x)>\sup\varphi_j(x),\quad k>j.$$

$\varphi_i(x)$ étant des fonctions continues et bornées pour $x\geqslant x_0$. La condition (*) permet de poser, par exemple, des droites

$$y=\alpha,\ y=\beta,\ \varphi_2(x)<\alpha<\varphi_3(x)<\beta,$$

pour que le „tuyau", $x\geqslant x_0$, $\alpha<y<\beta$ puisse établir l'existence d'au moins une solution bornée, parce qu'on a $f(x,\alpha)<0$, $f(x,\beta)>0$.

Nous avons souligné, dans notre monographie [2], p. 135 la remarque de M.M. Marjanović que, dans certains de nos résultats, la condition (*) peut être omise, parce qu'on peut, ce qui est bien connu, poser une ligne brisée (étagée) aux segments parallèles aux axes x et y, entre toutes les deux fonctions

$$y=f_1(x), y=f_2(x), x\geqslant x_0, \quad f_1(x)<f_2(x)$$

et qui peut servir comme la droite $y=\alpha$ ou $y=\beta$ de l'exemple mentionné. Nous allons mieux expliquer des circonstances en question parce qu'elles seront bien utilisées dans le présent travail.

Pour fixer des idées, considérons trois fonctions

$$y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x), y=\varphi_3(x)$$

continues pour $x\geqslant x_0$ et $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)<\varphi_3(x)$. Soit, pour $\varphi_1(x)<y<\varphi_2(x)$ le signe du deuxième membre de l'équation $y'=f(x,y)$ négatif, et positif pour $\varphi_2(x)<y<\varphi_3(x)$, c'est à-dire, on a $f(x,y)<0$ dans la première et $f(x,y)>0$ dans la seconde région. Désignons par $y=\alpha$ la ligne brisée composée des segments parallèles soit à l'axe x, soit à l'axe y, située entre des courbes $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ et par $y=\beta$ une telle ligne située entre des courbes $y=\varphi_2(x), y=\varphi_3(x)$. Des lignes en question existent toujours.

Considérons alors la ligne $y=\alpha$ pour $x\geqslant x_0$. Elle est toute située dans la région du signe négatif du deuxième membre de l'équation. Fixons un point arbitraire de cette ligne, appartenant soit à un segment parallèle à l'axe x, soit à l'axe y. La solution correspodante de l'équation, dont le coefficient angulaire est, donc, négatif, sort du „tuyau" $x\geqslant x_0, \alpha<y<\beta$. Tous les points de la ligne $y=\alpha$ sont, donc, les points de „sortie stricte" dans le sens de rétracte excepté certains des segments parallèles à l'axe y et certains points angulaires (voir [1], [2], [3]). Dans le cas de la ligne $y=\beta$, les points des segments parallèles à l'axe x sont de même les points de sortie stricte du „tuyau" $x\geqslant x_0, \alpha<y<\beta$ le coefficient angulaire de chaque solution correspondante étant positif. Cependant, les points appartentant aux certains segments parallèles à l'axe y ne sont pas des points de sortie stricte, mais, au contraire, ils sont des points d'entrée stricte (comme dans le cas $y=\alpha$) du „tuyau" $\alpha<y<\beta$, grâce à la positivité du coefficient angulaire de la solution correspondante. Quant aux points communs à deux segments voisins, dont l'un est parallèle à l'axe x et l'autre à l'axe y, il y a parmi ces points qui ne sont ni points de sortie stricte ni points d'entrée stricte. On peut donc conclure que, pour $y=\beta$, l'ensemble de points de sortie stricte est réduit aux points des segments parallèles à l'axe x parfois sans leur extrémités mais comptant aussi quelques des segments parallèles à l'axe y.

Fixons un point arbitraire de sortie stricte M_2 de la ligne $y=\beta$. Désignons par S_2 l'ensemble de sortie stricte de $y=\beta$. Introduisons le rétracte tellement que l'image de tout le point de S_2 soit M_2. Évidemment, une telle transformation est continue, avec la métrique habituelle du plan euclidien. Fixons alors un point arbitraire M_1 de $y=\alpha$. Désignons par S_1 l'ensemble de points de sortie stricte de $y=\alpha$. M_1 est un rétracte de S_1. L'ensemble de points (M_1, M_2) est le rétracte de l'ensemble $S_1\cup S_2=S$ (l'ensemble de points de sortie stricte du „tuyau" $\alpha<y<\beta$).

Il est toujours possible, dans l'intérieur du „tuyau" fixé, trouver une coube continue dont les bouts sont des points M_1, M_2. Désignons par Z l'ensemble de points de cette courbe. Alors $Z\cap S$ (les points M_1, M_2) est le rétracte de S, mais il n'est pas le rétracte de Z, parce qu'on ne peut pas transformer d'une façon continue un tel arc en ces bouts. Alors, d'après le théorème de Ważewski, il existe au moins un points de Z dont la solution correspondante de l'équation reste toute entière dans le „tuyau" mentionné.

Nous allons expliquer nos désignations des courbes brisées $y=\alpha, y=\beta$ et $\alpha<y<\beta$. Ces désignations ne signifient ni des droites ni des fonctions uniformes (des points appartenant aux segments parallèles à l'axe y ne permettent pas cette uniformité). La désignation $\alpha<y<\beta$ représente tous les points intérieurs de la région limitée par $x=x_0$ et par les lignes brisées en question. Nos désignations ne sont pas, donc, tout à fait adéquates, mais nous les préférons pour établir la liaison avec nos travaux précédents et leurs désignations, parce que nos lignes brisées jouent le rôle des droites $y=\alpha$ et $y=\beta$.

L'omission de la condition (*) va faciliter, ce que nous verrons dans ce qui suit, la recherche des solutions tendant vers ∞ pour $x \to +\infty$, mais aussi une bonne approximation des solutions, fixant l'existence des solutions aux ε—voisinages des fonctions $\varphi_i(x)$ données en avance, ce qui est un nouveau type de résultats en comparaison avec nos résultats précédents. Dans nos résultats précedents des „tuyaux" réctilignes furent, vraiment, dépassés, mais seulement par l'introduction des „tuyaux", curvilignes, ou par la sortie dans l'espace à n dimensions, où, dans le cas des parallélépipèdes correspondants le nombre de possibilités augmente.

Nous présenterons des nouveax résultats dans la forme de quelques exemples, mais qui permettent, évidemment, beaucoup de géneralisations faciles, en tout cas pour les formes plus générales de nos résultats précédents. Nous n'avons pas traité des formes plus générales, pour illustrer la méthode seule, d'une façon suffisamment claire.

II.

Proposition 1. *Soit donnée l'équation de Riccati*

$$y'=(y-f_1(x))(y-f_2(x)), \tag{1}$$

$f_1(x), f_2(x)$ étant des fonctions continues pour $x \geqslant x_0$;

$$f_1(x)<f_2(x);\ \lim_{x\to+\infty} f_1(x)=c=\text{const.},\ \lim_{x\to+\infty} f_2(x)=+\infty.$$

Alors, il existe un ensemble de solutions avec $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=c$. Il existe de même, pour chaque $\varepsilon>0$, un $x^* \geqslant x_0$ tellement que, dans le voisinage

$$f_2(x)-\varepsilon<y<f_2(x)+\varepsilon$$

existe au moins une solution $y(x)$ de (1) et $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$.

Démonstration. Les solutions de la région $y<f_1(x)$ sont croissantes, le deuxième membre de (1) y étant positif. Elles touchent, pour $x \geqslant x_0$ la fonction $f_1(x)$ ou ne la touchent pas. Dans ce deuxième cas, les solutions sont des fonctions bornées, monotones et croissantes pour $x\to+\infty$, c'est-à-dire elles ont leur limite c_1 pour $x\to+\infty$. Considérons

$$\lim_{x\to+\infty} (y-f_1(x))(y-f_2(x))$$

c'est-à-dire la limite du deuxième membre de (1) pour $x\to+\infty$, y étant la solution considérée tendant vers c_1. On a évidemment

$$\lim_{x\to+\infty} y'=(c_1-c)\ (c_1-\infty),$$

ce qui est impossible, parce que, dans le cas où y' (d'une fonction à la limite finie) tend vers une limite pour $x\to+\infty$ elle ne peut tendre que vers zéro. On a, donc $c_1=c$, où le deuxième membre de (1) devient de forme $0.\ \infty$.

Si les solutions de la région $y<f_1(x)$ touchent la fonction $y=f_1(x)$, elles auront, dans les points communs, des points stationnaires $(y'=0)$ et elles passeront, après cela, dans la région
$f_1(x)<y<f_2(x)$, y décroître, y rester toujours (et devenir tellement des solutions de cette région lesquelles nous ne traitons pas dans ce moment), ou passer encore une fois dans $y<f_1(x)$. Les solutions toujours liées à la fonction $y=f_1(x)$ sont possibles, et pour elles est facile à démontrer qu'elles tendent vers c pour $x\to+\infty$. ce que nous avons déjà fait dans nos travaux précédents. Quant aux solutions de la région $f_1(x)<y<f_2(x)$, elles sont soit monotones, bornées et décroissantes (celles qui restent toujours dans la dite région), soit passent dans la région inférieure, soit elles sont toujours liées à la fonction $y=f_1(x)$ de façon expliquée, la coupant infiniment fois. Dans le premier cas, on démontre qu'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=c$ de la même façon comme au commencement de cette démonstration. Il faut souligner, lorsqu'il s'agit des solutions de la région

$$f_1(x)<y<f_2(x)$$

que nous considérons à ce moment seulement de telles solutions qui n'ont pas de points communs avec $y=f_2(x)$. Les solutions d'une telle espèce existent, parce qu'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)=+\infty$. Vraiment, après un certain x, la fonction $f_2(x)$ est au dessus de $M>\max\limits_{x\geq x_0} f_1(x)=m$ et nos considérations peuvent être appliquées aux solutions provenant des points de la région $m<y<M$.

Formons maintenant des fonctions $f_2(x)-\varepsilon$ et $f_2(x)+\varepsilon$. Le deuxième membre de (1) étant positif pour $y>f_2(x)$, la fonction $f_2(x)+\varepsilon$ sera toute entière située dans la région où des solutions croissent et la région

$$f_2(x)<y<f_2(x)+\varepsilon$$

est une sous-région. de cette région. Quant à la fonction $f_2(x)-\varepsilon$, elle ne doit pas, dans le cas général être toute entière située dans la région inférieure où les solution décroissent, par exemple si l'on a $f_2(x_0)-\varepsilon<f_1(x_0)$ Cependant, prenant en égard

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}(f_2(x)-\varepsilon)=+\infty,$$

il existera, pour $\varepsilon>0$ arbitraire, un $x^*\geqslant x_0$ tellement qu'on aura

$$f_2(x)-\varepsilon>M>\max_{x\geqslant x_0} f_1(x)=m$$

et, pour $x\geqslant x^*$, la fonction $f_2(x)-\varepsilon$ sera située dans la région où des solutions décroissent et la région $f_2(x)-\varepsilon<y<f_2(x)$ sera une sous-région de cette région. Nous allons former, dans $f_2(x)-\varepsilon<y<f_2(x)$ une ligne brisée étagée de type $y=\alpha$ et, dans $f_2(x)<y<f_2(x)+\varepsilon$ une telle ligne de type $y=\beta$. On a, donc, formé un „tuyau“ garantissant l'existence d'au moins une solution $y(x)$ avec

$$f_2(x)-\varepsilon<y(x)<f_2(x)+\varepsilon,$$

pour laquelle on a, de même, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$.

Proposition 2. *Soit donnée l'équation différentielle*

$$y'=(y-f_1(x))(y-f_2(x))(y-f_3(x)) \tag{2}$$

où des fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ *sont continues pour* $x\geqslant x_0$, $f_1(x)<f_2(x)<f_3(x)$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=c_1,\ \lim_{x\to+\infty} f_2(x)=c_2,\quad c_1<c_2,\ \lim_{x\to+\infty} f_3(x)=+\infty.$$

Alors, il existe au moins une solution de l'équation différentielle (2) pour laquelle on a $\lim_{x \to +\infty} y(x) = c_1$. *Puis, il existe un ensemble de solutions* $y(x)$ *ayant la propriété* $\lim_{x \to +\infty} y(x) = c_2$. *Enfin, à chaque* $\varepsilon > 0$ *correspond un* $x^* \geqslant x_0$ *tellement qu'on a, pour* $x \geqslant x^*, f_3(x) - \varepsilon < y(x) < f_3(x) + \varepsilon$, $y(x)$ *étant au moins une solution de l'équation (2) avec* $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$.

Démonstration. Le deuxième membre de l'équation (2) sera <0 pour $y < f_1(x)$; >0 pour $f_1(x) < y < f_2(x)$; <0 pour $f_2(x) < y < f_3(x)$; >0 pour $y > f_3(x)$.

Envisageons la courbe $f_1(x) - \varepsilon$. À cause de $f_1(x) - \varepsilon < f_1(x)$, toute cette courbe est située dans la région $y < f_1(x)$, c'est-à-dire dans la région où des solutions décroissent. Posons, dans la sous-région $f_1(x) - \varepsilon < y < f_1(x)$ la ligne brisée $y = \alpha$, qui sera la frontière inférieure du „tuyau" de la méthode de rétracte. Nous avons cependant $c_1 < c_2$. Allors, il existera $\varepsilon > 0$ tellement que, partant d'un certain x^* la courbe $y = f_1(x) + \varepsilon$ sera située toute entière dans

$$f_1(x) < y < f_2(x)$$

c'est-à-dire on aura $f_1(x) + \varepsilon < f_2(x)$. Dans la région $f_1(x) < y < f_1(x) + \varepsilon$ nous allons poser la ligne brisée $y = \beta$, comme la frontière supérieure du „tuyau". Il existera donc, pour $x \geqslant x^*$ au moins une solution $y(x)$ avec

$$f_1(x) - \varepsilon < y(x) < f_1(x) + \varepsilon.$$

Cependant, le nombre ε qui, vraiment, ne peut pas dépasser un certain nombre, peut être, d'autre côté, tellement petit que l'on veut parce que

$$f_1(x) + \varepsilon < f_2(x) \;\not\Rightarrow\; f_1(x) + \varepsilon^* < f_2(x) \qquad (\varepsilon^* < \varepsilon).$$

Alors, notre solution est située dans le voisinage arbitrairement petit de la fonction $y = f_1(x)$ tendant de même vers c_1 pour $x \to +\infty$.

L'existence de l'ensemble de solutions tendant vers c_2 peut être démontrée de la même façon comme dans le cas de partie correspondante dans la proposition 1. Il est de même pour l'existence d'au moins une solution tendant vers $+\infty$, en se trouvant dans ε-voisinage de $f_3(x)$.

Suivant les mêmes considérations, ou tout à fait semblables nous pouvons facilement prouver les deux propositions suivantes:

Proposition 3. *Soit donnée l'équation différentielle*

$$y' = \big(y - f_1(x)\big)\big(y - f_2(x)\big)\big(y - f_3(x)\big), \tag{3}$$

$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ *étant des fonctions continues pour* $x \geqslant x_0$;

$$f_1(x) < f_2(x) < f_3(x);\ \lim_{x \to +\infty} f_1(x) = c_1;\ \lim_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty;\ f_3(x) - f_2(x) \geqslant k > 0.$$

Il existe, alors, au moins une solution de l'équation (3) avec $\lim_{x \to +\infty} y(x) = c_1$. *Puis, il existe un ensemble de solutions, provenant des points proches à la courbe* $y = f_2(x)$ avec $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$. *Enfin, il existe au moins une solution dans* ε*-voisinage de* $f_3(x)$ *comme dans les propositions précédentes.*

P r o p o s i t i o n. 4. *Soit donnée l'équation différentielle*

$$y' = (y - f_1(x))(y - f_2(x))(y - f_3(x))(y - f_4(x)), \tag{4}$$

f_1, f_2, f_3, f_4 étant des fonctions continues pour $x \geqslant x_0$, $f_1 < f_2 < f_3 < f_4$ et $\lim_{x \to +\infty} f_i(x) = c_i$, $i = 1,2,3$; $c_i < c_j$, $i < j$; $\lim_{x \to +\infty} f_4(x) = +\infty$. Alors, il existe un ensemble de solutions tendant vers c_1 pour $x \to +\infty$, au moins une solution avec $\lim_{x \to +\infty} y(x) = c_2$, un ensemble de solutions tendant vers c_3 pour $x \to +\infty$. Enfin, à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un $x^* \geqslant x_0$ tellement qu'on a

$$f_4(x) - \varepsilon < y(x) < f_4(x) + \varepsilon$$

pour $x \geqslant x^*$, $y(x)$ étant au moins une solution de (4), ayant, donc, la propriété $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$.

Il est facile de voir qu'on pourrait obtenir beaucoup de propositions semblables relatives à l'équation

$$y' = \prod_{i=1}^{n} (y - f_i(x))$$

ainsi que à beaucoup d'autres équations.

Des résultats obtenus appartiennent, dans un certains sens à la catégorie de celles de Weierstrass. Notamment, dans le voisinage d'une fonction donnée en avance, on établit l'existence d'au moins une fonction provenant d'un ensemble donné (dans ce cas de l'ensemble de solutions de l'équation différentielle donnée).

Remarquons que, dans plusieurs de nos travaux sur ce sujet, en titre des fonctions f_i figuraient très souvent des fonctions de même type (toutes bornées, toutes tendent vers les constantes, toutes sont infinies). L'élargissement de la méthode de ce travail permet des combinaisons plus différentes des types des fonctions figurant dans l'équation considérée.

R e m a r q u e. Les points angulaires de nos tuyaux étagés qui sont les points de sortie mais qui ne sont pas les points de sortie stricte sont omises dans nos considérations. Les ensembles ω et Ω de la méthode de rétracte restent ouverts et nos conclusions restent valables.

LITTÉRATURE

[1] B e r t o l i n o M.: *Egzistencija asimptotskih rešenja jedne klase diferencijalnih jednačina.* Vesnik Društva matematičara i fizičara SRS, XV, Beograd, 1963, pp 79—124

[2] B e r t o l i n o M.: *Inégalités différentielles et l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires.* Editions spéciales de l'Institut Mathématique de Beograd, T. 7, pp 61—152.

[3] W a ż e w s k i, T.: *Sur un principe topologique de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires.* Ann. de la Soc. pol. de Math. T. XX, pp. 279—313

[4] H a r t m a n P.: *Ordinary differential equations.* New York-London-Sydney, 1964. Traduction russe, Moscou, 1970.