PUBLICATIONS DE L'INSITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle serie, tome 11 (25), 1971 pp. 57–59

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE LÖWENHEIM SUR LES ÉQUATIONS DE BOOLE

Coriolan Ghilezan

(Communiqué le 10. Juin 1970)

Le théorème de L. Löwenheim [1], [2] sur les équations de Boole, a été étendu par P. Ivanescu (Hammer) [4] sur les équations pseudo-booliennes.

S. Rudeanu [3] a démontré que les résultats obtenus par L. Löwenheim peuvent être utilisés dans la détermination de toutes les solutions générales du système des équations de Boole.

Dans notre travail nous allons étendre ce théorème pour une relation définie sur l'ensemble fini.

Soit donné un ensemble fini $S_p = \{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$ (avec de p éléments) et que

$$f : S_p^n \to E \tag{1}$$

soit une fonction où E est un certain ensemble qui contient entre autres deux éléments désignés par 0 et 1, ainsi $S_p^n = S_p \times S_p \times \cdots \times S_p$.

Le problème consiste à déterminer les solutions générales de la relation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \tag{2}$$

(c'est-à-dire, déterminer l'ensemble $f^{-1}(D)$), si nous savons une des solutions particulières.

Par rapport à cette relation introduisons les relations suivantes

$$\begin{aligned} [f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin D] &= \begin{cases} 1, & \text{si } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin D \\ 0, & \text{si } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D, \end{cases} \\ \overline{[f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin D]} &= \begin{cases} 0, & \text{si } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin D \\ 1, & \text{si } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D, \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

et après

$$x^\alpha = \begin{cases} 1, & \text{si } x = \alpha \\ 0, & \text{si } x \neq \alpha, \ x, \alpha \in S_p. \end{cases} \tag{4}$$

Supposons que dans l'ensemble $S_p \cup E$ l'on introduit les opérations $+$ et $\cdot$, qui ont les propriétés suivantes:

$$
\begin{array}{lll}
0\cdot 1=1\cdot 0=0 & 0\cdot 0=0 & 1\cdot 1=1 \\
q\cdot 0=0\cdot q=0 & 1\cdot q=q\cdot 1=q & \\
u+0=0+u=u, & (u\in E,\ q\in S_p). &
\end{array}
\tag{5}
$$

L e m m e 1. *S'il est*

$$x_i=\xi_i[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]+p_i\overline{[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]},$$

il résulte

$$x_i^\alpha=\xi_i^\alpha[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]+p_i^\alpha\overline{[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]}, \quad \alpha\in S_p.$$

Soit

$$
\begin{aligned}
&x_i=\xi_i[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]+p_i\overline{[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]}, \\
&x_i^\alpha\neq\xi_i^\alpha[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]+p_i^\alpha\overline{[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]}, \quad \alpha\in S_p.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Si $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D$ par rapport à (3), $x_i=\xi_i$, et par rapport à (4), $x_i^\alpha=\xi_i^\alpha$, $\alpha\in S_p$.

Tandis que si $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\in D$ par rapport à (3), $x_i=p_i$ et par rapport à (4), $x_i^\alpha=p_i^\alpha$, $\alpha\in S_p$, c'est en contradiction avec (6).

L e m m e 2. *Chaque fonction du type* (1) *peut être transformée comme suit*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\in S_p^n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

La démonstration de ce lemme est pareille à celle du lemme dans le travail [5].

T h é o r è m e. *Si* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\in S_p^n$ *est une solution particulière de la relation* (2), *alors sa solution générale sera*

$$x_i=\xi_i[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]+p_i[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D], \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

dont $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *est un vecteur arbitraire de l'ensemble* S_p^n.

Soit $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ une solution particulière de la relation (2) et la solution générale de ce terme (7).

En conséquence du lemme 1 et du lemme 2 on a:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \ldots, x_n)= \\
&\sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\in S_p^n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\prod_{i=1}^{n}(\xi_i^{\alpha_i}[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]+ \\
&\qquad +p_i^{\alpha_i}\overline{[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]})= \\
&\sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\in S_p^n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]+ \\
&\qquad +p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}\overline{[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\notin D]})=
\end{aligned}
$$

$$[f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \notin D] \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in S_p^n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}, \ldots, \xi_n^{\alpha_n} +$$

$$\overline{[f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \notin D]} \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in S_p^n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} =$$

$$[f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \notin D]\, f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) +$$

$$+\overline{[f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \notin D]}\, f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in D,$$

parce que si $f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \notin D$ il suit que

$$\overline{[f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \notin D]}\, f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

mais si $f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in D$, on a

$$[f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \notin D]\, f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0.$$

Soit $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ la solution de la relation (2), il suit que

$$[f(x_1', x_2', \ldots, x_n') \notin D] = 0, \quad \overline{[f(x_1', x_2', \ldots, x_n') \notin D]} = 1.$$

Par conséquent $p_i = x_i'$, $i = 1, 2, \ldots, n$ on a

$$x_i = \xi_i [f(x_1', x_2', \ldots, x_n') \notin D] + x_i' \overline{[f(x_1', x_2', \ldots, x_n') \notin D]} = x_i', \quad i = 1\ 2, \ldots, n,$$

et le théorème est démontré.

E x e m p l e. Soit donné l'inéquation

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, x_{i_1}^{0}\, x_{i_2}^{1} \cdots x_{i_p}^{p-1} \leqslant 0$$

où $+$ et $\cdot$ sont des opérations arithmétiques ordinaires, $a_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ nombres réels, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ appartiennent à l'ensemble $S_p^n = \{0, 1, \ldots, p-1\}^n$.

La solution particulière de cette inéquation est $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$, et sa solution générale

$$x_j = p_j \overline{\left[\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, p_{i_1}^{0}\, p_{i_2}^{1} \cdots p_{i_p}^{p-1} > 0 \right]}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

où sont $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in S_p^n$.

L I T T É R A T U R E

[1] L. L ö w e n h e i m, *Über das Auflösungsproblem im logischen Klassenkalkul*, Sitzungsber. Berl. Math. Gesellschaft 7 (1908) 89—94.

[2] L. L ö w e n h e i m, *Über die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietkalkul*, Math. Ann. 68 (1910) 169—207.

[3] S. R u d e a n u, *On the Solution of Boolean Equation by the Löwenhem Method.* Stud. Cerc. Mat. 13 (1962) 295—308.

[4] P. Ivanescu (H a m m e r), *Systems of Pseudo-Boolen Equations and Inequalities*, Bull. Acad. Polen. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 12 (1964) 673—680.

[5] K. G i l e z a n, *Primena Pseudo-Bulovog programiranja u algebarskoj teoriji automata*, Matematički vesnik, 6 (21) Sv. 3, 1969.